Multiparticle aspects of turbulent-plasma theory

To cite this article: A. A. Galeev *et al* 1965 *Nucl. Fusion* **5** 20

ЯДЕРНЫЙ СИНТЕЗ 5 (1965)

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ*

А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев

Институт Ядерной Физики Сибирского Отделения

Академии Наук СССР, Новосибирск

Дан обзор теоретических работ по новому подходу в теории слаботурбулентной плазмы. Сущность этого подхода заключается в представлении турбулентной плазмы как совокупности слабовзаимодействующих газов частиц (ионов, электронов) и квазичастиц (коллективных колебаний). В такую схему включаются и эффекты неустойчивости (играющие роль источников в кинетических уравнениях для квазичастиц).

Как приложения этого метода, являющегося таким образом обобщением известной квазилинейной теории, рассмотрены некоторые аномальные явления переноса, возникающие вследствие различных типов неустойчивости в плазме.

1 Введение

В данном обзоре сделана попытка описать поведение плазмы при наличии в ней такого большого числа возбужденных коллективных колебаний, когда применим статистический подход. Надежные методы описания такой плазмы удается развить для тех случаев, когда колебания слабо взаимодействуют между собой и с «фоном». В этом случае совокупность колебаний мы можем рассматривать как слабонеидеальный газ волн — «квазичастиц», имеющих «энергию» ω и импульс k. Обмен же энергией между квазичастицами и усредненным «фоном» распределения частиц, а также внутри газа квазичастиц можно учесть по теории возмущений, считая фазы амплитуд отдельных колебаний хаотическими.

В настоящее время существуют различные методы построения рядов такой теории возмущений. Наиболее хорошо разработанными являются методы квантовой теории поля в применении к квантовым статистическим системам. Однако в плазме, когда в основу кладется не гамильтониан, а уравнения Больцмана, более удобным методом описания взаимодействия слаботурбулентных пульсаций является асимптотическая теория возмущений, как это сделано в квазилинейной теории [*1, 2*]. Здесь выделение «квазичастиц» — волн автоматически производится на основе классических кинетических уравнений для функции распределения частиц в плазме и уравнений Максвелла для самосогласованного поля.

Однако, квазилинейная теория рассматривает лишь взаимодействие волн с частицами, так что в дальнейшем понадобилось обобщение этой теории на случай взаимодействия колебаний между собой (некоторые оценки этих эффектов были сделаны уже в цитированной работе Драммонда и Пайнса, а также в работе *3*). Систематический учет этих явлений развит одновременно в двух группах работ. В работе *4* использована для этой цели опять-таки асимптотическая теория возмущений в применении к гидродинамическим колебаниям (усовершенствован вывод, данный в работе *3*). Авторы статьи *5* исходили из метода корреляционных цепочек, причем обрыв и замыкание уравнений для последних основаны на слабости взаимодействия, что фактически эквивалентно применению теории возмущений. Следует отметить, что в последнее время появилось еще несколько подходов к задаче [*6—9*], при применении которых получаются аналогичные результаты.

Вышеупомянутые методы позволяют рассмотреть ряд задач в теории слаботурбулентной плазмы, таких как релаксация надтепловой флюктуации плазменных колебаний, установление стационарного спектра турбулентных пульсаций в результате развития слабой неустойчивости (весьма интересна для рассмотрения различного рода процессов турбулентного переноса) и т.п. Каковы характерные черты установления спектра турбулентности в слегка неустойчивой плазме? Исследование установления спектра должно включать в себя изучение трех процессов:

1. Рост или затухание колебаний под влиянием «фона»;
2. Перераспределение энергии колебаний за счет их взаимодействия между собой;
3. Обратное влияние возникающих колебаний на «фон».

Первый процесс для волн очень малой амплитуды изучается в линейной теории устойчивости.

По мере роста амплитуды возмущений начинают включаться также и процессы 2, 3. При этом не всегда существенен учет нелинейного взаимодействия колебаний. Действительно, под влиянием нарастающих из-за неустойчивости колебаний распределение частиц плазмы часто довольно быстро релаксирует к такому, которое уже перестает раскачивать имеющийся набор колебаний. (Однако вновь образованное распределение вполне может быть неустойчиво по отношению к другим типам колебаний). И если при этом колебания не успели нарасти до таких амплитуд, при которых становится существенным их нелинейное взаимодействие, то процессы перераспределения энергии между различными модами можно не учитывать. В ряде же случаев нелинейные эффекты проявляются раньше, чем происходит релаксация распределения

* An English translation is available. To obtain a copy, please write to the editor.

частиц. Тогда картину турбулентного движения можно представить себе следующим образом. В определенных областях фазового пространства ($\omega_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}$) имеется приток энергии за счет неустойчивости. [В дальнейшем мы почти везде будем рассматривать возмущения в виде набора колебаний $\sim \exp i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$.] В других — наоборот колебания затухают. Ясно, что энергия не может сосредотачиваться только в неустойчивых областях фазового пространства, так как при больших амплитудах нелинейное взаимодействие привело бы к слишком сильному оттоку энергии по спектру $\omega_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}$ в области, где колебания не раскачиваются или вовсе затухают. Амплитуду установившегося колебания с данными $\omega_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}$ в квазистационарном режиме находим по порядку величины, сравнивая приток энергии в данную моду из-за неустойчивости с оттоком ее в другие моды из-за нелинейной передачи по спектру. Зная же амплитуду каждой моды спектра турбулентных пульсаций, мы можем из так называемых «квазилинейных» уравнений, учитывающих обратное влияние колебаний на «фон», проследить изменение этого фона и найти все коэффициенты переноса (такие как электропроводность, коэффициент диффузии частиц и др.).

2 Кинетические уравнения для слаботурбулентной плазмы

В этой главе излагаются общий вывод и исследование кинетического уравнения для волн и частиц с точностью до членов второго порядка по энергии колебаний включительно. При этом мы будем следовать работе *10*. Чтобы не загромождать изложение громоздкими обозначениями и деталями, мы ограничимся здесь рассмотрением только потенциальных колебаний ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$). Как показано в работе *10*, все результаты, изложенные ниже, справедливы и для произвольных непотенциальных колебаний.

2А КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН

Основные уравнения для потенциальных колебаний имеют вид

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi; \quad d\mathbf{E}/dt = -4\pi\mathbf{J} \tag{1}$$

Вектор плотности тока поляризации $\mathbf{J}$ с учетом нелинейных по $\mathbf{E}$ членов может быть представлен в виде

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(1)}\{E\} + \mathbf{J}^{(2)}\{E\} + \mathbf{J}^{(3)}\{E\} + \dots \tag{2}$$

где $\mathbf{J}^{(n)}\{E\}$ является некоторым функционалом от электрического поля n-го порядка. В частности, $\mathbf{J}^{(1)}$ определяется электропроводностью и имеет вид

$$J_\alpha^{(1)}(r, t) = \int_{-\infty}^{t} \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1)\, E_\beta(\mathbf{r}_1, t_1)\, dr_1\, dt_1$$

Нелинейные токи поляризации, как будет видно ниже, имеют аналогичную структуру. Эти токи могут быть выражены через соответствующие добавки к функции распределения частиц плазмы. Для этого будем исходить из кинетического уравнения для функции распределения частиц, которое нам будет удобно писать в виде

$$\partial F_j/\partial t + [\mathscr{H}_j{}^0, F_j] = -[\mathscr{H}_j{}^{\text{int}}, F] \tag{3}$$

где $\mathscr{H}_j{}^0$ — гамильтониан плазмы при отсутствии колебаний; $\mathscr{H}_j{}^{\text{int}}$ — часть гамильтониана, описывающая взаимодействие частиц с полем волн

$$\mathscr{H}_j{}^0 = \frac{1}{2m_j}\left(\mathbf{p} - \frac{e_j}{c}\mathbf{A}^0\right)^2; \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}^0$$

$$\mathscr{H}_j{}^{\text{int}}(t) = \int \varrho_j(\mathbf{r}, t)\,\varphi(\mathbf{r}, t)\,d\mathbf{r}; \quad \varrho_j(\mathbf{r}, t) = e_j\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \tag{4}$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность стационарного магнитного поля. Мы пренебрегаем столкновениями между частицами, поэтому в ур. 3 будем опускать интеграл столкновений. Функции распределения частиц снабжаются индексами $j = \mathrm{e}, \mathrm{i}$ (e — электроны, i — ионы). В дальнейшем, если по j суммирования не производится, мы будем этот индекс опускать.

Переходя к лагранжевым переменным r^0, p^0, отвечающим движению частицы в стационарном магнитном поле, получим вместо ур. 3

$$F(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0, t) = -\int_{-\infty}^{t} [\mathscr{H}^{\text{int}}(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0, t'), F(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0, t')\,dt')] \tag{5}$$

Отсюда находим выражение для добавки n-го порядка к функции распределения

$$f^{(n)}(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0, t) =$$
$$(-1)_n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n\, [\mathscr{H}^{\text{int}}(t_1), \dots [\mathscr{H}^{\text{int}}(t_n), f^0] \dots] \tag{6}$$

где $f^0 = f^0(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0)$ — невозмущенная функция распределения. С помощью ур. 6 можно получить ток поляризации n-го порядка $\mathbf{J}^{(n)}$

$$\mathbf{J}^{(n)}(\mathbf{r}, t) = (-1)^n \sum_j e_j n_j \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n$$
$$\times \left\{\int \mathbf{v}_j(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t))\,[\varrho_j(\mathbf{r}_1, t_1) \dots [\varrho_j(\mathbf{r}_n, t_n), f_j{}^0] \dots]\, d\mathbf{r}^0 d\mathbf{p}^0\right\}$$
$$\times \varphi(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \varphi(\mathbf{r}_n, t_n) \tag{7}$$

(n_j — плотность частиц соответствующего сорта). Используя свойства скобок Пуассона, выражение в фигурных скобках ур. 7 можно преобразовать к виду

$$\int d\mathbf{r}^0\, d\mathbf{p}^0\, [\dots [\mathbf{v}(t)\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)), \varrho(\mathbf{r}_1, t_1)],$$
$$\dots], \varrho(\mathbf{r}_n, t)]\, f^0(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0) \tag{8}$$

Подставляя ур. 8 в ур. 7 и переходя к фурье-представлениям $\mathbf{J}^{(n)}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$, получим

$$4\pi\, \mathbf{J}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega \mathbf{k}}{k^2} \sum_{\mathbf{k}_1, \ldots \mathbf{k}_n} (2\pi)^{-n+1} \int \mathrm{d}\omega_1 \ldots \mathrm{d}\omega_n \times \mu_{\mathbf{k}1 \ldots \mathbf{k}n}(\omega_1, \ldots \omega_n)\, \delta\Big(\omega - \sum_{s=1}^{n} \omega_s\Big)\, \delta\Big(\mathbf{k}, \sum_{s=1}^{n} \mathbf{k}_s\Big) \times \varphi(\mathbf{k}_1, \omega_1) \ldots \varphi(\mathbf{k}_n, \omega_n) \tag{9}$$

где

$$\mu_{\mathbf{k}1 \ldots \mathbf{k}n}(\omega_1, \ldots \omega_n) = \frac{1}{n!} \mathop{\mathrm{S}} \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \ldots \mathrm{d}\mathbf{r}_n \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_1 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n\, \psi(\mathbf{r}_1, t_1; \ \ldots \mathbf{r}_n, t_n) \times \exp\Big[i \sum_{s=1}^{n} (\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_s - \omega_s t)\Big] \tag{10}$$

$$\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, t_1 - t, \ldots \mathbf{r}_n - \mathbf{r}, t_n - t) = (-1)^n 4\pi \sum_j n_j \int \mathrm{d}\mathbf{r}^0 \mathrm{d}\mathbf{p}^0 \times f_j^0(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0) [\ldots [\varrho_j(\mathbf{r}_1 t), \varrho_j(\mathbf{r}_1, t_1)], \varrho_j(\mathbf{r}_2, t_2) \ldots], \varrho_j[(\mathbf{r}_n, t_n)] \tag{11}$$

$$\delta\Big(\mathbf{k}, \sum_s \mathbf{k}_s\Big) = \begin{cases} 1 & \mathbf{k} = \sum_s \mathbf{k}_s \\ 0 & \mathbf{k} \neq \sum_s \mathbf{k}_s \end{cases}$$

где символом S обозначена сумма по всем возможным перестановкам пар $(\mathbf{k}_s, \omega_s)$ $s = 1, \ldots, n$. В дальнейшем мы будем называть величину $\mu_{\mathbf{k}1 \ldots \mathbf{k}n}(\omega_1, \ldots \omega_n)$ откликом n-го порядка (следуя работе *11*).

Переходя в ур. 1 к фурье-компонентам, получаем динамическое уравнение для волн, в котором мы теперь ограничимся нелинейными членами до третьего порядка по φ включительно

$$k\, \omega\, \varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)\, \varphi(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi\, \mathbf{J}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) + 4\pi\, \mathbf{J}^{(3)}(\mathbf{k}, \omega) \tag{12}$$

где $\mathbf{J}^{(2)}$ и $\mathbf{J}^{(3)}$ определяются ур. 9, а $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы для продольных колебаний

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega) = 1 - \mu_{\mathbf{k}}(\omega)/k^2 \tag{13}$$

Удержанные нами члены (до φ^3 включительно) дадут основной вклад в нелинейное взаимодействие волн. Будем решать ур. 12 последовательными приближениями, приняв в качестве первого приближения решение линеаризованного уравнения:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)\, \varphi(\mathbf{k}, \omega) = 0 \tag{14}$$

Если дисперсионное уравнение $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega) = 0$ имеет вещественные решения $\omega_{\mathbf{k}}$, то решение ур. 14 имеет вид $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \ \omega) = 2\pi\, \varphi_k\, \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$. При наличии поглощения или неустойчивости ω_k является комплексным. В этом случае решение ур. 14 можно представить в виде:

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = \varphi_{\mathbf{k}} \frac{1}{i} \left(\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega - i\delta} - \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega + i\delta} \right) \tag{15}$$

где δ является символом, указывающим правило обхода полюсов при интегрировании ур. 15 по ω: в первом члене в скобках полюс обходится сверху, во втором — снизу, независимо от того, какой знак имеет $\mathrm{Im}\, \omega_k$. (Удобно рассматривать δ как некоторую функцию от ω, отличную от нуля лишь в сколь угодно малом интервале вблизи точки $\omega \simeq \mathrm{Re}\, \omega_{\mathbf{k}}$, причем в этой точке $\delta > |\mathrm{Im}\, \omega_{\mathbf{k}}|$. Тогда интегрирование ур. 15 можно проводить по вещественной оси.) Решение ур. 14, зависящее от времени, можно представить в виде $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \exp -i\omega t\, \mathrm{d}\omega$ что с учетом правил обхода полюсов в $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$ приводит к $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, t) = \varphi_{\mathbf{k}} \exp -i\omega_{\mathbf{k}} t$ при всех t.

Используя ур. 15, получаем для второго и третьего приближений выражения вида

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{2\pi\, k^2\, \varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)} \int \mu_{\mathbf{k}1\, \mathbf{k}2}(\omega_1, \omega_2) \times \varphi^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1)\, \varphi^{(1)}(\mathbf{k}_2, \omega_2)\, \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2)\, \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\omega_2 \tag{16}$$

$$\varphi^{(3)}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \frac{\delta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k})_3}{(2\pi)^2\, k^2\, \varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)} \times \iint \Big[\frac{2\mu_{\mathbf{k}1, \mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega_1, \omega - \omega_1)\, \mu_{\mathbf{k}2, \mathbf{k}3}(\omega_2, \omega_3)}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2\, \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega - \omega_1)} + \mu_{\mathbf{k}1, \mathbf{k}2, \mathbf{k}3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)\, \varphi^{(1)}(\mathbf{k}_1, \omega_1)\, \varphi^{(1)}(\mathbf{k}_2, \omega_2) \times \varphi^{(1)}(\mathbf{k}_3, \omega_3) \Big]\, \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\, \mathrm{d}\omega_1 \mathrm{d}\omega_2 \mathrm{d}\omega_3 \tag{17}$$

Теперь перейдем к статистическому описанию ансамбля волн, предполагая их фазы случайными. Вычислим $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\langle|\varphi(\mathbf{k}, t)|^2\rangle$, ограничиваясь членами до четвертого порядка по φ_k. Черта означает усреднение по фазам начальных амплитуд φ_k, фигурирующих в первом приближении ур. 15. Представляя $\varphi(\mathbf{k}, t)$ в виде интеграла Фурье, получаем

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\langle|\varphi(\mathbf{k}, t)|^2\rangle = (2\pi)^{-2}\, \mathrm{Im} \int (\omega - \omega') \langle \varphi(\mathbf{k}, \omega) \times \varphi^*(\mathbf{k}, \omega') \rangle \exp - i(\omega - \omega') t\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega' = 2\gamma_{\mathbf{k}} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + (2\pi)^{-2} \times \int (\omega - \omega') \langle 2\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)\, \varphi^{(3)}(\mathbf{k}, \omega') + \varphi^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) \times \varphi^{(2)*}(\mathbf{k}, \omega') \rangle \exp - i(\omega - \omega') t\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega' \tag{18}$$

где $\gamma_{\mathbf{k}} = \mathrm{Im}\, \omega_{\mathbf{k}}$ — линейный инкремент или декремент волны. В членах четвертого порядка по φ мы пренебрежем мнимой частью ω_k, что является оправданным при $\gamma_{\mathbf{k}} \ll \omega_{\mathbf{k}}$. Это означает, что мы пренебрегаем членами $\nu_{\mathbf{k}} \tau^{-1}/\omega_{\mathbf{k}}^2$, где τ — характерное время изменения энергии волны в результате нелинейного взаимодействия. При этом выражение в скобках ур. 15 заменяется на δ-функцию. Далее заметим, что при интегрировании выражений, содержащих 16, 17, полюса, возникающие из-за нулей $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)$, нужно обходить сверху, что вытекает из условия $\varphi^{(n)}(\mathbf{k}, t) \to 0, t \to -\infty$ ($n=2, 3$). Таким образом в ур. 16, 17 можно положить

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{-1}(\omega) = \mathrm{P}\frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})(\omega-\omega_{\mathbf{k}})} - i\pi\frac{\delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}$$

при

$$\omega \approx \omega_{\mathbf{k}} \tag{19}$$

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega) = \partial\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)/\partial\omega$$

Подставляя в ур. 18 $\varphi^{(2)}$ и $\varphi^{(3)}$ и учитывая ур. 19, получаем кинетическое уравнение для волн в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle|\varphi(\mathbf{k},t)|^2\rangle = 2\gamma_{\mathbf{k}}|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{1}{k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}\Big\{\mathrm{Im}\sum_{\mathbf{k}_1}|\varphi_{\mathbf{k}}|^2|\varphi_{\mathbf{k}1}|^2$$
$$\times\Big[\frac{8\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}-\mathbf{k}1},(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})\,\mu_{-\mathbf{k}1,\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}})}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})}$$
$$+6\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})\Big] + \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}4\pi\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}-\omega_{\mathbf{k}2})$$
$$\times\delta(\mathbf{k},\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\frac{|\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}2})|^2}{k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega)}|\varphi_{\mathbf{k}1}|^2\cdot|\varphi_{\mathbf{k}2}|^2\Big\} \tag{20}$$

В связи с ур. 20 необходимо заметить, что все изложенное выше представляло собой формальное разложение в ряд по степеням поля колебаний, соответствующее обычной теории возмущений. Однако при таком разложении во вкладах различных порядков появляются расходящиеся члены. Смысл этих членов, как будет показано в разделе 2В, по существу, заключается в вековых эффектах и их можно устранить, если просуммировать расходящиеся члены во всех порядках. В разделе 2В показано, что после этого суммирования отклики по-прежнему определяются ур. 10 и 11, где расходящиеся члены нужно опустить и заменить в ур. 11 невозмущенную функцию распределения f^0 на медленно меняющуюся во времени функцию $f(t)$, где $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ определяется уравнением квазилинейной теории (дополненным членами, учитывающими взаимодействие волн).

Если ввести вместо $|\varphi_k|^2$ число «квазичастиц» n_k, которое определяется соотношением

$$n_{\mathbf{k}} = \frac{1}{8\pi\,\omega_{\mathbf{k}}}\frac{\partial}{\partial\omega}[\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)\,\omega]_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}k^2|\varphi_{\mathbf{k}}|^2$$
$$= \frac{1}{8\pi}k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \tag{21}$$

так что $\omega_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}$ есть спектральная плотность энергии колебаний, то кинетическое уравнение для волн принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}n_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t} = 2\gamma_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}} + \frac{8\pi}{\mathrm{k}^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\delta(\mathbf{k},\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)$$
$$\times\Big\{\mathrm{Im}\Big[\mathrm{P}\frac{8\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})\,\mu_{-\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(-\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}})}{k_1^2k_2^2\varepsilon_{\mathbf{k}1}'(\omega_{\mathbf{k}1})\varepsilon_{\mathbf{k}2}'(\omega_{\mathbf{k}2})}$$
$$+6\frac{\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})}{k_1^2\varepsilon_{\mathbf{k}1}'(\omega_{\mathbf{k}1})}\Big]n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}1}$$
$$+\frac{4\pi\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}-\omega_{\mathbf{k}2})}{k_1^2k_2^2\varepsilon_{\mathbf{k}1}'(\omega_{\mathbf{k}1})\varepsilon_{\mathbf{k}2}'(\omega_2)}\times[|\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}2})|^2n_{\mathbf{k}1}n_{\mathbf{k}2}$$
$$-2\,\mathrm{Re}\{\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}2})\,\mu_{-\mathbf{k}1,\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}})\}n_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}1}]\Big\} \tag{22}$$

(P — символ главного значения). Нелинейный член в ур. 22 можно интерпретировать как интеграл столкновений для волн (квазичастиц).

2Б Некоторые общие свойства «интеграла столкновений» в кинетическом уравнении для волн

Величины $\psi^{(2)}$, $\psi^{(3)}$ из ур. 11, определяющие отклики второго и третьего порядков, удовлетворяют определенным соотношениям симметрии, которые оказываются весьма полезными при исследовании нелинейных членов в кинетическом уравнении для волн, ур. 22.

Рассмотрим сначала свойства откликов второго порядка. Из ур. 11 нетрудно получить (пользуясь свойствами скобок Пуассона)

$$\varphi(\mathbf{r}_1,t_1;\ \mathbf{r}_2,t_2) = -\varphi(-\mathbf{r}_1,-t_1;\ \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,t_2-t_1) \tag{23}$$

$$\varphi(\mathbf{r}_1,t_1;\ \mathbf{r}_2,t_2)+\varphi(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1,t_2-t_1;\ -\mathbf{r}_1,-t_1)$$
$$+\varphi(-\mathbf{r}_2,-t_2;\ \mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t_1-t_2)=0 \tag{24}$$

Из ур. 23 и 24 непосредственно еще нельзя получить каких-либо соотношений для величины $\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}$, определенной формулой 10, так как интегрирование в ней по t производится по полуоси от $-\infty$ до 0. Однако, если мы введем полную компоненту фурье-функции

$$\nu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}(\omega',\omega'') = \int\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,\psi(\mathbf{r}_1,t_1;\ \mathbf{r}_2,t_2)$$
$$\times\exp i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_1+\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}_2-\omega't_1-\omega''t_2) \tag{25}$$

то для нее из ур. 23 и 24 следует

$$\nu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega',\omega'') = -\nu_{-\mathbf{k}1-\mathbf{k}2,\mathbf{k}2}(-\omega'-\omega'',\omega'') \tag{26}$$

$$\nu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}(\omega',\omega'')+\nu_{\mathbf{k}2,-\mathbf{k}1-\mathbf{k}2}(\omega'',-\omega'-\omega'')$$
$$+\nu_{-\mathbf{k}1-\mathbf{k}2,\mathbf{k}1}(-\omega'-\omega'',\omega')=0 \tag{27}$$

Интересующий нас отклик $\mu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}$ связан с $\nu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}$ соотношением

$$\mu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\frac{\mathrm{d}\omega'\,\mathrm{d}\omega''}{\omega_1+\omega_2-\omega'-\omega''+i\varepsilon}$$
$$\times\Big[\frac{\nu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}(\omega',\omega'')}{\omega_2-\omega''+i\varepsilon}+\frac{\nu_{\mathbf{k}2\,\mathbf{k}1}(\omega'',\omega')}{\omega_1-\omega'+i\varepsilon}\Big] \tag{28}$$

Все соотношения типа 28 мы будем называть спектральными разложениями. Для уяснения смысла ур. 28 рассмотрим подробнее структуру величин $\nu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}(\omega',\omega'')$. Подставляя $\psi^{(2)}$ из ур. 11 в ур. 25 получаем после интегрирования по r', r''

$$\nu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2}(\omega_1,\omega_2) = \sum_j 4\pi e_j^3 n_j\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_2\int\mathrm{d}\mathbf{r}^0\,\mathrm{d}\mathbf{p}^0 f(\mathbf{r}^0,\mathbf{p}^0)$$
$$\times[[\delta(\mathbf{r}^0),\exp i\{\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}(t_1)-\omega_1t_1\}],\exp i\{\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}(t_2)-\omega_2t_2\}] \tag{29}$$

В скобках Пуассона подразумевается дифференцирование по лагранжевым переменным $\mathbf{r}^0$, $\mathbf{p}^0$.

При этом вместо $\mathbf{r}(t)$ надо подставить

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}^0+\int_0^t \mathbf{v}(t')\,dt'=\mathbf{r}^0+[\mathbf{v}(t)-\mathbf{v}^0,\mathbf{h}]\,\Omega_H+\mathbf{v}^0\cdot\mathbf{h}\,\mathbf{h}t \qquad (30)$$

где Ω_H — ларморовская частота (соответствующих частиц), $\mathbf{h}$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{H}$. После интегрирования по t_1, t_2 вместо экспонент в ур. 29 появятся δ-функции вида $\delta(\omega_1-k_{1z}v_z-n\Omega_H)$ и $\delta(\omega_2-k_{2z}v_z-n_2\Omega_H)$. Существенно при этом, что в δ-функции входят ω и k с одним и тем же индексом. На эти δ — функции действуют некоторые дифференциальные операторы по $\mathbf{p}^0$. В случае, когда внешнее магнитное поле отстуствует, величины $\nu_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ принимают особенно простой вид. В этом случае $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}^0+\mathbf{v}t$ и из ур. 29 следует

$$\nu_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}(\omega_1,\omega_2)=\sum_j\frac{e_j}{m_j}\,\omega_{0j}{}^2\int d\mathbf{v}\,\delta(\omega_1-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial v}\Big|_{(\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)}$$
$$\times\left\{\delta(\omega_2-\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{k}_2\frac{\partial f}{\partial v}\right\} \qquad (31)$$

(При получении ур. 31 в угловых скобках в ур. 29 прозведена циклическая перестановка); $\omega_{0j}^2=4\pi\, n_j\, e^2/m_j$.

После подстановки ур. 31 в ур. 28 и выполнения интегрирования по ω', ω'' получится выражение такого же типа, как и в ур. 31, но вместо $\delta(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})$ там будут стоять $(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i\varepsilon)^{-1}$.

После всего сказанного ясно, что полувычеты в величинах μ и ε, входящих в ур. 22, обусловлены резонансами колебаний с частицами, обладающими скоростями

$$\mathbf{v}=\frac{\omega_{\mathbf{k}1}}{\mathbf{k}_1},\ \frac{\omega_{\mathbf{k}2}}{\mathbf{k}_2},\ \frac{\omega_{\mathbf{k}1}\pm\mathbf{k}\omega_2}{\mathbf{k}_1\pm\mathbf{k}_2}\qquad(\mathbf{H}=0) \qquad (32)$$

$$v=\frac{\omega_{\mathbf{k}1}-n_1\Omega_H}{k_{1z}},\ \frac{\omega_{\mathbf{k}2}-n_2\Omega_H}{k_{2z}},\ \frac{\omega_{\mathbf{k}1}\pm\omega_{\mathbf{k}2}-m\,\Omega_H}{k_{1z}\pm k_{2z}} \qquad (33)$$

Первые два случая в ур. 32 и 33 отвечают резонансам собственных колебаний (с частотами $\omega_{\mathbf{k}1}$, $\omega_{\mathbf{k}2}$) с частицами плазмы, последний — резонансу вынужденных колебаний (с частотами $\omega_{\mathbf{k}1}\pm\omega_{\mathbf{k}2}$) с частицами. Ясно, что нелинейные члены, связанные с резонансном собственных колебаний с частицами, значительно меньше линейного члена $2\gamma_k n_k$, который содержит такие же полувычеты, и поэтому ими можно пренебречь. Таким образом, мы можем пренебрегать в нелинейных членах вкладами от полувычетов, обусловленных собственными колебаниями, т.е. полюса, не связанные с комбинационными частотами, интегрируются в смысле главных значений.

Запишем теперь спектральное разложение для величины $\mu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}1}$

$$\mu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\frac{d\omega'\,d\omega''}{\omega_{\mathbf{k}}-\omega'-\omega''}$$
$$\times\left[\frac{\nu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega',\omega'')}{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega''+i\varepsilon}+\frac{\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}1}(\omega'',\omega')}{\omega_{\mathbf{k}1}-\omega'}\right] \qquad (34)$$

В формуле 34 мы удержали мнимые добавки лишь в том знаменателе, где стоит комбинационная частота $\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}$; остальные полюса интегрируются в смысле главного значения. Преобразуя $\nu_{\mathbf{k}-\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}1}$, в ур. 34 с помощью ур. 26, а $\nu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}1}$ с помощью ур. 27, и производя затем замену переменных интегрирования, получаем

$$\mu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})=\lambda_{\mathbf{k},\,-\mathbf{k}1}{}^{*}(\omega_{\mathbf{k}},-\omega_{\mathbf{k}1}) \qquad (35)$$

где величина $\lambda_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}2}(\omega_1,\omega_2)$ определяется следующим соотношением

$$\lambda_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}2}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2(2\pi i)^2}\int\frac{d\omega'\,d\omega''}{\omega_1+\omega_2-\omega'-\omega''-i\varepsilon}$$
$$\times\left[\frac{\nu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}2}(\omega',\omega'')}{\omega_2-\omega''-i\varepsilon}+\frac{\nu_{\mathbf{k}2,\,\mathbf{k}1}(\omega'',\omega')}{\omega_1-\omega'-i\varepsilon}\right] \qquad (36)$$

(она отличается от $\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_1,\omega_2)$ лишь знаками мнимых добавок).

Соотношение 35 оказывается весьма полезным при исследовании интеграла столкновений в кинетическом уравнении для волн.

Перейдем теперь к откликам третьего порядка $\mu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2\,\mathbf{k}3}$. Введем компоненты Фурье

$$\nu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}2,\,\mathbf{k}3}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\,dt_2\,dt_3\int d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2\,d\mathbf{r}_3$$
$$\times\exp i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_1+\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}_2+\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{r}_3-\omega_1t_1-\omega_2t_2-\omega_3t_3)$$
$$\times\psi^{(3)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r},t_1-t;\mathbf{r}_2-\mathbf{r},t_2-t;\mathbf{r}_3-\mathbf{r},t_3-t) \qquad (37)$$

где $\psi^{(3)}$ определено формулой 11. Нетрудно убедиться, что

$$\mu_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}1,\,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})=$$
$$-\frac{1}{6(2\pi i)^3}\int\frac{d\omega'\,d\omega''\,d\omega'''}{\omega_{\mathbf{k}}-\omega'-\omega''-\omega'''+i\varepsilon}$$
$$\times\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}1,\,\mathbf{k},\,-\mathbf{k}1}(\omega',\omega'',\omega''')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}-\omega''-\omega'''+i\varepsilon)(-\omega_{\mathbf{k}1}-\omega'''+i\varepsilon)}\right.$$
$$+\frac{\nu_{\mathbf{k}1,\,-\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}}(\omega',\omega''',\omega'')}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}-\omega''-\omega'''+i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}}-\omega''+i\varepsilon)}$$
$$+\frac{\nu_{-\mathbf{k}1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}1}(\omega''',\omega'',\omega')}{(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}1}-\omega'-\omega''+i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}1}-\omega'+i\varepsilon)}$$
$$\left.+\frac{\nu_{-\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}}(\omega''',\omega',\omega'')}{(\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}1}-\omega'-\omega''+i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}}-\omega''+i\varepsilon)}\right\} \qquad (38)$$

Соотношение 38 написано для той величины, которая содержится в интеграле столкновений для волн. Заметим далее, что в ур. 38 мы опустили два расходящихся члена, содержащих $\nu_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}1,\,-\mathbf{k}1}$ и $\nu_{\mathbf{k},\,-\mathbf{k}1,\,\mathbf{k}1}$ (в соответствии с замечанием, сделанным после формулы 20, см. также раздел 2В).

Получим теперь некоторые соотношения для величин $\psi^{(3)}$, $\nu^{(3)}$. Используя свойства скобок Пуассона, формулу 11 при $n=3$ можно переписать в виде:

$$\psi(t_1-t;\ t_2-t;\ t_3-t)=4\pi\sum_j n_j\int d\mathbf{r}^0\,d\mathbf{p}^0$$
$$\times[\varrho_j(t),\varrho_j(t_1)]\,[[\varrho_j(t_2),\varrho_j(t_3)],f_j(\mathbf{r}^0,\mathbf{p}^0)] \qquad (39)$$

(пространственные аргументы, для краткости, не выписываются). Совершая циклическую перестановку $\varrho_j(t_2)$, $\varrho_j(t_3)$, f_j в правой части ур. 39, получаем

$$\psi(t_1-t;t_2-t;t_3-t)-\psi(t_1-t;t_3-t;t_2-t)$$
$$=4\pi\sum_j n_j\int d\mathbf{r}^0 d\mathbf{p}^0\,[\varrho_j(t),\varrho_j(t_1)]\,[[\varrho_j(t_2),\varrho_j(t_3)],f_j(\mathbf{r}^0,\mathbf{p}^0)] \quad (40)$$

Из ур. 39 и 40 следуют соотношения

$$\nu(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=-\nu(-\omega_1-\omega_2-\omega_3,\omega_2,\omega_3) \quad (41)$$

$$\nu(\omega_1,\omega_2,\omega_3)-\nu(\omega_1,\omega_3,\omega_2)=\nu(\omega_3,\omega_1,-\omega_1-\omega_2-\omega_3)-\nu(\omega_3,-\omega_1-\omega_2-\omega_3,\omega_1) \quad (42)$$

Если теперь разложить величину $\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})$ на две части

$$\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})=\mu^-_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}+\mu^+_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,\mathbf{k}1} \quad (43)$$

$$\mu^\pm_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})=$$
$$-\frac{1}{(2\pi i)^3 6}\int\frac{d\omega'\,d\omega''\,d\omega'''}{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega'-\omega''-\omega'''+i\varepsilon)(\omega_{\mathbf{k}}\mp\omega_{\mathbf{k}1}-\omega''\omega'''+i\varepsilon)}$$
$$\times\left\{\frac{\nu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k},-\mathbf{k}1}(\omega',\omega'',\omega''')}{\mp\omega_{\mathbf{k}1}-\omega'''+i\varepsilon}+\frac{\nu_{\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1,\mathbf{k}}(\omega',\omega''',\omega'')}{\omega_{\mathbf{k}}-\omega''+i\varepsilon}\right\} \quad (44)$$

(так что главный вклад в μ^- дают резонансы частиц с вынужденным колебанием частоты $\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}$, а в μ^+ — резонансы с частотой $\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}1}$), то из ур. 41 и 42 вытекают следующие соотношения симметрии (при условии, что интегрирование всех полюсов, не содержащих комбинационных частот, производится в смысле главного значения)

$$\operatorname{Im}\mu^-_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})=-\operatorname{Im}\mu^-_{\mathbf{k}1,\mathbf{k},-\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}},-\omega_{\mathbf{k}}) \quad (45)$$

$$\operatorname{Im}\mu^+_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})=\operatorname{Im}\mu^+_{\mathbf{k}1,\mathbf{k},-\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}},-\omega_{\mathbf{k}}) \quad (46)$$

При получении ур. 45 и 46 использовалось то обстоятельство, что вещественные части величин ν в формулах 44 не вносят никакого вклада в $\operatorname{Im}\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}$ (иными словами эти величины определяются только вкладами от полувычетов в спектральных разложениях ур. 44). Доказательство этого утверждения изложено в работе *10*.

Наконец, заметим, что кроме ур. 35, 45 и 46 имеют место еще следующие очевидные соотношения

$$\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_1,\omega_2)=\mu^*_{-\mathbf{k}1,-\mathbf{k}2}(-\omega_1,-\omega_2)$$
$$\lambda_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_1,\omega_2)=\lambda^*_{-\mathbf{k}1,-\mathbf{k}2}(-\omega_1,-\omega_2)$$
$$\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2,\mathbf{k}3}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)=\mu^*_{\mathbf{k}1,-\mathbf{k}2,-\mathbf{k}3}(-\omega_1,-\omega_2,-\omega_3)$$
$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)=\varepsilon^*_{\mathbf{k}}(-\omega) \quad (47)$$

Используя полученные соотношения симметрии для откликов $\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}$, $\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2,\mathbf{k}3}$, можно установить некоторые полезные свойства различных членов интеграла столкновений $\mathrm{I}\{n\}$ в кинетическом уравнении для волн. Разделим этот интеграл на две части

$$\mathrm{I}\{n\}=\mathrm{R}\{n\}+\mathrm{S}\{n\} \quad (48)$$

где $\mathrm{R}\{n\}$ содержит все члены с $\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}-\omega_{\mathbf{k}2})$ и описывает взаимодействие волн, для которых выполнены «распадные» условия

$$\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2,\ \omega_{\mathbf{k}}=\omega_{\mathbf{k}1}+\omega_{\mathbf{k}2} \quad (49)$$

Используя ур. 35 и 47, нетрудно получить следующее выражение для

$$\mathrm{R}\{n\}=4\pi\sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\{|\mathrm{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}|^2(n_{\mathbf{k}1}n_{\mathbf{k}2}-n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}1}-n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}2})$$
$$\times\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1}-\omega_{\mathbf{k}2})+2\,|\mathrm{V}_{\mathbf{k}2,\mathbf{k}1,\mathbf{k}}|^2(n_{\mathbf{k}1}n_{\mathbf{k}2}+n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}2}$$
$$-n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}1})\,\delta(\omega_{\mathbf{k}2}-\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})\}\,\delta(\mathbf{k},\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2) \quad (50)$$

где

$$\mathrm{V}_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}=\frac{8\pi\,\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}2})}{[\varepsilon'(\omega_{\mathbf{k}1})\varepsilon'(\omega_{\mathbf{k}2})\varepsilon'(\omega_{\mathbf{k}3})]^{1/2}\,k\,k_1\,k_2} \quad (51)$$

В ур. 50 уже подразумевается суммирование только по положительным частотам:

$$\omega_{\mathbf{k}}>0,\ \omega_{\mathbf{k}1}>0,\ \omega_{\mathbf{k}2}>0$$

Эта часть кинетического уравнения для волн, являющаяся единственной в случае «прозрачной среды» (то-есть когда резонансным взаимодействием частиц с волнами можно пренебречь), была получена ранее из уравнений гидродинамики плазмы в работе *3* и *4*. Заметим далее, что ур. 50 совпадает с правой частью кинетического уравнения для фононов в твердом теле, если в нем положить $n-0$. Квантовый вывод кинетических уравнений для волн в плазме рассматривается в работе *7*.

Второй член в ур. 48 — $\mathrm{S}\{n\}$ определяется резонансным взаимодействием вынужденных колебаний с частицами. Этот эффект можно интерпретировать также как вынужденное комбинационное рассеяние волн в плазме.

Представим теперь $\mathrm{S}\{n\}$ в виде

$$\mathrm{S}\{n\}=\sum_{\mathbf{k}'}(\mathrm{S}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}+\mathrm{S}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{}')\,n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}1} \quad (52)$$

$$\mathrm{S}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{}'=\left[\frac{8\pi}{\mathbf{k}^2\,\mathbf{k}_1{}^2\,\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}1})}\right]$$
$$\times\mathrm{P}\left[\frac{8\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})\,\mu_{-\mathbf{k}1,\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}})}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}1}}\right]$$
$$+6\mu^\pm_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})$$

где μ^- относится к $\omega_{\mathbf{k}1}>0$, $\omega_{\mathbf{k}}>0$
и μ^+ относится к $\omega_{\mathbf{k}1}<0$, $\omega_{\mathbf{k}}>0$

$$\mathrm{S}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{}'=\frac{48\pi}{\mathbf{k}^2\,\mathbf{k}_1{}^2\,\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})\,\varepsilon_{\mathbf{k}1}'(\omega_{\mathbf{k}1})}\times\mu^\pm_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1})$$

где μ^+ относится к $\omega_{\mathbf{k}1}>0$, $\omega_{\mathbf{k}}>0$
и μ^- относится к $\omega_{\mathbf{k}1}<0$, $\omega_{\mathbf{k}}>0$

и $\mu^\pm_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1}$ определены в ур. 44. Используя соотношения 35, 45, 46, 47, нетрудно проверить, что

$$\mathrm{S}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}=-\mathrm{S}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \quad (53)$$

$$\mathrm{S}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}=\mathrm{S}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}{}' \quad (54)$$

В большинстве конкретных случаев вкладом от резонансного взаимодействия комбинационных волн с частотой $|\omega_{\mathbf{k}}|+|\omega_{\mathbf{k}1}|$ с частицами можно пренебречь по сравнению с соответствующим вкладом от членов с $|\omega_{\mathbf{k}}|-|\omega_{\mathbf{k}1}|$. Это означает, что $S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \ll S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, так что все ядро интеграла $S\{n\}$ можно считать антисимметрическим. Соответственно, в этом случае его можно представить в явно антисимметрической форме (см. ур. 35, 36)

$$S_{\mathbf{k}\mathbf{k}1}=\frac{8\pi}{k^2 k_1^2\, \epsilon_k^1(\omega_{\mathbf{k}})\, \epsilon_{\mathbf{k}1}'(\omega_{\mathbf{k}1})} \times \operatorname{Im}\left\{ P\frac{8\lambda^*_{\mathbf{k},-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},-\omega_{\mathbf{k}1})\,\mu_{-\mathbf{k}1,\mathbf{k}}(-\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}})}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}1)^2\,\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}1})} + 3\left[\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}1-\mathbf{k}1}(\omega_{\mathbf{k}},\omega_{\mathbf{k}1},-\omega_{\mathbf{k}1}) - \mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k},-\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}1},\omega_{\mathbf{k}},-\omega_{\mathbf{k}})\right]\right\} \tag{55}$$

где $\lambda_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}$ определено в ур. 36.

В заключение этого раздела отметим, что форма кинетического уравнения для волн, где «интеграл столкновений» выражен через отклики $\mu_{\mathbf{k}1,\mathbf{k}2}$, $\mu_{\mathbf{k}1\,\mathbf{k}2\,\mathbf{k}3}$, представляемые в виде спектральных разложений, весьма удобна для конкретных приложений, так как эти величины сравнительно просто вычисляются (как это было видно из вывода ур. 31).

2В СУММИРОВАНИЕ РАСХОДЯЩИХСЯ ЧЛЕНОВ. СВЯЗЬ С КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИЕЙ

Рассмотрим общее выражение для функции распределения $F(\mathbf{r}^0, \mathbf{p}^0, t)$, получающееся при суммировании ряда теории возмущений. Подставляя в ур. 6 $\mathscr{H}^{\text{int}}$ из ур. 4 и суммируя по всем n, получим

$$F(\mathbf{r}^0,\mathbf{p}^0,t)=f^0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(2\pi)^{2n}}\sum_{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_n}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{s=1}^{n} d\omega_s\, d\omega_s' \exp it\sum_{s=1}^{n}(\omega_s-\omega_s') \times \frac{[\varrho(\mathbf{k}_1,\omega_1),\dots[\varrho(\mathbf{k}_m,\omega_m),f^0]\dots]\,\varphi(\mathbf{k}_1,\omega_1')\dots\varphi(\mathbf{k}_n,\omega_n')}{\left[\sum_{s=1}^{n}(\omega_s-\omega_s')-i\delta\right]\left[\sum_{s=2}^{n}(\omega_s-\omega_s')-i\delta\right]\dots(\omega_n-\omega_n'-i\delta)} \tag{56}$$

где $\varphi(\mathbf{k},\omega)$, $\varrho(\mathbf{k},\omega)$ — фурье-компоненты потенциала и микроплотности заряда ур. 4 и

$$\varrho(\mathbf{k},\omega)=e\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e\exp i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}(t)-\omega t] \tag{57}$$

($\mathbf{r}(t)$ определяется формулой ур. 30; скобки Пуассона берутся по отношению к лагранжевым переменным). В это выражение необходимо подставить $\varphi(\mathbf{k},\omega)$, выраженные через амплитуды φ_k собственных колебаний из динамического уравнения типа ур. 12. При этом наиболее простыми в ур. 56 будут члены, получающиеся при замене всех $\varphi(\mathbf{k},\omega)$ на $\varphi_k\,\delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}})$ (первое приближение теории возмущений для потенциала). Обозначая сумму всех таких членов через F_1 и усредняя по фазам всех φ_k, получим

$$\langle F_1(\mathbf{r}^0,\mathbf{p}^0,t)\rangle=f^0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^m\sum_{k_1,\dots,k_m}\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{s=1}^{m}d\omega_s\exp it\sum_{s=1}^{m}(\omega_s-\omega_{\mathbf{k}s}) \times\frac{[\varrho(\mathbf{k}_1,\omega_1)\dots[\varrho(\mathbf{k}_m,\omega_m),f^0]\dots]\,\langle\varphi_{\mathbf{k}1}\dots\varphi_{\mathbf{k}m}\rangle}{\left[\sum_{s=1}^{m}(\omega_s-\omega_{\mathbf{k}s})-i\delta\right]\left[\sum_{s=2}^{m}(\omega_s-\omega_{\mathbf{k}s})-i\delta\right]\dots(\omega_m-\omega_{\mathbf{k}m}-i\delta)} \tag{58}$$

Чтобы слагаемое в сумме 58 было отличным от нуля, необходимо, чтобы каждому φ_k соответствовало φ_k^*. Выделим теперь в ур. 58 такую подпоследовательность, где сопряженные пары $(\mathbf{k},\omega_{\mathbf{k}})$ $(-\mathbf{k}, -\omega_{\mathbf{k}})$ стоят рядом. Обозначая сумму таких членов через $f(t)$, можем написать

$$f(t)=f^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{2n}\sum_{\mathbf{k}_1,\dots,\mathbf{k}_n}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\dots d\omega_{2n}\exp\left\{it\sum_{s=1}^{2n}\omega_s\right\} \times\frac{[\varrho(\mathbf{k}_1,\omega_1)[\varrho(-\mathbf{k}_1,\omega_2)\dots[\varrho(\mathbf{k}_n,\omega_{2n-1})[\varrho(-\mathbf{k}_n,\omega_{2n}),f^0]\dots]}{\left(\sum_{s=1}^{2n}\omega_{2s}-i\delta\right)\left(\sum_{s=2}^{2n}\omega_s+\omega_{\mathbf{k}1}-i\delta\right)\dots(\omega_{2n}+\omega_{\mathbf{k}n}-i\delta)} \times|\varphi_{\mathbf{k}1}|^2\dots|\varphi_{\mathbf{k}n}|^2 \tag{59}$$

Нетрудно видеть, что подинтегральное выражение здесь является расходящимся. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим подробно простейший случай плазмы без магнитного поля. В этом случае из ур. 57 следует

$$\varrho(\mathbf{k},\omega)=2\pi e\,\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega)\exp i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 \tag{60}$$

так что знаменатели в ур. 59 типа $\sum_{s=1}^{2n}\omega_s$, $\sum_{s=3}^{2n}\omega_s$ и т.д. обратятся в нуль! Очевидно, эти расходимости являются проявлением вековых эффектов.

Дифференцируя ур. 59 по t и учитывая ур. 60, легко получить для $f(t)$ следующее уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\sum_{\mathbf{k}}\frac{i}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega\, d\omega'}{(\omega'+\omega_{\mathbf{k}}-i\delta)} \times[\varrho(\mathbf{k},\omega),\ [\varrho(-\mathbf{k},\omega'),f]]\,|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \tag{61}$$

Подставляя ур. 60 в ур. 16 и выполняя дифференцирование в скобках Пуассона, получаем известное уравнение квазилинейной теории [1, 2]

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\pi\frac{e^2}{m^2}\sum_{\mathbf{k}}|\varphi_{\mathbf{k}}|^2\,\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}}\left[\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}\right] \tag{62}$$

Таким образом, сумма расходящихся членов ряда ур. 59 является конечной и совпадает с медленно меняющейся во времени функцией распределения квазилинейной теории.

Аналогичное рассуждение можно провести и для плазмы в магнитном поле. Некоторые усложнения здесь связаны с тем, что $\varrho(\mathbf{k},\omega)$ уже будет представляться суммой членов, содержащих $\delta(\omega-k_z v_z-n\Omega_{\mathbf{k}})$ $n=0, 1, 2, \dots$, так что в сумме ур. 59, кроме расходящихся будут и конечные члены. Нетрудно видеть, что суммирование одних только расходящихся членов опять приведет к квазилинейной функции распределения (отбрасывание остальных членов эквивалентно усреднению по ларморовскому вращению частиц).

Далее, легко убедиться, что если одновременно с суммированием расходящихся членов в функции распределения просуммировать члены аналогичной структуры в кинетическом уравнении для волн, т.е. члены вида (см. ур. 7—9)

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n} \int \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega_1 \ldots \mathrm{d}\omega_{2n} \times \frac{\nu_{\mathbf{k},\mathbf{k}1,-\mathbf{k}1,\ldots,\mathbf{k}n,-\mathbf{k}n}(\omega,\omega_1,\ldots,\omega_{2n})\,|\varphi_{\mathbf{k}_1}|^2\ldots|\varphi_{\mathbf{k}_n}|^2}{\left(-\omega_{\mathbf{k}}+\omega+\sum\limits_{s=1}^{2n}\omega_s-i\delta\right)\left(\sum\limits_{s=1}^{2n}\omega_s-i\delta\right)\left(\omega_{\mathbf{k}1}+\sum\limits_{s=2}^{2n}\omega_s-i\delta\right)(\omega_{\mathbf{k}n}+\omega_{2n}-i\delta)}$$

$$\nu_{\mathbf{k}1\ldots\mathbf{k}m} = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1\ldots\mathrm{d}\mathbf{r}_m \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_m\, \psi(\mathbf{r}_1,t_1;\ldots\mathbf{r}_m,t_m) \times \exp\left[i\sum_{s=1}^{m}(\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}_s-\omega_s t_s)\right] \tag{63}$$

то это приведет к замене линейного инкремента

$$\gamma_{\mathbf{k}}{}^0 = \frac{\mathrm{Im}\,\mu_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}})}{k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})} = \sum_j \frac{\omega_{0j}{}^2}{k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}\,\mathrm{Im}\int \mathrm{d}\mathbf{r}^0\,\mathrm{d}\mathbf{v}^0\,\delta(\mathbf{r}^0) \times \left\{\frac{1}{2\pi e_j i}\int \mathrm{d}\omega\, \frac{[\varrho_j(\mathbf{k},\omega), f_j{}^0]}{(-\omega_{\mathbf{k}}+\omega-i\delta)}\right\} = \pi\sum_j \frac{\omega_{0j}{}^2}{k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}\int \mathbf{k}\,\frac{\partial f_j{}^0}{\partial \mathbf{v}}\,\delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega_{\mathbf{k}})\,\mathrm{d}\mathbf{v} \tag{64}$$

на квазилинейный, получающийся заменой f^0 в ур. 64 на $f(t)$.

Отсюда, в частности, ясно, почему из спектрального разложения для $\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}',-\mathbf{k}'}$ (формула 38) исключены члены, содержащие $\nu_{\mathbf{k},\mathbf{k}',-\mathbf{k}'}$, $\nu_{\mathbf{k},-\mathbf{k}',\mathbf{k}'}$. Они имеют структуру типа ур. 63 и поэтому включены в квазилинейный инкремент.

Отметим, наконец, что если кроме ряда ур. 59 учесть еще дополнительные слагаемые в ур. 56, где некоторые из $\varphi(\mathbf{k},\omega)$ заменены на $\varphi^{(n)}(\mathbf{k},\omega)$, а также члены, где сопряженные пары $(\mathbf{k},\omega)$, $(-\mathbf{k}, -\omega)$ не стоят рядом, то (после усреднения по фазам) получится уравнение для медленно меняющейся функции распределения «фона», учитывающее взаимодействие волн. С точностью до членов четвертого порядка по $\varphi_{\mathbf{k}}$ это уравнение имеет вид (выписываем его, для простоты, для плазмы без магнитного поля)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\mathrm{e}}{m}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}\,\frac{8\pi^2}{k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}\,\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\delta(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \left(\frac{\mathrm{e}}{m}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathrm{d}n_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t}\,\frac{4\pi}{k^2\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}\,\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\mathrm{P}\left[\frac{1}{(\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2}\right]\mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} - \mathrm{Im}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{k}''} n_{\mathbf{k}}\,n_{\mathbf{k}'}\,\frac{8\pi^2\mathrm{e}}{m\,k^2\,\mathbf{k}'^2\,\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})\,\varepsilon_{\mathbf{k}'}'(\omega_{\mathbf{k}'})} \times \left\{\frac{\delta(\mathbf{k},\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\,\mu_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}(\omega_{\mathbf{k}},-\omega_{\mathbf{k}'})}{\varepsilon_{\mathbf{k}''}(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})} \times \left[\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\xi_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''}(\mathbf{v}) + \mathbf{k}''\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\xi_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}(\mathbf{v})\right] + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\eta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\mathbf{v})\right\} \tag{65}$$

где

$$\xi_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''}(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{e}^2}{2m^2}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}'}+\omega_{\mathbf{k}''}-(\mathbf{k}'+\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{v}+i\delta} \times \left[\mathbf{k}'\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}''}-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{v}+i\delta}\,\mathbf{k}''\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{k}''\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}'}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}+i\delta}\,\mathbf{k}'\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right] f(\mathbf{v})$$

$$\omega_{-\mathbf{k}} = -\,\omega_{\mathbf{k}}$$

$$\eta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{e}^3}{2\,m^3}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i\delta}\,\mathbf{k}'\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}+(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{v}+i\delta}\left[\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\frac{1}{-\omega_{\mathbf{k}'}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}+i\delta} \times \mathbf{k}'\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{k}'\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\,\frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i\delta}\,\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right] f(\mathbf{v})$$

Выражения для ξ, η просто получаются после подстановки ур. 60 в соотвествующие скобки Пуассона; $\mathrm{d}n_{\mathbf{k}}/\mathrm{d}t$ во втором члене ур. 65 определяется кинетическим уравнением для волн (ур. 22). При получении этого члена учитывались (в первом приближении) мнимые части $\omega_{\mathbf{k}}$ в $\varphi^{(1)}$, определяемом формулой 15. При этом мы использовали соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-\omega-i\delta} - \frac{1}{z-\omega+i\delta}\right) = \delta(\omega-x) + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{P}\,\frac{y}{(\omega-x)^2} + 0(y^2) \quad z = x+iy$$

где P — символ главного значения.

В случае, когда $n_{\mathbf{k}}$ меняются не только во времени, но и в пространстве в $\mathrm{d}n_{\mathbf{k}}/\mathrm{d}t$ надо включить еще переносный член, равный $(\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\mathbf{k})\,(\mathrm{d}n_{\mathbf{k}}/\mathrm{d}\mathbf{x})$.

Отметим, наконец, что как было видно из содержания этого раздела, усреднение по хаотическому распределению фаз в начальный момент эквивалентно переходу к медленно меняющемуся времени. Это обстоятельство хорошо изучено в работах, посвященных обоснованию кинетической теории [*12*, *13*].

2Г ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим сначала случай, когда распадные условия (ур. 49) не выполняются и существенны только резонансы частиц с вынужденными колебаниями частот $|\omega_{\mathbf{k}}|-|\omega_{\mathbf{k}'}|$. В этом случае интеграл столкновений для волн имеет вид ур. 55. Поскольку его ядро антисимметрично по $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, то изменение полного числа частиц определяется уравнением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = 2\sum \gamma_{\mathbf{k}}\,n_{\mathbf{k}} \tag{66}$$

Если величинами $\gamma_{\mathbf{k}}$ можно пренебречь (это имеет место, например, в результате установления квазилинейного «плато» на функции распределения частиц в области резонанса с собственными колебаниями [*1*, *2*], то полное число квазичастиц будет сохраняться

$$\sum n_{\mathbf{k}} = \text{constant}$$

Из закона сохранения числа квазичастиц вытекают важные следствия. Пусть спектр колебаний таков, что их частоты мало изменяются с изменением $\mathbf{k}$. Это имеет место, например, для электронных ленгмюровских колебаний, для которых

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{oe}\,[1 + (3/2)\,(k\,r_{\mathcal{D}})^2]; \quad k\,r_{\mathcal{D}} \ll 1 \qquad (67)$$

$\mathbf{r}_{\mathcal{D}}$ — дебаевский электронный радиус. Вследствие закона сохранения числа квазичастиц, в этом случае полная энергия в первом неисчезающем приближении (с точностью до $(k\mathbf{r}_{\mathcal{D}}^2)$) будет сохраняться, т.е. нелинейное взаимодействие приводит в этом приближении лишь к перекачке энергии из одной части спектра в другую (для одномерного пакета это было ранее отмечено в работе *2*; для трехмерного — в работе *14*, *15*). Если при этом перекачка происходит от более коротких волн к более длинным, то в следующем приближении по $(k\mathbf{r}_{\mathcal{D}})^2$ нелинейное взаимодействие приводит к суммарному затуханию энергии волн (нелинейное затухание Ландау). Если же перекачка волн происходит в обратном направлении, то в следующем приближении имеет место суммарное возрастание энергии волн в пакете. Это однако вовсе не означает наличие нелинейной неустойчивости, ибо $\Sigma_{\mathbf{k}}\, n_{\mathbf{k}}\, \omega_{\mathbf{k}} = \text{const}$. Такой случай осуществляется, например, при наличии токов в плазме, т.е. при движении электронов относительно ионов со скоростью, превышающей некоторую кинетическую скорость.

Совершенно аналогичные следствия, вытекающие из закона сохранения квазичастиц, имеют место и для колебаний Драммонда-Розенблюта [*19*], возбуждающихся при прохождении тока вдоль магнитного поля в плазме с $T_e \approx T_i$, для которых частота колебаний весьма близка к ларморовской ионной частоте (T_e, T_i — температуры электронов и ионов соответственно).

В случае ионно-звуковых колебаний без магнитного поля дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = (T_e/m_i)\, k^2/[1 + (kr_{\mathcal{D}})^2]$$

(для простоты положено $T_i = 0$). Эффект перекачки здесь играет основную роль лишь когда частоты волн близки к ω_{0i}, т.е. $(k\mathbf{r}_{\mathcal{D}}) \gg 1$. В противном случае, вообще говоря, эффекты перекачки и суммарного изменения энергии имеют один и тот же порядок.

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma_k > 0$ для всех имеющихся волн. Из ур. 66 тогда следует, что $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, \Sigma_k n_k > 0$, т.е. одно только нелинейное затухание волн не может компенсировать их рост вследствие линейной неустойчивости и, следовательно, установление стационарного состояния в этом случае невозможно. Ошибочные выводы об установлении стационарного состояния в этом случае, сделанные в [*16*, *17*], связаны с тем, что из-за громоздкости исходных выражений и выкладок не была замечена антисимметрия ядра кинетического уравнения для волн. Необходимо, однако, заметить, что стационарное состояние может, в принципе, установиться, если для части волн в пакете $\gamma_{\mathbf{k}} < 0$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ и $\mathrm{S}\,\{n\}$ в ур. 48 являются несущественными, так что основную роль играет «распадное» взаимодействие волн. Из формулы 50, определяющей $\mathrm{R}\,\{n\}$, непосредственно вытекают следующие законы сохранения

$$\sum n_{\mathbf{k}}\, \omega_{\mathbf{k}} = \text{constant}; \qquad \sum n_{\mathbf{k}}\, \mathbf{k} = \text{constant} \qquad (68)$$

Первое из этих соотношений выражает закон сохранения энергии волн (напомним, что $n_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}$ — спектральная плотность энергии колебаний), второе уравнение, очевидно, представляет закон сохранения импульса. Заметим, что при сохранении энергии и импульса колебаний число квазичастиц $\Sigma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$, разумеется, может не сохраняться.

3 Эволюция спектра слабой турбулентности во времени из-за нелинейного взаимодействия волн

Из-за сложного вида интеграла столкновений в кинетическом уравнении для волн, большой интерес представляет исследование частных классов задач, допускающих аналитическое решение, позволяющее проследить эволюцию во времени турбулентного спектра колебаний. В этой главе будет рассмотрена одна из таких задач, а именно — задача о нелинейной эволюции спектра ленгмюровских электронных колебаний в плазме без магнитного поля. Как будет видно ниже, эта задача является интересной и по еще одной причине: в ряде случаев в нелинейной релаксации электронных колебаний главную роль играют ионы, что на первый взгляд могло бы показаться парадоксальным.

Поскольку распадные условия (ур. 49) для электронных ленгмюровских колебаний не выполняются, интеграл столкновений для волн состоит из одной только части $\mathrm{S}\,\{n\}$, которая описывает вынужденное рассеяние волн, причем вкладом от члена, описывающего резонансное взаимодействие частиц с вынужденными колебаниями частоты $\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'}$ ($\omega_{\mathbf{k}} > 0$, $\omega_{\mathbf{k}'} > 0$) можно пренебречь. Таким образом, в рассматриваемом случае ядро интеграла столкновений $\mathrm{S}\,\{n\}$ является антисимметрическим и определяется выражением 55, где

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)=1+\sum_{\mathrm{j}}\frac{\omega_{0\mathrm{j}}^2}{k^2}\int\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}+i\delta}\,\mathbf{k}\,\frac{\partial f_{\mathrm{j}}}{\partial\mathbf{v}}$$

$$\mu_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}(\omega,-\omega')=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{j}}\omega_{0\mathrm{j}}^2\,\frac{e_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{j}}}\int\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}}{\omega-\omega'-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{v}+i\delta}$$

$$\times\left\{\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}'\,\mathbf{k}}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}\,\mathbf{k}'}{\omega'-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}}\right\}\frac{\partial f_{\mathrm{j}}}{\partial\mathbf{v}}\tag{69}$$

$$\lambda_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}(\omega,-\omega')=\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{j}}\omega_{0\mathrm{j}}^2\,\frac{e_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{j}}}\int\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}\,(\partial f_{\mathrm{j}}/\partial\mathbf{v})}{\omega-\omega'-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{v}-i\delta}$$

$$\times\left\{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}'\,\mathbf{k}}{\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}}-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{k}\,\mathbf{k}'}{\omega'-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v}}\right\}\tag{70}$$

$$\mu_{\mathbf{k},\mathbf{k}',-\mathbf{k}'}(\omega,\omega',-\omega')=-\frac{1}{6}\sum_{\mathrm{j}}\left(\frac{e_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{j}}}\right)^2\omega_{0\mathrm{j}}^2$$

$$\times\int\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{v}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2\,(\partial f_{\mathrm{j}}/\partial\mathbf{v})}{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2(\omega'-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{v})^2[\omega-\omega'-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{v}+i\delta]}\tag{71}$$

Выражения 70п росто получаются, если подставить микроплотность заряда $\varrho(\mathbf{r},t)=e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-vt)$ в формулы для $\nu_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''}$, $\nu_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'',\mathbf{k}'''}$ ур. 25, 37, а последние в ур. 28, 36 и 38.

Кинетическое уравнение для волн должно быть дополнено уравнением для функции распределения частиц, которое имеет вид ур. 65. Поскольку ядро интеграла столкновений для волн является в рассматриваемом случае антисимметрическим, то при нелинейном взаимодействии волн число квазичастиц (плазмонов) не меняется, так что столкновения волн приводят лишь к перекачке плазмонов. При отсутствии пучков, токов и т.п., эта перекачка происходит от более коротких волн к длинным, так как энергия колебаний в целом не возрастает.

Если выполнить интегрирование в ур. 69—71 с учетом $kr_{\mathcal{D}}\ll 1$ ($r_{\mathcal{D}}$ — дебаевский радиус) и пренебречь вкладом от ионов (что, как будет показано ниже, верно лишь для достаточно широких волновых пакетов), то кинетическое уравнение для волн принимает вид (см. также работе *14*).

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t}=\frac{6\pi^{1/2}\omega_{0\mathrm{e}}^2}{(2\pi)^3 n\,T_{\mathrm{e}}}\,r_{\mathcal{D}}^3\,n_{\mathbf{k}}\int\mathrm{d}\mathbf{k}'\,n_{\mathbf{k}'}\,\frac{\mathbf{k}'^2-\mathbf{k}^2}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|\,\mathbf{k}^2\,\mathbf{k}'^2}$$

$$\times\left\{\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{k}'](\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2}+\frac{r_{\mathcal{D}}^2}{2}\,[\mathbf{k}\times\mathbf{k}']^4+9(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^4\right\}\tag{72}$$

где мы опустили линейный член $2\gamma_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}}$ (это можно сделать, если $\gamma_{\mathbf{k}}$ достаточно мало из-за квазилинейной релаксации функции распределения) и учли только два первых неисчезающих члена в разложении интеграла столкновений по степеням $kr_{\mathcal{D}}$.

Из ур. 72 следует, как это было отмечено ранее в работе *14*, что взаимодействие волн с параллельными и взаимно перпендикулярными волновыми векторами в первом неисчезающем по $kr_{\mathcal{D}}$ приближении отсутствует. Это, однако, верно лишь при условии пренебрежения влиянием ионов, которое, вообще говоря, почти всегда существенно [*15*].

В качестве примера рассмотрим изотропный (трехмерный) волновой пакет. Оказывается, что если ширина его Δk удовлетворяет условию

$$\Delta k\lesssim r_{\mathcal{D}}^{-1}\,(v_{\mathrm{Ti}}/kr_{\mathcal{D}}\,v_{\mathrm{Te}})^{2/3}\tag{73}$$

($v_{\mathrm{Ti,e}}$ — тепловые скорости ионов и электронов), то в ядре интеграла столкновений волн основную роль играют ионы. Ограничиваясь первым неисчезающим приближением по $kr_{\mathcal{D}}$, в этом случае получаем [*15*]

$$\frac{\mathrm{d}n_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega_{0\mathrm{e}}^2}{4\,(2\pi)^3 n\mathrm{T}}\,n_{\mathbf{k}}\int\mathrm{d}\mathbf{k}'\,n_{\mathbf{k}'}\,\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')^2}{\mathbf{k}^2\,\mathbf{k}'^2}\,\mathrm{Im}\left\{\left(1+\frac{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)\right.$$

$$\left.\times\left[1+\frac{T_{\mathrm{i}}}{T_{\mathrm{e}}}-\mathrm{i}\pi^{1/2}\,\frac{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|\,v_{\mathrm{Ti}}}\,W\!\left(\frac{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}}{|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|\,v_{\mathrm{Ti}}}\right)\right]^{-1}\right\}$$

$$W(z)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-t^2)}{z-t+\mathrm{i}\delta}\,\mathrm{d}t\tag{74}$$

Подинтегральное выражение в ур. 74 отлично от нуля при $|\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}|\lesssim|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|\,v_{\mathrm{Ti}}$, откуда следует

$$\delta k\equiv|\mathbf{k}|-|\mathbf{k}'|\lesssim(v_{\mathrm{Ti}}/v_{\mathrm{Te}})\,r_{\mathcal{D}}^{-1}\tag{75}$$

то-есть взаимодействуют между собой лишь волны с очень близкими значениями модуля волнового вектора: $|\mathbf{k}|-|\mathbf{k}'|\ll\Delta k$. В связи с этим подинтегральное выражение в ур. 74 можно разложить в ряд по степеням малой разности ($\mathbf{k}^2-\mathbf{k}'^2$), в результате чего интегро-дифференциальное ур. 74 сводится к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial\mathrm{N}_{\mathbf{k}}}{\partial\tau}-\mathrm{N}_{\mathbf{k}}\,\frac{\partial\mathrm{N}_{\mathbf{k}}}{\partial\chi}=-6\alpha^2\,\mathrm{N}_{\mathbf{k}}^2\tag{76}$$

где

$$\mathrm{N}_{\mathbf{k}}=\frac{4\pi\,k^3\,\omega_{0\mathrm{e}}}{3n\,T_{\mathrm{e}}}\,n_{\mathbf{k}};\qquad\tau=\frac{\pi\,m_{\mathrm{e}}\,\omega_{0\mathrm{e}}}{9\alpha^2\,m_{\mathrm{i}}}\left(\frac{T_{\mathrm{e}}\,T_{\mathrm{i}}}{T_{\mathrm{e}}+T_{\mathrm{i}}}\right)^2 t$$

$$\alpha=(k\Delta k)^{1/2}\,r_{\mathcal{D}};\qquad\chi=\frac{k^2}{k_0\Delta k}$$

Δk — характерная ширина пакета, k_0 — среднее волновое число пакета волн.

Сравнивая ур. 76 с ур. 72, получаем оценку ур. 73. Решение ур. 76 имеет вид

$$\mathrm{N}_{\mathbf{k}}=\mathrm{e}^{\beta\chi}\,\mathrm{F}\,\{\beta^{-1}[1-\mathrm{e}^{-\beta\chi}(1-\tau\,\beta\,\mathrm{N}_{\mathbf{k}})]\}$$

$$\beta=6\alpha^2\tag{77}$$

где $\mathrm{F}\,(\chi)$ — распределение энергии в пакете в начальный момент времени. Отсюда следует, что основным эффектом временной эволюции пакета является его сужение, см. рис. 1. Однако, само ур. 76 справедливо лишь при условии, что разброс фазовых скоростей в пакете волн значительно больше теплового разброса скоростей ионов, что имеет место при

$$\Delta k/k\gg m_{\mathrm{e}}/m_{\mathrm{i}})^{1/2}$$

Как только пакет стал достаточно узким, мы не можем представить его эволюцию аналитическим образом. Однако физическая картина попрежнему ясна. Пакет продолжает сужаться до тех пор, пока не скажется четырехплазменное взаимодействие. С помощью кинетического уравнения для функции распределения, ур. 65, легко показать, что время установления «плато» на функции распределения в области резонанса частиц с вынужденными колебаниями всегда значительно больше ур. 78. Время уширения пакета за счет четырехплазменного взаимодействия легко оценить, зная $\mu_{k', k''}$, $\mu_{k', k'', k'''}$. Отметим, что оценка для τ, вытекающая из вида интеграла столкновений для четырехплазменного взаимодействия, полученного в работе *18* имеет неправильный порядок величины. По порядку величины оно дается выражением:

$$\tau \approx \omega_{0e}^{-1} (\Delta k\, r_{\mathcal{D}})^2 (n\, T/W)^2 \tag{78}$$

где W — плотность энергии пакета волн. Сравнивая его характерным временем сужения, можно найти установившуюся квазистационарную ширину Δk

$$\Delta k\ r_{\mathcal{D}} \approx (\mathrm{W}/nT)^{1/3} (m_e/m_i)^{1/6} \text{ при } \mathrm{W}/nT \ll m_e/m_i \tag{79}$$

Установление узкого квазистационарного пакета происходит настолько быстро, что затухание (или нарастание при другом знаке $\mathrm{d}f/\mathrm{d}v|_v = \Delta\omega/\Delta k$) в течение процесса установления можно было не учитывать.

4 Установившийся спектр колебаний в слегка неустойчивой плазме и явления переноса

В предыдущем разделе была рассмотрена эволюция во времени на примере продольных электронных колебаний плазмы и было найдено, что в термодинамически равновесной плазме наряду с перераспределением энергии флюктуаций электрического поля по спектру колебаний наблюдается непрерывная диссипация ее до полного затухания флюктуации. Возможны, однако, ситуации, когда энергия колебаний поддерживается на определенном неравновесном уровне за счет развития неустойчивости. Определение спектра таких установившихся колебаний имеет большое значение при рассмотрении различных процессов переноса в неустойчивой плазме.

Полученные нами выше нелинейные уравнения для колебаний позволяют, в принципе, решить эту задачу в случае слабой неустойчивости плазмы, хотя конкретное осуществление этой программы весьма сложно.

В этой статье мы покажем, как это делается, на примере двух очень важных типов неустойчивости плазмы в магнитном поле. Это будет служить также полезной иллюстрацией того, какие допущения (иногда нестрогие) приходится принимать, чтобы получить ответ.

4А Нелинейная теория токовой неустойчивости Драммонда — Розенблюта [*19*]

В качестве первой иллюстрации мы обратимся сейчас к исследованию турбулентного спектра однородной плазмы, помещенной в сильное магнитное поле H_z, вдоль силовых линий которого течет электронный ток плотностью $j_z = n_0 e v_{\mathcal{D}}$.

Как показали Драммонд и Розенблют, такая плазма уже при небольших скоростях дрейфа $v_{\mathcal{D}} \ll v_{Te}$ неустойчива по отношению к возбуждению потенциальных колебаний с частотами $\omega_{\mathbf{k}}$ вблизи первого циклотронного резонанса ионов $\omega_{\mathbf{k}} \approx \Omega_{\mathrm{H}}$ и длинами волн порядка ларморовского радиуса ионов ($k^2 r_i^2 \sim 1{,}5$). Дисперсионное уравнение для частоты колебаний легко получить из общего уравнения приложения 2, удержав там лишь член с малым знаменателем $(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}}) \ll \Omega_{\mathrm{H}}$ и воспользовавшись условием малости затухания Ландау на ионах $(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}}) \gg k_z v_{Ti}$

$$\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}} \approx \frac{\Omega_{\mathrm{H}}\, \Gamma_1 (k\, r_i)}{1 + (T_i/T_e) - \Gamma_0(kr_i)} \tag{80}$$

Дисперсионное уравнение работы *19*, $\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}} = \Omega_{\mathrm{H}} \Gamma_1 T_i/T_e$, неправильно учитывает зависимость частоты от температуры при $T_i \ll T_e$. Эта ошибка повторена в работах *16*, *17*.

Как видно из этого выражения, спектр колебаний нераспадный. Это обстоятельство значительно упрощает вид столкновительного члена в кинетическом уравнении для волн и послужило причиной для выбора данной неустойчивости в качестве примера.

В своем рассмотрении мы ограничимся случаем, когда направленная скорость электронов $v_{\mathcal{D}}$ лишь немного превышает критическое значение $v_{\mathcal{D}}^*$, так что колебания с частотами вблизи высших гармоник циклотронной частоты ионов ($\omega \approx l\Omega_{\mathrm{H}}$, $l \geqslant 2$) затухают. Тогда в формулах для откликов $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$, приведенных в приложении, как и в линейном ур. 1, достаточно удержать лишь члены с малыми знаменателями $(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}})$. Подставляя полученный результат в ур. 22, записываем кинетическое уравнение для числа волн $n_{\mathbf{k}}$ в стационарном режиме ($\partial n_{\mathbf{k}}/\partial t \approx 0$) и $0 = (\nu_{\mathbf{k}} - \delta_{\mathbf{k}})\, n_{\mathbf{k}}$

$$- \sum_{\mathbf{k}'} \frac{n_{\mathbf{k}}\, n_{\mathbf{k}'}\, \Omega_{\mathrm{H}}^2}{n_0\, T_i} \operatorname{Sign} (\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}}) (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})\, \mathrm{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$$
$$\times \frac{\exp\left\{-\dfrac{(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'})^2}{2\,|k_z - k_z'|^2 v_{Ti}^2}\right\}}{(2\pi)^{1/2}\, |k_z - k_z'|\, v_{Ti}} \tag{81}$$

где

$$n_{\mathbf{k}} \approx \frac{n_0\, e^2\, \varphi_{\mathbf{k}}}{T_i\, |\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}}|} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)$$

число квантов колебаний с частотой $\omega_{\mathbf{k}}$ и волновым вектором $\mathbf{k}$.

$$\nu_{\mathbf{k}} = \pi \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}}}{1 + (T_i/T_e) - \Gamma_0} \frac{k_z}{|k_z|} \frac{\partial f_e}{\partial m\, v_z}\bigg|_{v_z = \omega_{\mathbf{k}}/k_z}$$

инкремент неустойчивости из-за резонансного взаимодействия с электронами,

$$\delta_{\mathbf{k}} = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}}}{1 + (T_i/T_e) - \Gamma_0} \frac{\omega_{\mathbf{k}}}{|k_z|\, v_{Ti}}$$
$$\times \Gamma_1 (k\, r_i) \exp - \frac{(\omega_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathrm{H}})^2}{2\, k_z^2\, v_{Ti}^2}$$

— декремент линейного затухания Ландау на ионах;

$$\mathrm{A}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = 2\pi\left(1+\frac{T_i}{T_e}\right)^{-2}\Biggl\{[\mathbf{k}\times\mathbf{k}']_z^2\, r_i^4\int\limits_0^\infty \exp(-S^2/2)\,\mathcal{J}_1^2(\alpha S)\,\mathcal{J}_1^2(\alpha' S)\,S\,\mathrm{d}S + \int\limits_0^\infty \exp(-S^2/2)\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_1(\alpha S)\,\mathcal{J}_1(\alpha' S)}{\mathrm{d}S}\right)^2\frac{\mathrm{d}S}{S}$$

$$+\frac{\Gamma_0(\alpha'')-\Gamma_1(\alpha)-\Gamma_1(\alpha')}{\Gamma_1(\alpha)\,\Gamma_1(\alpha')}$$

$$\times\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{k}']_z^2\, r_i^4\left|\int\limits_0^\infty \exp(-S^2/2)\,\mathcal{J}_1(\alpha S)\,\mathcal{J}_1(\alpha' S)\,\mathcal{J}_0(\alpha'' S)\,S\,\mathrm{d}S\right|^2+\left|\int\limits_0^\infty \exp(-S^2/2)\,\mathcal{J}_1(\alpha S)\,\mathcal{J}_1(\alpha' S)\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_0(\alpha'' S)}{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}S\right|^2}{\left|1-\frac{T_i\,T_e}{T_i+T_e}\,\Gamma_0(\alpha'')\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'})\,f_i(v_z)\,\mathrm{d}v_z}{\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}-(k_z-k_z')\,v_z+\mathrm{i}0}\right|^2}\Biggr\}$$

где

$$\alpha = k_\perp r_i,\ \mathbf{k}''=\mathbf{k}-\mathbf{k}',\ \Gamma_e(\alpha)=\mathrm{I}_e(\alpha^2)\exp-\alpha^2,$$
$$r_i = v_{Ti}\,\Omega_H^{-1},\ v_{Ti}=(T_i/M)^{1/2}$$

Нелинейный член в этом уравнении описывает взаимодействие колебаний с ионами плазмы. При вычислении вклада в него от вынужденных колебаний с амплитудой $\varphi_{\mathbf{k}''}^{(2)}=\mu_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'}^{(2)}\,\varphi_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}'}\,[k_{11}^2\,\varepsilon_{\mathbf{k}''}^{(1)}\,(\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}})]^{-1}$ мы пренебрегли членами порядка $\Gamma_1(\alpha)\lesssim 0{,}2\ll 1$ (эти члены представлены в формуле для $\mathrm{A}(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ последним слагаемым и наиболее существенны при $\alpha\ll 1$). Поскольку фазовая скорость раскачиваемых колебаний $(\omega_{\mathbf{k}}-\Omega_H)/k_z$ значительно больше тепловой скорости ионов v_{Ti}, то основным процессом взаимодействия волн с частицами является рассеяние волн ионами (см. пар. 2). Рассеяние колебаний происходит с «покраснением» частоты волн, то-есть энергия турбулентных пульсаций при рассеянии частично диссипируется в тепловое движение ионов. Доля же диссипируемой энергии мала по сравнению с полной энергией $\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}'}\ll\omega_{\mathbf{k}}$, так что передача энергии по спектру носит характер почти непрерывного «течения».

Поскольку в реальной задаче об устойчивости плазмы надтепловой уровень амплитуды имеют в первом приближении лишь колебания в неустойчивых областях спектра, где $\nu-\delta>0$, то наиболее интенсивный обмен энергии происходит между неустойчивыми модами. Однако, если принимать во внимание только нарастающие колебания, то мы увидим, что кинетическое уравнение для волн не имеет стационарных решений. Это происходит вследствие того, что нелинейные члены в нашем уравнении описывают рассеяние волн, которое хотя и диссипирует частично энергию пульсаций, но сохраняет число квантов колебаний. В результате общее число квантов $\sum\limits_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$ растет со временем из-за неустойчивости. Поэтому мы должны рассматривать также и колебания в затухающих областях спектра $(\nu-\delta<0)$, где возможен рост колебаний, если нелинейный инкремент $\nu^{\dagger}=(\mathrm{Stoss}\,\{n_{\mathbf{k}}\})/n_{\mathbf{k}}$ превышает декремент затухания. Кроме того отличная от нуля амплитуда затухающих колебаний может явиться следствием процессов рассеяния одних колебаний на других. Последний процесс начинает играть роль, если спектральная плотность энергии колебаний $n_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}$ на длинноволновом участке спектра становится большой.

В рассматриваемом нами стационарном случае ур. 81 имеет форму системы линейных уравнений, частные решения которой могут быть легко найдены. Пусть, например, имеются всего два колебания конечной амплитуды, одно из которых ω_1, $\mathbf{k}_1$ раскачивается в результате неустойчивости $\nu_1-\delta_1>0$, а другое имеет меньшую частоту $\omega_2<\omega_1$ и затухает $\nu_2-\delta_2<0$. Тогда процесс установления амплитуды колебаний можно представить себе следующим образом: сначала нарастает только амплитуда неустойчивого колебания ω_1, $\mathbf{k}_1$. Но как только его амплитуда $n_{\mathbf{k}1}$ превзойдет критическую величину, при которой поток энергии в низкочастотную моду в результате рассеяния на ионах сравнивается с диссипацией энергии в ней из-за линейного затухания, то начинает интенсивно нарастать ранее затухавшее колебание $n_{\mathbf{k}2}$. Это нарастание происходит до такого уровня, когда в результате нелинейных эффектов начнет гаситься неустойчивость высокочастотной моды. В стационарном режиме приход энергии в каждую моду уравновешивается оттоком энергии и из ур. 81 мы получаем

$$n_{\mathbf{k}2,1}\approx n_0 T_i\frac{(\nu_{1,2}-\delta_{1,2})\,(2\pi)^{1/2}\,|k_{z1}-k_{z2}|\,v_{Ti}}{(\omega_{1,2}-\omega_{2,1})\,\Omega_H^2\,\mathrm{A}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)\exp\left[\dfrac{-(\omega_2-\omega_1)^2}{2\,|k_{z1}-k_{z2}|^2\,v_{Ti}^2}\right]} \tag{82}$$

Отметим, что ур. 81 имеет бесчисленное множество решений, хотя бы потому, что существуют точные решения с двумя, тремя и так далее (любым конечным числом колебаний). (Общее решение для спектрального распределения числа волн n_k с конечным числом N при колебании представляется в виде суммы $n_{k\omega}=\sum\limits_{i=1}^{N} C_i\,\delta(k-k_i)\,\delta(\omega-\omega_i)$, коэффициенты которой C_i определяются из системы алгебраических ур. 81. Существенно при этом, что деление этого уравнения на n_k сводит его к системе линейных алгебраических уравнений, которой уже не удовлетворяют найденные выше решения.) Однако, такие решения с конечным числом волн сами неустойчивы, ибо любая появившаяся помимо них волна может, вообще говоря, нарастать. Это приводит к тому, что физически должно реализоваться состояние, в котором возбуждены все колебания в неустойчивой области. Мы ограничимся лишь очень грубой оценкой амплитуды пульсаций в таком режиме, сравнивая приход энергии в неустойчивую моду с нелинейным оттоком энергии из нее в затухающие области спектра. Для удобства вычислений перейдем от суммирования к интегрированию по волновым числам. Ввиду осевой симметрии задачи интегрирование по азимутальному углу проводится сразу. Для приближенной оценки интеграла по $k_\perp$ можно воспользоваться разложением подинтегрального выражения в ряд по разности частот $(\omega_k - \omega_{k'})$, что имеет смысл, так как взаимодействуют между собою лишь колебания с малой разностью частот $(\omega_k - \omega_{k'}) \lesssim (k_z - k_{z'})\, v_{Ti} \ll \omega$. В результате ур. 81 принимает вид

$$\nu_k - \delta_k = \left\{-2\pi \int \mathrm{d} k_z' |k_z - k_z'|^2\right\} \frac{\partial n_{k'} k' \mathrm{A}(k', k)}{\partial k'}\Bigg|_{\Gamma_1(k') = \Gamma_1(k)}$$

$$\times \frac{\Omega_H^2 \, v_{Ti}^2}{n_0 T_i \dfrac{\partial \omega}{\partial k_\perp} \left| \dfrac{\partial \omega}{\partial k_\perp} \right|} \tag{83}$$

Ясно, что к наиболее сильному ограничению амплитуды приводит взаимодействие с модой, имеющей большое k_z. Предполагая, что n_k меняется в фазовом пространстве (ω, k) быстрее, чем коэффициент $\mathrm{A}(k, k')$, записываем приближенно

$$\int \mathrm{d} k_z \, k_\perp \frac{\partial n_k}{\partial k_\perp} = -\frac{\nu_k - \delta_k}{\Omega_H^2} n_0 M \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_\perp}\right)^2 \frac{\operatorname{Sign} \dfrac{\partial \omega}{\partial k_\perp}}{2\pi k_{z\,max}^2 \, \mathrm{A}(k, k')}$$

Как видно из этого выражения, в области максимальной частоты $\omega_k - \Omega_H = \Omega_H \Gamma_1 (k_\perp r_i)\, T_e/(T_i + T_e)$ при $k_\perp^2 r_i^2 \sim 1{,}5$ амплитуда флюктуаций электрического поля минимальна [*16*]. С увеличением длины волны $\lambda_\perp$ спектральная плотность энергии электрического поля $k_\perp^2 \varphi_k^2$ стремится к постоянному пределу, а в область коротких длин волн $\lambda_\perp$ спадает пропорционально четвертой степени отношения длины волны $\lambda_\perp$ к ларморовскому радиусу r_i. Наконец, для рассмотрения зависимости $n_k(k_z)$ выпишем явное выражение для инкремента неустойчивости в максвелловской плазме с током. Выбирая, как и в работе *19*, распределение электронов по скоростям v_z в виде

$$f_e(v_z) = (m/2\pi T_e)^{1/2} \exp\left[-m(v_z - v_D)^2/2T_e\right]$$

из ур. 2 получаем

$$\nu_k \approx \left(\frac{\pi}{z}\right)^{1/2} \frac{\omega_k - \Omega_H}{1 + T_i/T_e} \left(\frac{v_D}{v_{eT}} \frac{k_z}{|k_z|} - \frac{\omega_k}{|k_z| v_{Te}}\right)$$

Отсюда следует, что неустойчивость имеется лишь при одинаковых знаках k_z и ω_k (при $v_{\mathcal{D}} > 0$) (в дальнейшем мы будем рассматривать лишь случай $\omega_k > 0$, $k_z > 0$). Причем со стороны малых k_z спектр колебаний ограничивается неравенством $k_z \gtrsim \omega_k / v_{\mathcal{D}}$. С увеличением же k_z, как видно из ур. 2, неустойчивость подавляется за счет линейного затухания Ландау на ионах при значениях порядка $k_{z\max} \sim \omega_k / v_{Ti}$. Подставляя это значение в ур. 4, находим уровень энергии флюктуаций электрического поля

$$\sum_k \frac{e^2 \varphi_k^2}{T_i^2} \approx 10^{-2} \frac{v_D}{v T_e} \frac{T_i T_e}{(T_i + T_e)^2} \tag{84}$$

Описанные методы нахождения спектра колебаний слабонеустойчивой плазмы позволяют оценить различные коэффициенты переноса, в частности коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля из-за наличия колебаний. Мы оценим коэффициент диффузии, воспользовавшись квазилинейной теорией.

Ввиду амбиполярности диффузии нам достаточно рассмотреть только электроны, при описании которых мы ограничимся дрейфовым приближением. Кинетическое уравнение для функции распределения электронов в дрейфовом приближении имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} - c \frac{[\nabla \varphi \times \mathbf{H}]}{H^2} \boldsymbol{\Delta} f - \frac{e}{m} \boldsymbol{\Delta}_z \varphi \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0 \tag{85}$$

После обычной процедуры получаем усредненное уравнение для медленно-меняющейся части функции распределения (см., например работу *22*)

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \sum_k \left(\frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_k \omega_H} \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\times \mathcal{D}_k \left(\frac{1}{v_z} \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{\omega_k \omega_H} \frac{\partial}{\partial x}\right) f_0 - \nu_e v_{Te}^2 \frac{\partial^2 (f_0 - f_M)}{\partial v_z^2}$$

$$\mathcal{D}_k = \pi (e^2/m^2)\, \varphi_k^2 \, \omega_k^2 \, \delta(\omega_k - k_z v_z) \tag{86}$$

где в правую часть добавлен столкновительный член в τ-приближении (f_M — максвелловская функция распределения электронов по скоростям). Здесь же мы удержали члены с производными по координатам от медленно-меняющейся функции распределения f_0, так как именно они описывают диффузию плазмы в пространстве скоростей. Запись уравнения в такой форме позволяет нам рассмотреть ряд эффектов, общих как для однородной, так и для неоднородной плазмы.

Из ур. 86 следует, что при условии

$$\nu_e v_{Te}^2 \gg \pi e^2 k_z^2 \varphi_k^2 / m^2 \omega_k \tag{87}$$

столкновения частиц существенны и устанавливают максвелловское распределение по скоростям. В этом случае мы можем пользоваться выражениями для инкремента, вычисленными в предположении справедливости максвелловского распределения электронов по скоростям.

Интегрируя ур. 86 по скоростям мы получаем изменение плотности частиц в объеме со временем за счет возникновения макроскопических потоков плазмы поперек магнитного поля

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \pi \frac{\partial}{\partial x} \sum_k \frac{c^2 k_y^2 \varphi_k^2}{H^2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega_k - k_z v_z) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{k_z \omega_H}{k_y} \frac{\partial}{\partial v_z}\right)$$

$$\times f(v_z)\, \mathrm{d} v_z \tag{88}$$

Из этого выражения следует, что поток плазмы состоит из двух частей

$$\langle nv \rangle_x = j_{1x} - \mathcal{D}_\perp \partial n / \partial x$$

первая из которых j_{1x} совсем не связана с наличием в плазме градиентов плотности и представляет собой поток вещества, переносимый волнами (она исчезает, если спектр волн осесимметричен).

Подставляя сюда оценку для энергии колебаний ур. 84 и используя оценку для максимальной фазовой скорости $\omega/k_z \lesssim v_\mathcal{D}$, мы находим окончательно:

$$\mathcal{D} \approx 10^{-2} \left(\frac{v_\mathcal{D}}{v_{Te}}\right)^2 \frac{c\,T_i^2}{eH\,T_e} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right)^{-2}$$

$$\nu_c \gtrsim 10^{-2}\,\Omega_H \frac{v_{Te}}{v_\mathcal{D}} \frac{T_i^3}{T_e(T_i + T_e)^2} \tag{89}$$

Если условие ур. 87 нарушается, то редкие столкновения частиц не успевают максвеллизовать функцию распределения электронов, которая под действием возникших флюктуаций электрических полей релаксирует к более устойчивому состоянию.

Если столкновениями частиц вообще пренебречь, то неустойчивость самоподавляется прежде, чем происходит значительная диффузия частиц. В этом проще всего убедиться, если в ур. 86 заменить приближенно коэффициент $\mathcal{D}_k$ на средний по спектру $\mathcal{D}_{\langle k \rangle}$ и перейти к новым переменным

$$\eta = \frac{v_z^2}{2u}\,; \quad \xi = \frac{v_z^2}{2u} + \frac{\omega_k \omega_H}{k_y u} x$$

где u — скорость порядка скорости резонансных электронов (здесь $u \lesssim v_\mathcal{D}$). В результате ур. 86 принимает вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} u^{-2} \mathcal{D}_k(\xi, \eta, t) \frac{\partial f_0(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \tag{90}$$

Как следует из этого уравнения за времена порядка $\tau \approx v_\mathcal{D}^2/\mathcal{D}_k$ на функции распределения $f(\xi, \eta)$ устанавливается «плато» по переменной η во всем интервале резонансных частиц ($0 \lesssim \eta \lesssim v_\mathcal{D}$). При этом координата x и скорость v_z резонансных электронов связаны соотношением $\xi = \text{constant}$, так что при изменении скорости v_z на порядок величины $\delta v_z \approx v_z$ смещение резонансных частиц δx за время τ приближенно равно [20]

$$\delta x \approx \frac{\delta v_z}{v_z} \frac{k_y v_z^2}{\omega_k \omega_H} \approx r_i \left(\frac{v_\mathcal{D}}{v_{Te}}\right)^2 \frac{T_e}{T_i} \tag{91}$$

Нерезонансные частицы в этом приближении не испытывают никакого смещения.

Таким образом при полном отсутствии столкновений частиц неустойчивость быстро самоподавляется и поток плазмы поперек силовых линий отсутствует. Однако даже слабые столкновения электронов имеют тенденцию максвеллизовать распределение и мешают образованию плато. Поэтому инкремент неустойчивости отличен от нуля и мы найдем его, воспользовавшись теорией возмущений, по малому отношению частоты столкновений ν_c к эффективной частоте $\nu^* \approx k_z^2 \mathcal{D}_k/\omega^2 v_{Te}^2$ [21]. В первом приближении функция распределения удовлетворяет уравнению

$$\nu_k(f^{(0)}) = \pi \frac{\omega_k - \Omega_H}{|k_z|} \frac{T_i}{1 + T_i/T_e} \left(\frac{k_z}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_z} - \frac{c k_y}{eH} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} \right) \Bigg|_{v_z \simeq \omega_k/k_z} = 0 \tag{92}$$

Поправку $f^{(1)}$ к функции $f^{(0)}$ за счет влияния столкновений мы получим, если в стационарном режиме приравняем друг другу два члена в левой части ур. 86 и проинтегрируем от скоростей $v_z = \omega_k/k_z$ до таких ($v_z \gtrsim v_\mathcal{D}$), при которых максвелловское распределение справедливо

$$\mathcal{D}_v \left(\frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_y}{k_z \omega_H} \frac{\partial}{\partial x} \right) f^{(1)} \approx \nu_c v_{Te}^2 \frac{\partial}{\partial v_z} (f^{(0)} - f_M) \tag{93}$$

$$\mathcal{D}_v \approx \pi \frac{e^2 k_z^2 \varphi_k^2}{m^2 \omega_k}$$

Замечая далее, что в результате влияния колебаний изменяются лишь производные $\partial f/\partial v_z$, а не сама функция распределения, мы можем, следуя ур. 92, написать приближенное равенство

$$\partial f^0/\partial v_z = (k_y/k_z \omega_H)(\partial f_M/\partial x)$$

Используя это равенство, а также определение ур. 92, переписываем ур. 93 в более удобном виде

$$\nu(f^{(1)}) \approx \nu_c \nu(f_M)/\mathcal{D}_v v_{Te}^{-2}$$

$$\mathcal{D}_v v_{Te}^{-2} \approx \nu^* \gg \nu_c \tag{94}$$

Уравнение 92 фактически определяет нам полный инкремент неустойчивости с учетом влияния на устойчивость неоднородности плазмы. Такая общая запись разумна при очень малых частотах столкновений ν_c, когда поправка к инкременту $\nu(f^{(1)})$ за счет столкновений значительно меньше, чем вклад неоднородности плазмы (при этом распределение плазмы $f_0(x, v)$ релаксирует так, что менее неустойчивая мода $k_y/\nabla n/n < 0$ затухает, а более неустойчивая развивается с инкрементом (ур. 94)). Нас будет интересовать противоположный случай, когда неоднородность плазмы очень слабая. Тогда в стационарном ур. 86 с большой точностью можно опустить неоднородные члены и искать поправки к инкременту неустойчивости

$$\nu_1 = \pi \frac{\omega_K - \Omega_H}{|k_z|(1 + T_i/T_e)} \frac{k_z}{m} \frac{\partial f}{\partial v_z} \Bigg|_{v_z = \omega_k/k_z}$$

Для вычисления же потока частиц, вызванного градиентом плотности, нам следует совместно решить ур. 83, 94, 88. В результате вычислений получаем [16, 17]

$$\mathcal{D}_\perp \approx 10^{-1} \left(\frac{\nu_c}{\Omega_H}\right)^{1/2} \frac{c\,T_e}{eH} \left(\frac{v_\mathcal{D}}{v_{Te}}\right)^{5/2} \frac{T_e^{1/2} T_i^{1/2}}{T_i + T_e}$$

$$\nu_c \lesssim 10^{-2}\,\Omega_H (v_{Te}/v_\mathcal{D})\, T_i^3/T_e(T_i + T_e)^2 \tag{95}$$

Кроме последнего условия здесь требуется также, чтобы эффекты влияния на устойчивость неоднородности были малы, что имеет место при

$$\nu \approx (\nu_c \Omega_H)^{1/2} \left(\frac{v_\mathcal{D}}{v_{Te}}\right)^{3/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{1/2} \frac{T_e}{T_i + T_e} \gtrsim \Omega_H \frac{v_\mathcal{D}}{v_{Te}} \frac{r_i \nabla n}{n} \frac{T_e}{T_i + T_e}$$

4Б УНИВЕРСАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

В качестве второго примера слегка неустойчивой плазмы мы рассмотрим плазму, неравновесность которой заключается в ее неоднородности. Как линейная, так и нелинейная теория устойчивости неоднородной плазмы насчитывает сейчас большое число работ, многие из которых вошли в обзоры (см., например работу *22*). Поэтому мы коснемся здесь лишь некоторых специфических черт данной задачи, не вдаваясь в слишком детальный анализ.

Для простоты рассмотрения мы ограничимся лишь случаем отсутствия градиента температуры. Выберем функцию распределения частиц $f_{0j}(x, v)$ неоднородной плазмы, помещенной в сильное магнитное поле H_z в виде

$$f_{0j}(x, v) = \left(\frac{m_j}{2\pi T_j}\right)^{3/2} n_0\left(x + \frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right) \exp - \frac{m_j v^2}{2 T_j} \tag{96}$$

Такое распределение плазмы неустойчиво по отношению к возбуждению потенциальных дрейфовых волн с частотами вблизи гармоник ионной циклотронной частоты $\omega_k \approx l\,\Omega_H$, $l=0, 1, \dots$ и фазовыми скоростями $v_{Ti} < (\omega_k - l\Omega_H)/k_z \lesssim v_A$. Непотенциальные возмущения ($\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$), искажающие силовые линии магнитного поля, в отсутствии градиента температуры затухают.

Интересно отметить, что если мы в конечном итоге интересуемся процессами переноса частиц плазмы поперек удерживающего магнитного поля, то в наиболее интересном для проблемы управляемых термоядерных реакций случае высоких температур и очень редких столкновений нам нет необходимости определять уровень энергии развившихся колебаний.

Действительно, в слабонеоднородной плазме ($r_i \nabla n/n < (m/M)^{1/2}$ неустойчивости развиваются с малым инкрементом $\nu < \omega$, так что для учета их обратного влияния на диффузию плазмы можно воспользоваться квазилинейной теорией, обобщенной на неоднородную плазму. Применение ур. 88, 92 предыдущего раздела в пренебрежении редкими столкновениями частиц показывает, что в этом приближении диффузия плазмы отсутствует. Нахождение же потока плазмы поперек поля H_z во втором приближении по малому отношению частоты столкновений ν_e к обратному времени образования плато на функции распределения ν^*, приводит к тому, что амплитуда турбулентных пульсаций выпадает из оценки для потока плазмы в направлении градиента плотности [*20, 21*]

$$\langle nv \rangle_x - = \nu_e \frac{k_y^2 v_{Te}^4}{\omega_H^2 \omega_k^2} \left(\frac{\omega_k}{|k_z| v_{Te}}\right)^3 \left(\frac{\partial n_0}{\partial x} + \frac{m\,\omega_H}{k_y T_e}\omega_k n_0\right) \times \Gamma_0(kr)$$

$$\nu_e \lesssim \pi \sum_k \frac{e^2 k_z^2 \varphi_k^2}{m^2 \omega_k v_{Te}^2} \tag{97}$$

Пределы применимости этой формулы, естественно, зависят от уровня флюктуаций электрического поля $k_z \varphi_k$ в максвелловской плазме.

Для получения численного значения коэффициента диффузии сюда следует подставить частоты ω_k и длины волн $\lambda_\perp$, λ_z раскачиваемых колебаний.

Оставляя в дисперсионном уравнении для колебаний неоднородной плазмы (см. приложение) лишь члены с малыми знаменателями $(\omega_{kl} - l\Omega_H) \ll \omega_{kl}$, получаем выражения для частот ω_k и инкрементов ν_k, раскачиваемых колебаний

$$\omega_{kl} - l\,\Omega_H = \frac{l\,\Omega_H - k_y v_n^i \Gamma_l(kr_i)}{1 + (T_i/T_e) - \Gamma_e(k_\perp r_i) + k^2 d_i^2} \gg |k_z| v_{Ti}$$

$$\nu_{kl} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega_{kl} - l\Omega_H}{|k_z| v_{Te}} \frac{[(\omega_{kl} T_i/T_e) + k_y v_n^i]\,\Gamma_0(k_\perp r_e)}{1 + (T_i/T_e) - \Gamma_l(k_\perp r_i) + k^2 d_i^2} \times \exp - \frac{\omega_k^2}{2 k_z^2 v_{Te}^2} \tag{98}$$

где

$$v_n^i = \frac{c\,T_l}{e H n}\frac{\partial n}{\partial x};\quad d_i^2 = \frac{T_i}{4\pi e^2 n_0};\quad \Gamma_l(kr_i) = I_l(k^2 r_i^2)\exp{-k^2 r_i^2}$$

Везде в дальнейшем мы будем рассматривать лишь квазинейтральные возмущения с длиной волны значительно большей дебаевского радиуса $\lambda^2 \gg d_i^2$. Нарушение условия квазинейтральности при малых плотностях, как видно из этого выражения, ведет к подавлению неустойчивости.

Условие потенциальности возмущений $\omega_k/|k_z| v_{Te} \lesssim (m/M\beta)^{1/2}$ накладывает ограничение на максимальный инкремент для низкочастотных мод

$$\nu_{k0} \lesssim \frac{v_A}{v_{Te}} \left(\frac{T_i}{T_e}\omega_k + k_y v_n^i\right) \frac{T_e}{T_e + T_i - T_e \Gamma_0}$$

$$v_A = H_z (4\pi n M)^{-1/2} [T_e/(T_e + T_i)]^{1/2} \tag{99}$$

Для длинноволновых колебаний частота $\omega_k \approx k_y v_n^i T_e/T_i$, так что инкремент становится очень мал: $\nu \lesssim \omega k^2 r_i^2 v_A/v_{Te}$. С укорочением длины волны частота достигает насыщения $\omega \approx v_{Ti} \nabla n/n$, а инкремент ν растет пропорционально $k_\perp r_i$.

Возмущения с частотами ω_{kl} порядка ларморовской частоты ионов могут раскачиваться лишь при очень коротких длинах волн, меньших ларморовского радиуса электронов, и достаточно малом давлении плазмы

$$\beta \lesssim (1/2\pi)^{1/2} [T_e/(T_i + T_e)]\,(r_i/l)\,(\nabla n/n):\quad k r_i (r_i \nabla n/n) > l,\quad l = 1, 2, \dots \tag{100}$$

Инкременты неустойчивости слабо зависят от длины волны и даются выражением:

$$\nu_{kl} \approx \frac{r_i \nabla n/n}{l\,(m\,T_i/M\,T_e)^{1/2}} (\omega_{kl} - l\,\Omega_H),\quad T_i \sim T_e \tag{101}$$

Наконец, нам следует найти нижнюю границу для длины волны возбуждаемых колебаний. При очень малых длинах волн $\lambda_\perp$ колебания затухают вследствие попадания в резонанс с ионами, движущимися со скоростью диамагнитного дрейфа $v_{\mathcal{D}}=(v_\perp{}^2/2\,\Omega_\mathrm{H})\;(\nabla H/H)$.

Учитывая последний в дисперсионном уравнении для колебания, получаем кривую безразличного равновесия в плоскости (β, $k_\perp$)

$$S^2 J_l{}^2(\alpha S)\exp - S^2 \approx -\frac{\omega_{\mathrm{kl}}\,T_\mathrm{i}/T_\mathrm{e}+k_\mathrm{y}\,v_\mathrm{n}{}^\mathrm{i}}{\omega_{\mathrm{kl}}-k_\mathrm{y}\,v_\mathrm{n}{}^\mathrm{i}}$$

$$\times\;\frac{(\omega_{\mathrm{kl}}-l\,\Omega_\mathrm{H})\,\Gamma_0\,(k\,r_\mathrm{e})}{(2\pi)^{1/2}|k_\mathrm{z}|\,v_{\mathrm{Te}}}\exp\frac{-\omega_\mathrm{k}{}^2}{2\,k_\mathrm{z}{}^2\,v_{\mathrm{Te}}{}^2} \qquad (102)$$

где

$$S^2=-\frac{M\,(\omega_{\mathrm{kl}}-l\,\Omega_\mathrm{H})\,\Omega_\mathrm{H}}{k_\mathrm{y}\,T_\mathrm{i}\,\nabla H/H}\approx\beta^{-1}\,\Gamma_l\,(k\,r_\mathrm{i})\frac{T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{i}+T_\mathrm{e}\,(1+k^2 d_\mathrm{i}{}^2)}$$

$$\beta=4\pi\,n_0\,(T_\mathrm{i}+T_\mathrm{e})\,/\,H_\mathrm{z}{}^2;\qquad \alpha=k_\perp r_\mathrm{i}$$

Численно зависимость $k_\perp\,(\beta)$ протабулирована в работе *23* для случая «универсальной неустойчивости». Мы считаем здесь, что давление плазмы не очень близко к критическому $\beta^*\approx 0{,}13$, так что для коротких волн влиянием продольного движения ионов можно пренебречь.

Соотношения 97, 98, 102 в принципе решают задачу от турбулентной диффузии высокотемпературной плазмы. Поскольку основной вклад в ур. 97 дают низкочастотные возмущения, то подставляя в ур. 97 частоты $\omega_\mathrm{k}\approx v_{\mathrm{Ti}}\,\nabla n/n$ и длины волн $k_\mathrm{z}\approx\omega_\mathrm{k}/v_\mathrm{A}$, $k_\perp r_\mathrm{i}\approx\beta^{-1}\,(2\pi)^{-1/2}\,T_\mathrm{e}/(T_\mathrm{i}+T_\mathrm{e})$, находим

$$\mathcal{D}_\perp\approx\frac{1}{10}\,\nu_\mathrm{e}\left(\frac{n}{\nabla n}\right)^2\beta^{-2}\left(\frac{m}{M\beta}\right)^{3/2}\frac{T_\mathrm{e}{}^2}{T_\mathrm{i}{}^2}$$

$$\times\;\Gamma_0\!\left(\frac{m\,T_\mathrm{e}{}^2}{2\pi M\beta^2(T_\mathrm{i}+T_\mathrm{e})\,T_\mathrm{i}}\right) \qquad (103)$$

При нарушении условия ур. 87 турбулентная диффузия существенно зависит от уровня энергии колебаний в плазме.

Для рассмотрения нелинейного взаимодействия флюктуаций электрических полей мы воспользуемся ранее выведенными ур. 22, описывающими изменение во времени амплитуд отдельных мод колебаний. Поскольку мы в состоянии получить лишь разумные оценки, а не точные выражения для спектра турбулентности, то при написании этих уравнений мы воспользуемся рядом упрощающих предположений. Во-первых, мы будем считать, что в результате развития неустойчивости в плазме имеются только колебания с частотами, очень близкими к гармоникам циклотронной частоты ионов $\omega_{\mathrm{kl}}-l\Omega_\mathrm{H}\ll\Omega_\mathrm{H}$, так что в формулах для функции распределения (см. приложение 2) достаточно удержать лишь члены с малыми знаменателями ($\omega_{\mathrm{kl}}-l\Omega_\mathrm{H}$). Во-вторых, мы будем интересоваться лишь колебаниями с длиной волны $\lambda\lesssim r_\mathrm{i}(\omega_{\mathrm{k}0}/k_\mathrm{z}v_{\mathrm{Ti}})^{1/2}$, для которых основной вклад в диэлектрическую проницаемость $\varepsilon^{(1)}(\omega_\mathrm{k}-\omega_{\mathrm{k}'})$ дает интеграл по ионной функции распределения.

Кроме того мы пренебрежем тепловым разбросом ионов и будем считать справедливой аппроксимацию

$$\frac{\exp\left[-\dfrac{(\omega_\mathrm{k}-\omega_{\mathrm{k}'})^2}{2\,|k_\mathrm{z}-k_\mathrm{z}'|^2 v_{\mathrm{Ti}}{}^2}\right]}{(2\pi)^{1/2}|k_\mathrm{z}-k_\mathrm{z}'|\,v_{\mathrm{Ti}}}\approx\delta\,(\omega_\mathrm{k}-\omega_{\mathrm{k}'}) \qquad (104)$$

Наконец, нелинейное взаимодействие колебаний с электронами может сказаться лишь при очень малых длинах волн $\lambda_\perp\ll r_\mathrm{i}$, так что эти эффекты достаточно учесть в пределе $\lambda\ll r_\mathrm{i}$.

С учетом этих обстоятельств из ур. 22 с помощью формул приложения получаем кинетическое уравнение для числа волн n_{kl} с частотой $\omega_{\mathrm{kl}}\approx l\Omega_\mathrm{H}$ в системе координат, где отсутствует невозмущенное электрическое поле $E_{0\mathrm{x}}\approx 0$

$$\frac{\partial n_{\mathrm{kl}}}{\partial t}+\frac{\partial\omega_{\mathrm{kl}}}{\partial k_\mathrm{x}}\frac{\partial n_{\mathrm{kl}}}{\partial x}+\frac{\partial\omega_{\mathrm{kl}}}{\partial k_\mathrm{x}}\frac{\mathrm{d}k_\mathrm{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial n_{\mathrm{kl}}}{\partial k_\mathrm{x}}=(\nu_{\mathrm{kl}}-\delta_{\mathrm{kl}})\,n_{\mathrm{kl}}+2\pi\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}\left|\mathrm{V}_{\mathrm{kl},\,\mathrm{k'p},\,\mathrm{k''l-p}}\right|^2(n_{\mathrm{kp}}\,n_{\mathrm{k''l-p}}-n_{\mathrm{kl}}\,n_{\mathrm{k''l-p}}\,\mathrm{Sign}\,\omega_{\mathrm{k'p}}$$

$$-\,n_{\mathrm{kl}}\,n_{\mathrm{k'p}}\,\mathrm{Sign}\,\omega_{\mathrm{k''l-p}})\,\delta\,(\omega_{\mathrm{kl}}-\omega_{\mathrm{k'p}}-\omega_{\mathrm{k''l-p}})-\sum_{\mathbf{k}'}\frac{n_{\mathrm{kl}}\,n_{\mathrm{k'p}}\,\Omega_\mathrm{H}{}^2}{n_0\,T_\mathrm{i}}\,\mathrm{Sign}\,(\omega_{\mathrm{kl}}-l\,\Omega_\mathrm{H})\,[\omega_{\mathrm{kl}}-\omega_{\mathrm{k'p}}-(k_\mathrm{y}-k_\mathrm{y}')\,v_\mathrm{n}{}^\mathrm{i}]$$

$$\times\;\mathrm{A}_{\mathrm{l,p}}\,(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\delta\,[\omega_{\mathrm{kl}}-\omega_{\mathrm{k'p}}-(l-p)\,\Omega_\mathrm{H}]-\sum_{\mathbf{k}'}\frac{n_{\mathrm{kl}}\,n_{\mathrm{k'p}}\,\Omega_\mathrm{H}{}^2}{n_0\,T_\mathrm{i}}\mathrm{Sign}\,(\omega_{\mathrm{kl}}-l\,\Omega_\mathrm{H})\,[(\omega_{\mathrm{kl}}-\omega_{\mathrm{k'p}})\,(T_\mathrm{i}/T_\mathrm{e})+(k_\mathrm{y}-k_\mathrm{y}')\,v_\mathrm{n}{}^\mathrm{i}]$$

$$\times\;\mathrm{B}(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\frac{\exp\left[-\dfrac{(\omega_{\mathrm{kl}}-\omega_{\mathrm{k'p}})^2}{2\,|k_\mathrm{z}-k_\mathrm{z}'|^2 v_{\mathrm{Te}}{}^2}\right]}{(2\pi)^{1/2}\,|k_\mathrm{z}-k_\mathrm{z}'|\,v_{\mathrm{Te}}} \qquad (105)$$

где

$$n_{\mathrm{kl}}=\frac{n_0\,e^2\,\varphi_\mathrm{k}{}^2}{T_\mathrm{i}\,|\omega_{\mathrm{kl}}-l\,\Omega_\mathrm{H}|}[1+T_\mathrm{i}/T_\mathrm{e}-\Gamma_l\,(k\,r_\mathrm{i})+k^2\,d_\mathrm{i}{}^2]$$

ν_{kl} — инкремент неустойчивости из-за резонансного взаимодействия волны с электронами (ур. 98);

$$\delta_{\mathrm{kl}}=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{(\omega_{\mathrm{kl}}-l\,\Omega_\mathrm{H})\,(\omega_{\mathrm{kl}}-k_\mathrm{y}\,v_\mathrm{n}{}^\mathrm{i})\,\Gamma_l\,(kr_\mathrm{i})}{|k_\mathrm{z}|\,v_{\mathrm{Ti}}\,[1+(T_\mathrm{i}/T_\mathrm{e})-\Gamma_l\,(kr_\mathrm{i})+k^2\,d_\mathrm{i}{}^2]}$$

$$\times\;\exp-\frac{(\omega_{\mathrm{kl}}-l\,\Omega_\mathrm{H})^2}{2\,k_\mathrm{z}{}^2\,v_{\mathrm{Ti}}{}^2}$$

— декремент затухания Ландау на ионах; и

$$A_{l,p}(\mathbf{k},\mathbf{k}') = 2\pi\,[1+(T_i/T_e)-\Gamma_l(\alpha)+k^2 d_i^2]^{-1}[1+(T_i/T_e)-\Gamma_p(\alpha')+k'^2 d_i^2]^{-1}$$

$$\times\Big\{[\mathbf{k}\times\mathbf{k}']_z^2\, r_i^4\Big(\int_0^\infty e^{-s^2/2}\mathcal{J}_l^2(\alpha S)\,\mathcal{J}_p^2(\alpha' S)\,S\,dS-\Gamma_{l-p}^{-1}(\alpha'')\Big|\int_0^\infty e^{-s^2/2}\mathcal{J}_l(\alpha S)\,\mathcal{J}_p(\alpha' S)\,\mathcal{J}_{l-p}(\alpha'' S)\,S\,dS\Big|^2\Big)$$

$$+\int_0^\infty e^{-s^2/2}\Big|l\,\mathcal{J}_l(\alpha S)\frac{d\mathcal{J}_p(\alpha' S)}{dS}+p\,\mathcal{J}_p(\alpha' S)\frac{d\mathcal{J}_l(\alpha S)}{\alpha S}\Big|^2\frac{dS}{S}$$

$$-\Gamma_{l-p}^{-1}(\alpha'')\;\Big|\int_0^\infty e^{-s^2/2}\Big(l\,\mathcal{J}_l(\alpha S)\frac{d\mathcal{J}_p(\alpha' S)}{dS}+p\,\mathcal{J}_p(\alpha' S)\frac{d\mathcal{J}_l(\alpha S)}{dS}\Big)\mathcal{J}_{l-p}(\alpha'' S)\,dS\Big|^2\Big\}\geqslant 0$$

$$B(\mathbf{k},\mathbf{k}') = [\mathbf{k}\times\mathbf{k}']_z^2\, r_i^4\,\frac{|\omega_{\mathbf{k}l}-l\,\Omega_H|\cdot|\omega_{\mathbf{k}'p}-p\,\Omega_H|}{\Big(\omega-k_z\dfrac{\omega_{\mathbf{k}l}-\omega_{\mathbf{k}'p}}{k_z-k_z'}\Big)^2}\int_0^\infty e^{-s^2/2}\mathcal{J}_0^2(k_\perp r_l S)\,\mathcal{J}_0^2(k_\perp r_l S)\,S\,dS$$

$$\times\Big[1-\frac{k_z}{|k_z-k_z'|}\exp\Big(-\frac{\omega_{\mathbf{k}l}^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}+\frac{(\omega_{\mathbf{k}l}-\omega_{\mathbf{k}'p})^2}{2(k_z-k_z')^2 v_{Te}^2}\Big)\Big]$$

$$V_{\mathbf{k}l,\mathbf{k}'p,\mathbf{k}''l-p}=\Big\{\frac{8\,|\omega_{\mathbf{k}l}-l\,\Omega_H|\,|\omega^{\mathbf{k}'p}-p\,\Omega_H|\,|\omega_{\mathbf{k}''l-p}-(l-p)\,\Omega_H|}{n_0 T_i[1+(T_i/T_e)\,\Gamma_l(\alpha)+k^2 d_i^2][1+(T_i/T_e)-\Gamma_p(\alpha')+k'^2 d_i^2][1+(T_i/T_e)-\Gamma_{l-p}(\alpha'')+k''^2 d_i^2]}\Big\}^{1/2}$$

$$\times\Big\{\Big([\mathbf{k}'\times\mathbf{k}]_z r_i^2\int_0^\infty e^{-S^2/2}\mathcal{J}_l(\alpha S)\,\mathcal{J}_p(\alpha' S)\,\mathcal{J}_{l-p}(\alpha'' S)\,S\,dS$$

$$+i\int_0^\infty e^{-S^2/2}\mathcal{J}_l(\alpha S)\Big[(l-p)\,\mathcal{J}_{l-p}(\alpha'' S)\frac{d\mathcal{J}_p(\alpha' S)}{dS}-p\,\mathcal{J}_p(\alpha' S)\frac{d\mathcal{J}_{l-p}(\alpha'' S)}{dS}\Big]dS\Big)$$

$$\times\big([1+(T_i/T_e)+k''^2 d_i^2]\,\Gamma_{l-p}^{-1}(\alpha'')-[1+(T_i/T_e)+k'^2 d_i^2]\,\Gamma_p^{-1}(\alpha')\big)\frac{\Omega_H}{\omega_{\mathbf{k}l}-l\,\Omega_H}$$

$$-i\int_0^\infty e^{-S^2/2}\mathcal{J}_l(\alpha S)\,\mathcal{J}_p(\alpha' S)\,\mathcal{J}_{l-p}(\alpha'' S)\,S\,dS\,[1+(T_i/T_e)+k''^2 d_i^2][1+(T_i/T_e)+k'^2 d_i^2]\,\Gamma_p^{-1}(\alpha')\Gamma_{l-p}^{-1}(\alpha'')$$

$$+i\,[1+(T_i/T_e)]^2+i\,(k'^2+k''^2]\,d_i^2\Big\}$$

Второй член в этом уравнении описывает процессы распада одного колебания на два других и обратный процесс слияния двух различных колебаний в одно. Представление «дрейфовых» колебаний в виде когерентного набора $n_{\mathbf{k}l}$ квантов отдельных колебаний с квазиэнергией $\omega_{\mathbf{k}l}$ и квазиимпульсом $\mathbf{k}$ позволяет записать интеграл столкновений из-за распадов «дрейфовых» колебаний в форме, аналогичной Stoss-члену в кинетическом уравнении для фононов в твердом теле.

Третий и четвертый члены возникают из-за взаимодействия волн и частиц в нелинейном по амплитудам волн приближении. Поскольку фазовая скорость «дрейфовых» волн значительно больше тепловой скорости ионов $\omega_{\mathbf{k}l}\, l\Omega_H/k_z \gg v_{Ti}$, то закон сохранения энергии допускает лишь процесс рассеяния колебаний ионами:

$$(p-l)\,\Omega_H+\omega_{\mathbf{k}l}-\omega_{\mathbf{k}'p}=(k_z-k_z')\,v_z \qquad (106)$$

где $\omega_{\mathbf{k}l}$, $\omega_{\mathbf{k}'p}$ — энергия рассеиваемого и рассеянного колебаний, (k_z-k_z') — изменение импульса частицы $m_j v_z$ при рассеянии. При таком рассеянии энергия перекачивается из коротковолновых мод в длинноволновые. Для электронов же в ур. 106 может стоять знак «+», соответствующий испусканию (поглощению) сразу двух колебаний.

Рассмотрим сначала низкочастотные колебания ($\omega_{\mathbf{k}0}\ll\Omega_H$). Поскольку нелинейное взаимодействие с увеличением фазовой скорости $(\omega_{\mathbf{k}0}+\omega_{\mathbf{k}'0})/(k_z+k_z')>v_A$ уменьшается, то основной вклад в него дают резонансные электроны со скоростями порядка $\sim v_A$. Группа же резонансных электронов составляет лишь малую часть порядка $\sim v_A/v_{Te}$ от их общего числа и поэтому нелинейные члены содержат такую же малость, что и линейные члены, приводящие к неустойчивости

$$\nu_{\mathbf{k}0}/(\omega_{\mathbf{k}0}+k_y v_n^i)\approx v_A/v_{Te}\ll 1$$

Благодаря последнему обстоятельству, временную эволюцию волновых пакетов с длинами волн колебаний короче $\lambda\lesssim r_i(v_A/v_{Te})^{1/2}$ уже нельзя описывать с помощью полученных уравнений, хотя неустойчивость в силу $\nu_{\mathbf{k}0}\ll\omega_{\mathbf{k}0}$ можно считать слабой. Это становится очевидным, если учесть, что с уменьшением длины волны коэффициенты $A(\mathbf{k},\mathbf{k}')$, $B(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ в ур. 105 растут соответственно пропорционально второй и четвертой степени отношения ларморовского радиуса r_i к длине волны λ; $A(\mathbf{k},\mathbf{k}')\propto kk'r_i^2$, $B(\mathbf{k},\mathbf{k}')\propto k^2k'^2r_i^4$. Поэтому при $k^2r_i^2>v_{Te}/v_A$ по мере роста амплитуды в первую очередь начинают сказываться нелинейные эффекты, связанные с тепловым движением электронов. Причем это происходит при таких амплитудах, что становится существенным не только поправка к энергии взаимодействия, квадратичная по энергиям волн, но и все остальные члены разложения энергии взаимодействия волн по их амплитудам, и мы встаем перед необходимостью суммирования бесконечных рядов.

Такая трудность не возникает при рассмотрении взаимодействия более длинных волн $r_i > \lambda_\perp \gtrsim r_i(v_A/v_{Te})^{1/2}$, для которых основную роль играет нелинейная перекачка энергии в более длинноволновые пульсации за счет рассеяния на ионах. Сравнивая в кинетическом ур. 105 линейную накачку колебаний с нелинейным оттоком, находим, что энергия таких мод не может превышать величину. В работах *20*, *24* в кинетическом уравнении для волн опущено нелинейное взаимодействие с электронами, а также та часть взаимодействия с ионами, которая у нас описывается $\mu_{\mathbf{k}',\mathbf{k},-\mathbf{k}'}$ и играет основную роль при $kr_i \gg 1$. Поэтому оценки амплитуд коротковолновых пульсаций из ранее полученных формул оказываются завышенными.

$$\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}0}\,\omega_{\mathbf{k}0} \lesssim n_0\,T_i\,\frac{\nu_{\mathbf{k}0}}{\omega_{\mathbf{k}0}\,k_y\,v_n{}^i}\,\frac{\omega_{\mathbf{k}0}{}^2}{\Omega_H{}^2}\,A_{00}{}^{-1}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \tag{107}$$

Здесь уже нелинейный член порядка ~ 1 и поэтому энергия колебаний $n_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}$ содержит малость $\nu_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}}$. Ясно, что следующие члены разложения энергии взаимодействия по амплитудам отдельных волн содержат эту малость во все возрастающей степени $(\nu_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}})^n$, так что разложение справедливо.

Поскольку в настоящее время не существует регулярных методов рассмотрения сильной неустойчивости, то мы ограничимся случаем не очень коротких волн $\lambda \gtrsim r_i(v_A/v_{Te})^{1/2}$, когда применимы все развитые выше методы.

Как следует из оценки ур. 107, приход энергии из коротковолновых мод $\lambda < r_i$ в длинноволновые $\lambda > r_i$ вследствие рассеяния на ионах не превышает линейного роста неустойчивости относительно длинноволновых пульсаций $\lambda \lesssim r_i$. Сравнивая последний с нелинейной откачкой энергии из-за распадных процессов, получаем оценку спектральной плотности энергии в длинноволновых колебаниях [*20*, *22*, *24*]

$$\sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}0}\,\omega_{\mathbf{k}0} \approx \frac{1}{10}\;\frac{\nu_{\mathbf{k}0}}{\omega_{\mathbf{k}0}\,k^2\,r_j{}^2}\left(\lambda\!\!\!^{-}_x\,\frac{\Delta n}{n}\right)^2 n_0\,T_j\,\frac{T_e}{T_j+T_e} \tag{108}$$

где $\lambda\!\!\!^{-}_x = k_x^{-1}$ — длина волны «дрейфовых волн», которая как и все пространственное поведение флюктуаций потенциала электрических полей $\varphi(x)$ описывается, вообще говоря, интегро-дифференциальным уравнением, соответствующим в WKB-приближении дисперсионному ур. 98. Естественно, что к эффективной турбулентной диффузии могут привести лишь колебания, охватывающие весь объем плазмы. Длина волны λ_x колебаний с такой широкой областью возможного движения $x \approx n/\nabla n$ одного порядка с величиной ларморовского радиуса ионов $\lambda_x \sim r_i$. Воспользовавшись далее оценкой максимального инкремента (ур. 99), определяем коэффициент диффузии на таких пульсациях [*20*, *22*, *24*]

$$\mathcal{D} \approx \frac{m}{M\beta}\,\frac{r_i\nabla n}{n}\,\frac{c\,T_i}{eH}\,\frac{T_e}{T_i+T_e}$$

$$\nu_e \gtrsim \Omega_H\left(\frac{r_i\nabla n}{n}\right)^3\left(\frac{M\beta}{m}\right)^{1/2}\frac{T_i{}^2\,T_e}{(T_e+T_i)^3} = \nu^{(0)\,*} \tag{109}$$

Если обратиться теперь к рассмотрению низкочастотных дрейфовых колебаний с более короткими длинами волн $r_i > \lambda \gtrsim r_i(v_A/v_{Te})^{1/2}$, то, принимая во внимание высокий уровень амплитуды длинноволновых колебаний (ур. 108), мы замечаем, что они затухают в нелинейном режиме из-за сильного рассеяния на ионах и не дают вклада в диффузию.

Оценки ур. 109 вполне достаточно в плазме не очень низкого давления $0{,}13 \lesssim \beta \lesssim 10^{-2}$, когда в результате неустойчивости имеются лишь колебания с длиной волны $\lambda \gtrsim r_i(v_A/v_{Te})^{1/2}$.

В более редкой плазме завышенные оценки амплитуды коротковолновых пульсаций по сильной связи [*21*] показывают, что коэффициент диффузии численно может измениться по сравнению с ур. 109 максимум в 5 раз. Буквенные зависимости изменяются также незначительно.

Добавим несколько слов об оценке влияния на диффузию высокочастотных «дрейфовых» волн ($\omega_{\mathbf{k}} \approx \Omega_H$). Они развиваются с малыми инкрементами $\nu_{\mathbf{k}l} \ll (\omega_{\mathbf{k}l} - l\Omega_H)$ и прекрасно описываются кинетическим ур. 105, в котором основную роль играют нелинейные эффекты, описывающие рассеяние волн ионами. В максвелловской плазме, когда уровень длинноволновых турбулентных пульсаций определяется формулой 108, высокочастотные колебания подавляются в нелинейном режиме.

При уменьшении частоты столкновений частиц ν_e ниже «квазилинейной» $\nu^{(0)*}$ для пульсаций с длинами волн $\lambda \approx r_i$ мы еще не переходим в режим диффузии высокотемпературной плазмы. Это происходит вследствие того, что образование плато на функции распределения электронов приводит к подавлению длинноволновых колебаний, но тогда согласно ур. 105 возникает возможность развития более коротких волн. Пусть k_0 — волновое число, ниже которого линейный инкремент неустойчивости падает из-за обратного влияния колебаний на «фон» (мы определим его далее при заданной частоте согласно очевидной формуле $\nu_e \approx \nu^{(0)*}\, n_{\mathbf{k}}(k_0)/n_{\mathbf{k}}(r_i^{-1})$). Тогда для колебаний более коротких, чем мода ($\omega_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k}_0$), функцию распределения f_{0j} можно считать максвелловской и как прежде они будут подавлены из-за сильного рассеяния на ионах. Амплитуда более длинноволновых колебаний растет до такой величины, когда начнет подавляться служащая источником энергии мода ($\omega_{\mathbf{k}0}$, $\mathbf{k}_0$). При этом возможно дать лишь оценку сверху для суммарной «энергии» всех длинноволновых пульсаций

$$\sum_{k} n_{\mathbf{k}0}\,\omega_{\mathbf{k}0}\,\frac{k}{k_0} \lesssim n_0\,T_i\,\frac{\nu_{\mathbf{k}0}(\mathbf{k}_0)}{\omega_{\mathbf{k}0}(\mathbf{k}_0)}\left(\frac{r_i\nabla n}{n}\right)\frac{1}{k_0{}^3\,r_i{}^4}\,\frac{T_e}{T_i+T_e} \tag{110}$$

Амплитуда неустойчивого коротковолнового колебания устанавливается в соответствии с возможным темпом диссипации энергии колебаний в затухающих областях спектра и уменьшения числа квантов за счет распадных процессов.

Однако уровень амплитуды затухающих колебаний сам зависит от величины $n(\mathbf{k}_0)$ и задача определения амплитуды $n(\mathbf{k}_0)$ затрудняется. Можно в соответствии с ур. 110 считать, что

$$n(\mathbf{k}_0)\,\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_0) \lesssim n_0\, T_{\mathrm{i}}\, \frac{\nu_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_0)}{\omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_0)} \left(\frac{r_{\mathrm{i}}\nabla n}{n}\right) \frac{1}{k_0{}^3 r_{\mathrm{i}}{}^3} \frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{i}}+T_{\mathrm{e}}}$$

Отсюда непосредственно получаем оценку сверху для коэффициента диффузии

$$\mathcal{D}_\perp \lesssim \frac{m}{M\beta} \frac{r_{\mathrm{i}}\nabla n}{n} \frac{c\,T_{\mathrm{i}}}{eH} \frac{T_{\mathrm{e}}}{T_{\mathrm{i}}+T_{\mathrm{e}}}$$

$$\nu_{\mathrm{e}} \gtrsim 8\pi\,\beta^2 \Omega_{\mathrm{H}} \left(\frac{r_{\mathrm{i}}\nabla n}{n}\right)^3 \left(\frac{M\beta}{m}\right)^{1/2} \frac{T_{\mathrm{j}}{}^2}{(T_{\mathrm{i}}+T_{\mathrm{e}})\,T_{\mathrm{e}}}$$

Если давление плазмы $\beta \lesssim 10^{-2}$, то при постепенном уменьшении частоты мы доходим до колебаний с длиной волны короче $r_{\mathrm{i}}\,(m/M\beta)^{1/4}$. Амплитуду их мы не можем определить в приближении «слабой связи». Поэтому можно лишь утверждать, что результат, ур. 109, справедлив по крайней мере до частот столкновений

$$\nu_{\mathrm{e}} \gtrsim \Omega_{\mathrm{H}} \left(\frac{r_{\mathrm{i}}\nabla n}{n}\right)^3 \frac{T_{\mathrm{i}}{}^2\, T_{\mathrm{e}}}{(T_{\mathrm{i}}+T_{\mathrm{e}})^3} \qquad (111)$$

При меньшей частоте мы непосредственно можем находить коэффициент диффузии по формуле 103.

Приложение

Найдем необходимые для построения турбулентной кинетики плазмы разложения быстроосциллирующей части функции распределения по амплитудам флюктуирующих электрических полей $\delta\mathbf{E}$. Для этого перенесем нелинейные члены в кинетическом уравнении Больцмана для отдельной компоненты Фурье функции распределения $f_{\mathbf{k}\omega}{}^{\mathrm{j}}$ в правую часть и проинтегрируем уравнение по траекториям частиц [25]

$$f_{\mathbf{k}\,\omega}{}^{\mathrm{j}}(\mathbf{r},\mathbf{v},t) = -\frac{e_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{j}}} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{t} \delta\mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} \frac{\partial f_{\mathbf{k}''\omega''}{}^{\mathrm{j}}}{\partial\mathbf{v}}\, \mathrm{d}t' \qquad (112)$$

Здесь интеграл берется вдоль траекторий частиц, задаваемой уравнениями

$$x_{\mathrm{j}}(t') = -\frac{v_\perp}{\omega_{\mathrm{Hj}}} \{\sin[\theta_{\mathrm{j}}(t) - \omega_{\mathrm{Hj}}(t'-t)] - \sin\theta_{\mathrm{j}}(t)\} + x_{\mathrm{j}}(t)$$

$$v_{\mathrm{yj}}(t) = v_\perp \sin[\theta_{\mathrm{j}}(t) - \omega_{\mathrm{Hj}}(t'-t)]$$

$$\omega_{\mathrm{Hj}} = eH/m_{\mathrm{j}}c \qquad (113)$$

где $\theta_{\mathrm{j}}(t) = \theta_{\mathrm{j}0} - \omega_{\mathrm{Hj}} t$ — фаза вращения частиц вокруг силовой линии, магнитное поле направлено по оси z.

Соотношение 112 может быть непосредственно использовано для нахождения разложения функции распределения в ряд по степеням малых амплитуд $\delta\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ методом последовательных итераций, если в правую часть 112 подставлять уже найденные приближения.

Задачу будем решать для общего случая неоднородной плазмы, когда плотность частиц меняется с координатой x. Функция распределения частиц в невозмущенной плазме зависит только от интегралов движения частиц и может быть выбрана в виде:

$$f_{0\mathrm{j}}(x,v) = n_0(X) \left(\frac{m_{\mathrm{j}}}{2\pi T_{\mathrm{j}}}\right)^{3/2} \exp - \frac{m_{\mathrm{j}} v^2}{2T_{\mathrm{j}}}$$

$$X = x + \frac{v_{\mathrm{y}}}{\omega_{\mathrm{Hi}}} \qquad (114)$$

Мы будем рассматривать только те случаи, когда при описании флюктуации электрических полей в плазме можно воспользоваться WKB-приближением и разложить электрические поля в ряд Фурье

$$\delta\mathbf{E} = -\mathrm{i} \sum_{\mathbf{k},\,\omega} \mathbf{k}\,\varphi_{\mathbf{k}\omega} \exp(-\mathrm{i}\,\omega t + \mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \qquad (115)$$

где $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ — Фурье — преобразование скалярного потенциала.

Подставляя ур. 114 и ур. 115 в ур. 112, получаем поправку к функции распределения ур. 114 в линейном приближении

$$f_{\mathbf{k}\omega}{}^{\mathrm{j}} = \frac{e_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{j}}} \int_{-\infty}^{t} \left\{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\perp \frac{m_{\mathrm{j}}}{T_{\mathrm{j}}} - \mathrm{i}\,k_z v_z \frac{m_{\mathrm{j}}}{T_{\mathrm{j}}} + \mathrm{i}\,\frac{k_{\mathrm{y}}}{\omega_{\mathrm{Hj}}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\}$$

$$\times f_{0\mathrm{j}}(x,v)\,\varphi_{\mathbf{k}\omega}\,\mathrm{d}t' \qquad (116)$$

Интегрирование по времени здесь легко проводится, если принять во внимание соотношение

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp(t') = -\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t')]_z}{\omega_{\mathrm{Hj}}} + \frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{\mathrm{Hj}}} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp(t)$$

$$\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_\perp(t) \exp -\mathrm{i}\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{\mathrm{Hj}}} = \omega_{\mathrm{Hj}} \frac{\partial}{\partial\psi_{\mathbf{k}}} \exp -\mathrm{i}\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{\mathrm{Hj}}} \qquad (117)$$

$$\exp -\mathrm{i}\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{\mathrm{Hj}}} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{J}_l\!\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{\mathrm{Hj}}}\right) \exp -\mathrm{i}\,l\,[\theta_{\mathrm{j}}(t) + \pi/2 - \psi_{\mathbf{k}}]$$

$\mathcal{J}_l(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента. Используя их, из ур. 116 получаем

$$f_{\mathbf{k}\omega}{}^{\mathrm{j}} = \varphi_{\mathbf{k}}{}^{\omega} \sum_{l} \mathbf{F}_{\mathbf{k}\omega,\,l}{}^{\mathrm{j}}(x, v_\perp, v_z)\, f_{0\mathrm{j}}\, \mathcal{J}_l(\alpha_{\mathrm{j}} S)$$

$$\times \exp\left\{\mathrm{i}\,l(\theta + \pi/2 - \psi_{\mathbf{k}}) + \mathrm{i}\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{\mathrm{Hj}}}\right\}$$

$$F_{\mathbf{k}\omega,\,l}{}^{\mathrm{j}} f_{0\mathrm{j}} = \frac{e_{\mathrm{j}}}{T_{\mathrm{j}}} \frac{l\,\omega_{\mathrm{Hj}} - k_z v_z + k_{\mathrm{y}} \dfrac{T_{\mathrm{j}}}{m_{\mathrm{j}}\omega_{\mathrm{Hj}}} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\omega - k_z v_z + l\,\omega_{\mathrm{Hj}} + \mathrm{i}0} f_{0\mathrm{j}}$$

$\alpha_{\mathrm{j}} = k_\perp r_{\mathrm{j}}$; $S = v_\perp / v_{\mathrm{Tj}}$; $v_{\mathrm{Tj}} = (T_{\mathrm{j}}/m_{\mathrm{j}})^{1/2}$; $r_{\mathrm{j}} = v_{\mathrm{Tj}}/\omega_{\mathrm{Hj}}$

Поскольку возмущенная функция распределения уже зависит от фаз вращения частиц на орбитах θ_j, то по сравнению с ур. 116 у нас появляются члены нового типа, связанные с дифференцированием по θ_j: их интегрирование по времени проводится с использованием соотношения

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{i}\, k_\theta(t) \exp \frac{-\mathrm{i}\,[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{Hj}} \frac{\partial}{\partial\theta_j} \\
&= -\mathrm{i}\left[\mathbf{k}\times\frac{\mathbf{v}(t)}{v_\perp^2}\right]_z \exp\frac{-\mathrm{i}\,[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{Hj}}\frac{\partial}{\partial\theta_j} \\
&= \left(\frac{\partial}{v_\perp\,\partial v_\perp}\exp\frac{-\mathrm{i}\,[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{Hj}}\right)
\end{aligned}
$$

В результате функция распределения $f_{\mathbf{k},\omega'+\omega''}{}^j$ во втором приближении примет вид

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{k},\omega'+\omega''}{}^j &= \frac{e_j}{m_j}\sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}\;\sum_{l,p=-\infty}^{\infty}\varphi_{\mathbf{k}'\omega'}\,\varphi_{\mathbf{k}''\omega''}\Big\{\mathrm{i}\,\frac{[\mathbf{k}'\times\mathbf{k}'']_z}{\omega_{Hj}} \\
&+ \frac{\omega_{Hj}}{v_\perp^2}\left(p\alpha_j''\frac{\partial}{\partial\alpha_j''}-l\,\alpha_j'\frac{\partial}{\partial\alpha_j'}\right) \\
&- \left(p\,\frac{m_j\,\omega_{Hj}}{T_j}-k_z'\frac{\partial}{\partial v_z}+k_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\Big\} \\
&\times \frac{\mathcal{J}_l(\alpha_j''S_j)\,\mathcal{J}_p(\alpha_j'S_j)\exp[\mathrm{i}\,(l+p)\,(\theta_j+\pi/2)-\mathrm{i}\,l\,\psi_{\mathbf{k}''}-\mathrm{i}\,p\,\psi_{\mathbf{k}'}]}{\omega'+\omega''-(k_z'+k_z'')\,v_z+(l+p)\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0} \\
&\times F_{\mathbf{k}''\omega''l}\,f_{0j}\exp\mathrm{i}\,\frac{[\mathbf{k}\times\mathbf{v}(t)]_z}{\omega_{Hj}} \qquad (118)
\end{aligned}
$$

Здесь дифференцирование по скоростям $S = v_\perp/v_{Tj}$ в аргументах функций Бесселя заменено на дифференцирование по соответствующему волновому числу α_j, так что оставшиеся дифференцирования проводятся при $S = \mathrm{constant}$. Дальнейшая итерация кинетического уравнения из формулы 7 становится очевидной и мы ее опустим.

Мы выпишем только выражения для диэлектрической проницаемости с точностью до третьего порядка по амплитудам. Линейное приближение дает нам дисперсионное уравнение для потенциальных колебаний неоднородной плазмы:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{(1)}(\omega,\mathbf{k}) = 1+\sum_j\frac{4\pi e_j^2}{k^2\,T_j}\Big(n_0-\sum_l\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\omega_{\mathbf{k}}-k_y v_n{}^j)\,\Gamma_l(\alpha_j)}{\omega_{\mathbf{k}}-k_z v_z+l\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0} \\
\times f_{0j}(v_z)\,\mathrm{d}v_z\Big) = 0
\end{aligned}
$$

где $\Gamma_l(\alpha) = I_l(\alpha^2)\exp-\alpha^2$, I_l — функция Бесселя от мнимого аргумента; $v_n{}^j = (T_j/m_j\,\omega_{Hj}n)\partial n/\partial x$ — скорость дрейфа частиц сорта j из-за неоднородности плотности.

Симметризуя выражение ур. 118 по индексам (k', k'') получаем выражения для откликов $\mu^{(2)}$ во втором приближении

$$
\sum_j 4\pi e_j\int f_{\mathbf{k},\omega'+\omega''}{}^j(r,v)\,\mathrm{d}v = \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}\mu_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''}{}^{(2)}(\omega',\omega'')\,\varphi_{\mathbf{k}'\omega'}\,\varphi_{\mathbf{k}''\omega''}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{\mathbf{k}',\mathbf{k}''}(\omega',\omega'') &= -\sum_j\frac{4\pi e_j^3}{T_j^2}\,\omega_{Hj}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v_z\,f_{0j}(v_z)\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-S^2/2}S\,\mathrm{d}S \\
&\times\Big\{\Big[\mathrm{i}\,[\mathbf{k}'\times\mathbf{k}'']_z r_i^2\mathcal{J}_l(\alpha_j''S)\,\mathcal{J}_p(\alpha_j'S)-\Big(l\mathcal{J}_l(\alpha_j''S)\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_p(\alpha_j'S)}{S\,\mathrm{d}S} \\
&-p\,\mathcal{J}_p(\alpha_j'S)\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_l(\alpha_j''S)}{S\mathrm{d}S}\Big)\Big]\Big(\frac{\omega''-k_y''\,v_n{}^j}{\omega''-k_z''\,v_z+l\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0} \\
&-\frac{\omega'-k_y'\,v_n{}^j}{\omega'\,k_z'\,v_z+p\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0}\Big)\left(\frac{1}{\omega'+\omega''-(k_z'+k_z'')v_z+(l+p)\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0}\right) \\
&+\frac{1}{\omega_{Hj}}\left[1-\frac{\omega'-k_y'\,v_n{}^j}{\omega'-k_z'v_z+p\,\omega_{Hj}}\right]\left[1-\frac{\omega''-k_y'\,v_n{}^j}{\omega''-k_z''v_z+l\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0}\right] \\
&\times\mathcal{J}_l(\alpha_j''S)\mathcal{J}_p(\alpha_j'S)\Big\}\mathcal{J}_{l+p}(\alpha_j S)\exp[-\mathrm{i}l\,(\psi_{\mathbf{k}''}-\psi_{\mathbf{k}}) \\
&-\mathrm{i}\,p\,(\psi_{\mathbf{k}'}-\psi_{\mathbf{k}})]
\end{aligned}
$$

Совершенно аналогично в третьем приближении

$$
\begin{aligned}
\mu_{\mathbf{k}',\mathbf{k},-\mathbf{k}'}(\omega',\omega',-\omega') &= \sum_j\frac{4\pi e_j^4\,\omega_{Hj}^2}{T_j^3}\sum_{q,l,p,n=-\infty}\;\sum_{\mathbf{k}'} \\
&\times\int_0^{\infty}S\,\mathrm{d}S\exp(-S^2/2)\int_{-\infty}^{\infty}f_{0j}(v_z)\,\mathrm{d}v_z \\
&\times\Big\{[\mathbf{k}'\times\mathbf{k}'']_z r_i^2\,\mathcal{J}_q(\alpha_j S)\,\mathcal{J}_p(\alpha_j'S)+\Big[\mathrm{i}q\mathcal{J}_q(\alpha_j S)\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_p(\alpha_j'S)}{S\mathrm{d}S} \\
&+p\mathcal{J}_p(\alpha_j'S)\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_q(\alpha_j S)}{S\,\mathrm{d}S}\Big]\Big\}\Big\{[\mathbf{k}'\times\mathbf{k}'']_z\,r_j^2\,\mathcal{J}_l(\alpha_j S)\,\mathcal{J}_n(\alpha_j'S) \\
&-\mathrm{i}\left[[l\mathcal{J}_l(\alpha_j S)\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_n(\alpha_j'S)}{S\mathrm{d}S}+n\,\mathcal{J}_n(\alpha_j'S)\,\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_l(\alpha_j S)}{S\mathrm{d}S}\right]\Big\} \\
&\times\left(\frac{\omega-k_y\,v_n{}^j}{\omega-k_z v_z+l\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0}-\frac{\omega'-k_y'\,v_n{}^j}{\omega'-k_z'\,v_z+n\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0}\right) \\
&\times\left\{\frac{[\exp-\mathrm{i}\,(l-q)\,(\psi_{\mathbf{k}}-\psi_{\mathbf{k}'})]\,\delta_{q,p+l-n}}{[\omega-\omega'-(k_z-k_z')\,v_z+(l-n)\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0]\,[\omega-k_z v_z+q\,\omega_{Hj}+\mathrm{i}\,0]}\right\}
\end{aligned}
$$

Литература

1. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *Ядерный Синтез* **1** (1961) 82.
2. W. Drummond, D. Pines, *Nuclear Fusion*, 1962 Supplement, Part 3, 1049.
3. M. Camac, A. R. Kantrowitz, M. M. Litvak, R. M. Patrick, H. E. Petschek, *Nuclear Fusion*, 1962 Supplement, Part 2, 423.
4. А. А. Галеев, В. И. Карпман, *Ж. эксп. теор. Физ.* **44** (1963) 592.
5. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Ж. эксп. теор. Физ.* **43** (1962) 2234.
6. В. И. Карпман, Докл. Акад. Наук СССР **152** (1963) 587.
7. А. А. Веденов, Вопросы теории плазмы, Госатомиздат, Москва, **3** (1963)
8. С. В. Иорданский, А. Г. Куликовский *Ж. эксп. теор. Физ.* **46** (1964) 732.

9. В. П. Силин, *Ж. прикл. мех. техн. Физ.* **1** (1964) 31.
10. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман, *Ж. эксп. теор. Физ.* **47** (1964) 1552.
11. W. Bernard, H. B. Callen, *Rev. mod. Phys.* **31** (1959) 107.
12. L. van Hove, *Physica* **21** (1955) 517; **23** (1957) 441.
13. Lectures in Theoretical Physics, Vol. III, ed. Wesley E. Brittin, Interscience Publishers, New York (1963).
14. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, *Ж. эксп. теор. Физ.* **47** (1964) 200.
15. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев, Докл. Акад. Наук СССР **157** (1964) 1088.
16. В. И. Петвиашвили, *Ж. эксп. теор. Физ.* **45** (1963) 1467.
17. В. И. Карпман, *Ж. прикл. мех. техн. Физ.* **6** (1963) 34.
18. Г. Сурамлишвили, Докл. Акад. Наук СССР **153** (1963) 317.
19. W. Drummond, M. Rosenbluth, *Phys. Fluids* **5** (1962) 1507.
20. А. А. Галеев, Л. И. Рудаков, *Ж. эксп. теор. Физ.* **45** (1963) 647.
21. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, Докл. Акад. Наук СССР 150 (1963) 775.
22. А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, *Атом. Энергия* **15** (1963) 451.
23. А. Б. Михайловский, Л. В. Михайловская, *Ж. эксп. теор. Физ.* **45** (1963) 1566.
24. Б. Б. Кадомцев, *Ж. эксп. теор. Физ.* **45** (1963) 1230.
25. M. Rosenbluth, N. Krall, N. Rostoker, *Nuclear Fusion*, 1962 Supplement, Part 1, 143.

(Рукопись получена 17 июля 1964 г.)

N U C L E A R   F U S I O N

IAEA, Karntner Ring 11, Vienna I, Austria

ENGLISH TRANSLATION of the article in NUCLEAR FUSION 5 (1965) 20.

(The following English version is provided in text only, with blanks where symbols and equations appear in the original. Thus it is to be used beside the original from which the reader can get the missing elements.)

MULTIPARTICLE ASPECTS OF TURBULENT-PLASMA THEORY

A.A. Galeev, V.I. Karpman, R.Z. Sagdeev

Institute of Nuclear Physics

Siberian Section of the USSR Academy of Sciences

Novosibirsk, USSR

Abstract

This paper reviews work on a new approach to the theory of a weakly turbulent plasma. The essence of this approach is the concept of a turbulent plasma as an assembly of weakly interacting gaseous particles (ions, electrons) and quasi-particles (collective oscillations). Instability effects play the part of sources in the kinetic equations for the quasi-particles.

An application of this method, which constitutes a generalization of the quasi-linear theory, is given by the analysis of anomalous transfer effects resulting from various plasma instabilities.

1 Introduction

In this review an attempt is made to describe the behaviour of a plasma when such a large number of excited collective oscillations is present that a statistical approach is applicable. Reliable methods of describing such a plasma may be developed for those cases in which oscillations interact weakly among themselves and with the "background". In this case we may regard the collection of oscillations as a slightly non-ideal gas of waves-"quasi-particles" possessing "energy" ... and momentum .... . The exchange of energy between the quasi-particles and the background of averaged particle distribution, as well as that within the quasi-particle gas, may be considered by perturbation theory, by assuming the amplitudes of the oscillations to have random phase.

(cont'd)

At present there are various methods of constructing such perturbation theories. The most advanced are those methods where quantum field theory is applied to quantum statistical systems. In the case of plasma, however, where Boltzmann equations rather than a Hamiltonian are used as a basis, the interaction of weakly turbulent pulsations may be described more conveniently by asymptotic perturbation theory, as in quasi-linear theory [1, 2]. Here the isolation of quasi-particle waves is carried out automatically on the basis of classical kinetic equations for the particle distribution function in the plasma and of Maxwellian equations for the self-consistent field.

Since quasi-linear theory deals only with the interaction of waves with particles, it became necessary to generalize this theory for the case of the interaction of particles among themselves (some estimates of these effects have already been made by Drummond and Pines in the work quoted, as well as in ref. 3). These effects were systematically and simultaneously considered in two groups of works. In ref. 4 asymptotic perturbation theory applied to hydrodynamic oscillations is again used for this purpose (the conclusion of ref. 3 is improved on). The authors of ref. 5 used as their point of departure correlation chains, basing the discontinuity and coupling of equations for the latter on the weakness of the interaction, which is virtually equivalent to using perturbation theory. It should be noted that several other approaches to the problem have appeared recently [6-9], and analogous results have been obtained with them.

By the above-mentioned methods it is possible to examine a series of problems in the theory of weakly turbulent plasma, such as the relaxation of the epithermal fluctuation of plasma oscillations, the determination of a stationary spectrum of turbulent pulsations as a result of the development of a weak instability (of considerable interest for the study of various turbulence transfer processes), etc. What are the characteristic features of the determination of a turbulence spectrum in a slightly unstable plasma? The determination of the spectrum must include the study of three processes:

1. growth or damping of oscillations under the influence of the background;
2. energy redistribution of oscillations due to their mutual interaction;
3. reciprocal influence of newly-arising oscillations on the background.

For waves of very small amplitude the first process is studied in linear stability theory.

(cont'd)

As the excitation amplitude grows, processes 2 and 3 are taken into account. However, it is not always essential to consider the nonlinear interaction of oscillations. Indeed, under the influence of oscillations growing as a result of instability, the distribution of plasma particles often relaxes fairly rapidly into a distribution which no longer permits a buildup of the existing set of oscillations. (However, the re-formed distribution may well be unstable with respect to other types of oscillation). At the same time, if the oscillations have not grown to such amplitudes that the nonlinear interaction has become substantial, then the processes of energy redistribution between the various modes can be neglected. In a number of cases, however, nonlinear effects appear before relaxation by particle redistribution has taken place. The picture of turbulent movement can then be presented in the following way. In certain regions of phase space (......) there is an inflow of energy due to instability. (Almost everywhere in this paper we shall consider perturbations in the form of a set of oscillations ....). In other regions the oscillations are damped. It is clear that the energy cannot concentrate only in unstable regions of phase space, since for large amplitudes nonlinear interaction would produce an excessive outflow of energy across the spectrum (.......) into regions where oscillations either do not build up or are damped altogether. We obtain the order of magnitude of the amplitude of the steady-state oscillation with given (.........) in a quasi-stationary regime by comparing the inflow of energy into the given mode because of instability with the outflow into other modes because of nonlinear transfer across the spectrum. Knowing the amplitude of each mode of the pulsation turbulence spectrum we are then able, by so-called "quasi-linear" equations which take into account the reciprocal effect of the oscillations on the background, to follow the change in this background and to find all the transfer coefficients (such as electrical conductivity, particle diffusion, etc.).

2 Kinetic equations for weakly turbulent plasma

In this section (we follow ref. 10) are set out the general deductions and the investigation of the kinetic equation for waves and particles accurate to the second order in the oscillation energy. To avoid cumbersome generalizations and details we shall limit ourselves to an examination of potential oscillations (...............). As is shown in ref. 11, all results set out below are also valid for arbitrary non-potential oscillations.

(cont'd)

2A Kinetic equation for waves

The basic equations for potential oscillations are

(1)

The vector for polarization current density ... , taking into consideration the terms, non-linear in ..... , can be presented as

(2)

where .... is a functional of the nth order in the electrical field. In particular, ... is determined by electrical conductivity and has the form

As will be seen below, non-linear polarization currents have an analogous form. These currents can be expressed by making appropriate additions to the plasma particle distribution function. For this purpose we shall start with a kinetic equation for the particle distribution function, which can conveniently be written as

(3)

where .... is a plasma Hamiltonian when oscillations are not present; ...... is the part of the Hamiltonian describing the interaction of particles with the wave field

(4)

where .... is the intensity of the stationary magnetic field. We neglect collisions between particles, and therefore we shall omit the collision integral in eq. 3. The particle distribution functions are given the indices .... (.. - electrons, .. - ions). Henceforth, if no summation over ... is carried out we shall omit this index.

Turning to the Lagrangian variables .... corresponding to the motion of particles in the stationary magnetic field, we obtain instead of

(cont'd)

eq. 3

(5)

From this we find the nth order terms in the distribution function

(6)

where .... is the unperturbed distribution function. With the aid of eq. 6 it is possible to obtain the nth order polarization current ......

(7)

(... is the density of particles of the appropriate type). By use of the properties of Poisson brackets, the expression in the braces of eq. 7 can be converted to

(8)

Substituting eq. 8 into eq. 7 and turning to the Fourier representations of .... and .... we obtain

(9)

where

(10)

(11)

where the symbol ... denotes the sum over all possible permutations of the pairs (.......) .... Henceforth we shall call .... the nth order response.

(cont'd)

Turning in eq. 1 to the Fourier components, we obtain a dynamic equation for waves in which we shall now limit ourselves to the nonlinear terms up to the third order of .... inclusively

(12)

where ... and ... are determined by eq. 9, and ..... is the dielectric permeability of plasma for longitudinal oscillations

(13)

The retained terms (to ... inclusively) will give the basic contribution to the nonlinear interaction of waves. We shall solve eq. 12 by successive approximations, taking as a first approximation the solution of the linearized equation

(14)

If the dispersion equation .... has a real solution ... , then the solution of eq. 14 is .... Where absorption or instability is present, ... is complex. In this case the solution of eq. 14 may be presented as

(15)

where ... denotes the rule for the by-pass of the pole in the integration of eq. 15 over ... : in the first term in brackets the pole is passed from above, and in the second from below, irrespective of which sign precedes .... (It is convenient to consider ... as some function of ... which is non-vanishing only within a small range close to the point; at this point .... Integration of the expression 15 may be carried out with respect to the real axis). The solution of eq. 14, which is time-dependent, may be presented in the form .... which, when the rule for bypass of the pole is taken into account in .... , yields .... for all ... .

Using eq. 15 we obtain for the second and third approximations expressions of the form

(16)

(cont'd)

(17)

We now turn to the statistical description of the assembly of waves, assuming their phases to be random. We shall calculate ...., limiting ourselves to terms of the fourth order of ... . $\langle\rangle$ denotes averaging over the phases of the initial amplitudes ... which appear in the first approximation, eq. 15. Presenting ..... as a Fourier integral, we obtain

(18)

where .... is the linear growth or damping rate of the wave. In the terms of fourth order in .. we neglect the imaginary part ... which is justified when .... This means that we neglect terms ..... , where .... is the characteristic time for the change of wave energy as a result of non-linear interaction. The expression in parentheses in eq. 15 is replaced by the ..-function. It should also be noted that, when the eqs. 16 and 17 are integrated, the poles brought about by the zeros .... must be passed from above, a consequence of the condition .... (.. = 2, 3).
Thus, in eqs. 16 and 17 one may put

(19)

Substituting into eq. 18 ... and ... , and taking into account eq. 19, we obtain the kinetic equation for waves

(20)

In connection with eq. 20, note that it comprises a formal series expansion in powers of the oscillation field corresponding to normal perturbation theory. However, with such an expansion, divergent terms appear in the contributions of the various orders. As will be shown in sub-section 2 C, these terms are essentially secular effects and may be eliminated by summing the divergent terms in all orders. It is shown in sub-section 2C that after summation the responses are again determined by eqs. 10 and 11, where it is necessary to omit the divergent terms and replace in eq. 11 the unperturbed distribution function .... by the function ... which changes slowly with time, where ... is determined by the quasi-linear theory equation (increased by terms which

(cont'd)

take into account the interaction of the waves).

If, instead of ... , we introduce the number of quasi-particles ... , which is determined by the relationship

(21)

so that .... is the spectrum of oscillation energy density, then the kinetic equation for the waves becomes

(22)

where .. is the symbol for principal value. The nonlinear term in eq. 22 may be interpreted as the oscillation integral for waves (quasi-particles).

2B Some general properties of the "collision integral" in the kinetic equation for waves

The values .. and .. from eq. 11, which determine the second and third order responses, satisfy certain symmetry relationships which are extremely useful in investigating the nonlinear terms in the kinetic equation for waves, eq. 22.

We shall first examine the properties of the second order responses. From eq 11 it is easy to obtain (using the properties of Poisson brackets)

(23)

(24)

It is not yet possible to obtain directly from eqs. 23 and 24 any relationships for the value .... determined by eq.10, since the integration over ... is carried out along the semiaxes from ... to ... . However, if we introduce the complete Fourier function component

(25)

then it follows from eqs. 23 and 24 that

(26)

(27)

(cont'd)

The response which interests us, ... , is coupled with ... by the relationship

(28)

We shall call all relationships of type 28 "spectral expansions". In order to clarify the meaning of eq. 28 we shall examine in greater detail the structure of the terms .... Substituting .... from eq. 11 into eq. 25, we obtain after integration with respect to ...... :

(29)

Differentiation with respect to the Lagrangian variables .... is implicit in the Poisson brackets. Instead of .... it is necessary to substitute here

(30)

where .... is the Larmor frequency (of the corresponding particles), ... is the unit vector directed along ... . After integration over ..... , there will appear in eq. 29 ... -functions of the form .... and ..... instead of exponentials. Here it is important that the ... -functions contain ... and ... with the same index. These ... -functions are acted upon by some differential operators with respect to ... . When there is no external magnetic field the values ..... take on a particularly simple form. In this case .... and from eq. 29 it follows that

(31)

(Eq. 31 is obtained from within the brackets in eq. 29 by a cyclic permutation); ....

After substitution of eq. 31 into eq. 28 and integration with respect to .... , we obtain an equation of the same type as eq. 31, but instead of .... it contains ....

From the foregoing it is clear that the intermediate results in terms of ... and ... entering into eq. 22 are due to the resonant interactions of the oscillations with particles possessing the velocities

(32)

(33)

(cont'd)

The first two cases in eqs. 32 and 33 correspond to the resonant interactions of the natural oscillations (with frequencies ... and ...) with the plasma particles, while the last case corresponds to the resonance of forced oscillations (with frequencies .....) with particles. Clearly, the nonlinear term due to the resonance of the natural oscillations with the particles, is considerably smaller than the linear term ...... that contains the same halfway results, and can therefore be neglected. We can consequently neglect in the nonlinear terms the above partial contributions arising from the natural oscillations; i.e. the poles not containing combination frequencies are integrated like principal values.

We now write the spectral expansion for the value ....

(34)

In eq. 34 we have retained the imaginary additions only in the denominator containing the combination frequency ...... ; the remaining poles are integrated like principal values. Converting .... in eq. 34 with the aid of eq. 26, and ..... with the aid of eq. 27, and then replacing the integration variables we obtain

(35)

where the value .... is determined by the following relationship

(36)

(it differs from .... only in the signs of the imaginary additions).

Equation 35 is extremely useful in investigating the collision integral in the kinetic equation for waves.

We now turn to the third order responses .... , and introduce the Fourier components

(37)

where ... is determined by eq. 11. It can easily be seen that

(38)

Equation 38 is written for that value which is contained in the collision integral for waves. It should also be noted that in eq. 38 we have

(cont'd)

omitted two divergent terms containing ...... and ..... (in accordance with the remark made after eq. 20; see also sub-section 2C.

We now obtain some relationships for the values ... and ... . On using the properties of Poisson brackets, the eq. 11 for .. = 3 may be rewritten in the form

(39)

(for the sake of brevity the spatial arguments are not written out). Completing the cyclic permutation .... in the right-hand part of eq. 39 we obtain

(40)

From eqs. 39 and 40 we derive

(41)

(42)

If the value .... is now broken down into two parts

(43)

(44)

(so that the principal contribution to ... is given by the resonance of particles with a forced oscillation of frequency .... , and the contribution to ... by resonances with frequency ......), then the following symmetry relationships emerge from eqs. 41 and 42 (provided that all poles not containing combination frequencies are integrated like a principal value)

(45)

(46)

To obtain eqs. 45 and 46 use was made of the fact that substantial parts of the values .. in eq. 44 make no contribution to .... (in other

(cont'd)

words these values are determined only by contributions of intermediate results in the spectral expansions eq. 44). Proof of this statement is given in Annex A.

Finally, it should be noted that in addition to eqs. 35, 45, and 46, the following obvious relationships take place

(47)

Using the derived symmetry relationships for responses .... it is possible to establish some useful properties of various terms of the collision integral .... in the kinetic equation for waves. We divide this integral into two parts

(48)

where .... contains all terms with .... and describes the interaction of waves for which the "decay" conditions are fulfilled

(49)

On using eqs. 35 and 47, the following expression for ..... is easily obtained

(50)

where

(51)

In eq. 50 the summation over only the positive frequencies .... is already implicit.

This part of the kinetic equation for waves, the only one in the case of a "transparent medium" (that is, when the resonance interaction of particles with waves may be neglected), has already been obtained from plasma hydrodynamic equations in refs. 3 and 4. It should also be noted that eq. 50 coincides with the right-hand part of the kinetic equation for phonons in a solid body, if it is assumed that .... The quantum deduction of kinetic equations for waves in a plasma is examined in ref. 7.

(cont'd)

The second term in eq. 48, ... , is determined by the resonance interaction of forced oscillations with particles. This effect may also be interpreted as a forced combination scattering of waves in the plasma.

We now present .... in the form ....

(52)

where ..... corresponds to ....
and .... corresponds to ....

where ... corresponds to ....
and ..... corresponds to ....

and .... are determined in eq. 44. On using eqs. 35, 45, 46, 47, it is easy to verify that

(53)

(54)

In most specific cases the contribution of the resonance interaction of combination waves of frequency .... with particles may be neglected in comparison with the corresponding contribution of terms with .... This means that .... , so that the entire kernel of the integral .... may be considered anti-symmetrical. Accordingly, it may be presented in this case in an explicitly antisymmetrical form (see eqs. 35, 36)

(55)

where .... is determined in eq. 36.

In concluding this subsection we would point out that the kinetic equation for waves, where the collision integral is expressed by means of responses .... presented as spectral expansions, is extremely convenient in

(cont'd)

practice, since these values may be calculated relatively easily (as was seen from the deduction eq. 31).

2C Summation of divergent terms. Connection with quasi-linear theory

We shall examine the general expression for the distribution function .... obtained by summation of a series from perturbation theory. Substituting into eq. 6 .... from eq. 4 and summing over all ... we obtain

(56)

where .... are the Fourier components of the potential and the micro-density of the charge (eq. 4) and

(57)

(... is determined by eq. 30; Poisson brackets are taken with respect to Lagrangian variables). Into this expression it is essential to substitute .... , which are expressed by means of amplitudes ... of the natural oscillations from a dynamic equation of the type of eq. 12, where the most simple terms in eq. 56 will be those obtained by replacing all .... by . ... (the first perturbation theory approximation for the potential). Denoting the sum of all such terms by means of ... and averaging over phases of all ... we obtain

(58)

For the summation term in eq. 58 to be nonvanishing, it is essential that ... corresponds to each . .... . We shall now isolate in eq. 58 a subsequence in which the conjugate pairs (.......) and (.....) are side by side. Denoting the sum of such terms by means of .... we can write

(59)

It can easily be seen that here the integrand is divergent. To verify this we shall examine in detail the simplest case of a plasma without a magnetic field. It then follows from eq. 57 that

(60)

(cont'd)

so that the denominators in eq. 59 of type .... etc. vanish. Clearly these divergences are the manifestations of secular effects.

Differentiating eq. 59 with respect to ... and taking into account eq. 60, the following equation for ..... is easily obtained

(61)

Substituting eq. 60 into eq. 61 and differentiating in the Poisson brackets, we obtain the well-known quasi-linear theory equation [1, 2]

(62)

The sum of the divergent terms of the series in eq. 59 is therefore finite and agrees with the distribution function of quasi-linear theory which changes slowly in time.

Analogous reasoning is also possible for a plasma in a magnetic field. Here, there are complications due to the fact that .... is already the sum of terms containing .... , so that the sum in eq. 59 will contain finite terms as well as divergent ones. It can easily be seen that summation of only the divergent terms again produces a quasi-linear distribution function (discarding the remaining terms is equivalent to averaging over the Larmor gyration of the particles).

Moreover it is easy to verify that if, simultaneously with the summation of the divergent terms in the distribution function, one sums the terms of analogous structure in the kinetic equation for waves, i.e. terms of the form (see eqs. 7 and 9)

(63)

this leads to the replacement of the linear growth rate

(64)

by the quasi-linear growth rate obtained by the replacement of .. in eq. 64 by ... .

In particular it is clear from this why the terms containing .... , ... are excluded from the spectral expansion for ..... (eq. 38).

(cont'd)

They have a structure of type of eq. 63 and are therefore included in the quasi-linear growth rate.

Finally, it should be noted that if, in addition to the series in eq. 59, we also take into consideration the additional terms in eq. 56, where some of the ...... are replaced by .... - as well as terms in which the conjugate pairs (................) do not stand side by side - then (after averaging over phases) we obtain an equation for the slowly changing background distribution which takes into account the interaction of waves. With an accuracy to terms of the fourth order in ... this equation is (for simplicity it is written for a plasma without magnetic field)

(65)

where

The expressions for .... are easily obtained, after the substitution of eq. 60 into the corresponding Poisson brackets; .... in the second term of eq. 65 is determined by the kinetic equation for waves (eq. 22). In obtaining this term we took into account (in the first approximation) the imaginary parts ... in ... , which are determined by eq. 15. In doing so we used

where ... is the symbol of principal value.

When ... changes not only in time but also in space, it is also necessary to include in .... a translational term equal to ....

Finally, it should be noted that, as can be seen from the contents of this subsection, averaging over a random phase distribution is initially equivalent to a transition to slowly changing time. This has been thoroughly studied in works dealing with the basis of kinetic theory [12, 13].

2D Conservation laws

We shall first examine the case where the decay conditions, eq. 49, are not fulfilled and only the resonances of particles with forced oscillations of frequencies .... are important. In this case the collision integral for waves has the form of eq. 55. Since its kernel is anti-

(cont'd)

symmetrical with respect to .. and .. , a change in the total number of particles is determined by

(66)

If we neglect the values ... (for example, as a result of the establishment of a quasi-linear "plateau" on the particle distribution function in the region of resonance with natural oscillations [1, 2]), then the total number of quasi-particles is conserved

The law of conservation of quasi-particles has important consequences. Let the oscillation spectrum be such that the frequencies change only slightly with change in .. - as, for example, in electron Langmuir oscillations for which

(67)

... is the Debye electron radius.

In this case, as a result of the conservation of quasi-particles, the total energy in the first nonvanishing approximation (with an accuracy to .....) will be conserved; that is, the non-linear interaction produces in this approximation only a removal of energy from one part of the spectrum to the other (for a one-dimensional packet, this has already been noted in ref. 2; for a three-dimensional packet, in ref. 14, 15. If the removal is from the shorter to the longer waves, then in the following approximation with respect to .... the nonlinear interaction produces complete damping of the wave energy (nonlinear Landau damping). If, however, the removal of waves goes in the opposite direction, then total growth of wave energy in the packet occurs in the next approximation. However, this by no means denotes the presence of nonlinear instability, for .... Such a case may come about, for example, if there are currents in the plasma; that is, if there is motion of the electrons relative to the ions with a velocity exceeding a certain kinetic velocity.

Completely analogous consequences, arising from the law of quasi-particle conservation, also occur in the case of Drummond-Rosenbluth oscillations [19] excited by the passage of a current along the magnetic field in a plasma with ..... for which the oscillation frequency is extremely close to the Larmor ion frequency (T_e and T_i are the temperatures of the ions and electrons, respectively).

(cont'd)

In the case of ion-acoustic oscillations without a magnetic field, the spersion equation has the form:

or simplicity, it is assumed that ....). Here, the removal effect sys a principal part only when the wave frequencies are close to ... , at is .... Otherwise the redistribution and the change of tal energy are generally of the same order.

We shall now examine the case in which ...... for all waves present. then follows from eo. 66 that .... , that is the nonlinear mping of the waves cannot alone compensate their growth as a result of near instability, and consequently the establishment of a stationary state impossible. Incorrect deductions about such establishment were made 16, 17_7 because, owing to the cumbersome nature of the expressions and lculations, the anti-symmetry of the kernel of the kinetic equation for e waves was not noted. Note that a stationary state may in principle be tablished if .... for the part of the waves in the packet.

Finally, we shall examine the case in which ..... and .... in eq. 48 e so insignificant that the decay interaction of waves plays a principal rt. From eq. 50, which determines .... , the following conservation ws may be derived directly

(68)

e first of these equations is the law of the conservation of wave energy t will be recalled that ..... is the spectrum of oscillation energy den-ty), and the second equation clearly represents the conservation of mo-ntum. Note that while the oscillation energy and momentum are conserved, is possible that the number of quasi-particles ... may not be conserved.

<u>Evolution of a spectrum of weak turbulence in time owing to the non-linear</u>
<u>interaction of waves</u>

Because of the complicated form of the collision integral in the kinetic ation for waves, it is interesting to examine particular classes of prob-s that permit an analytical solution by means of which the evolution in e of a turbulent oscillation spectrum may be followed. In this section shall examine one of these problems, the nonlinear evolution of a Langmuir

(cont'd)

electron oscillation spectrum in a plasma without a magnetic field. This problem is interesting for another reason: in a number of cases in the nonlinear relaxation of electronic oscillations, the principal part is played by ions, which might seem paradoxical at first sight.

Since the decay conditions (eq. 49) for Langmuir electron oscillations are not fulfilled, the collision integral for waves consists only of the part .... which describes the induced scattering of waves, the contribution of the term describing the resonance interaction of particles with forced oscillations of frequency ...... (.........) being negligible. In the case under examination the kernel of the collision integral .... is therefore antisymmetrical and is determined by eq. 55, where

(69)

(70)

(71)

Equation 70 is easily obtained by substituting the microdensity of charge .... into the formulas for .... (eqs. 25, 37), and by substituting the last into eqs. 28, 36 and 38.

The kinetic equation for waves must be enlarged by the equation for the particle distribution function, eq. 65. Since the kernel of the collision integral for waves is antisymmetrical in the case under consideration, the number of quasi-particles (plasmons) does not change during the nonlinear interaction of the waves, so that the wave collisions produce only a redistribution of the plasmons. In the absence of beams, currents, etc., this redistribution is from the shorter to the longer waves, since the oscillation energy as a whole does not grow.

If we integrate in eqs. 69 - 71, taking into account ...... (.... is the Debye radius), and neglect the contribution of the ions (as will be shown below, this is correct only for sufficiently wide wave packets), then the kinetic equation for waves becomes (see also ref. 14)

(72)

where we have omitted the linear term ..... (this may be done if .... is sufficiently small due to the quasi-linear relaxation of the distribution

(cont'd)

function) and have taken into account only the first two nonvanishing terms in the expansion of the collision integral in powers of ..... .

As has already been noted [14], it follows from eq. 72 that there is no interaction of the waves with the parallel and mutually perpendicular wave vectors in the first approximation, which is nonvanishing with respect to .... . However, this is true only if we ignore the influence of ions, which is, generally speaking, almost always considerable [15] .

By way of an example we shall consider an isotropic (3-dimensional) wave packet. It appears that if its width ... satisfies the condition

(73)

(... is the thermal velocities of the ions or electrons), then the ions play a principal role in the kernel of the wave oscillation integral. Limiting ourselves to the first nonzero approximation with respect to ... we obtain [15]

(74)

The integrand in eq. 74 is nonzero only when .... , from which it follows that

(75)

that is, only those waves whose wave vector amplitudes have nearly the same values, ... , interact mutually. In this connection the integrand in eq. 74 may be expanded in a power series of small differences (.....), as a result of which the integro-differential eq. 74 is reduced to the nonlinear differential equation in partial derivatives

(76)

where

.... is the characteristic width of the packet, ... is the average wave number of the wave packet.

(cont'd)

Comparing eq. 76 with eq. 72, we obtain the estimate, eq. 73. The solution of eq. 76 is

(77)

where ... is the initial energy distribution in the packet. It follows that the basic effect of the evolution in time of the packet is its narrowing; see fig. 1. However, eq. 76 itself is true only if the spread of phase velocities in the wave packet is considerably greater than the spread of the ion thermal velocities; this is the case when

As soon as the packet has become sufficiently narrow we cannot present its evolution analytically. However, as before, the picture is clear. The packet continues to narrow until four-plasma interaction takes effect. With the aid of the kinetic equation for the distribution function (65) it can easily be shown that the time taken for establishment of a "plateau" on the distribution function in the resonance region of particles with forced oscillations is always considerably greater than eq. 78. The time taken for the widening of the packet due to the four-plasma interaction may easily be estimated if we know .... , ... It should be noted that the estimate for ... derived from the form of the collision integral for four-plasma interaction obtained in ref. 18 has an incorrect order of magnitude. In order of magnitude this is given by

(78)

where W is the energy density of the wave packet. Comparing it with the characteristic narrowing time, we can find the steady quasi-stationary width ...

(79)

The establishment of a narrow quasi-stationary packet occurs so quickly that it is not necessary to take into account damping (or, in the case of another sign of ... , growth) while it is being established.

4 Steady oscillation spectrum in a slightly unstable plasma and transfer effects

In the preceding section we examined evolution in time, using as an example longitudinal electron plasma oscillations, and we found that in a

(cont'd)

plasma in thermodynamic equilibrium, together with redistribution of the energy of the electrical field fluctuations across the oscillation spectrum, constant dissipation is observed until there is complete damping of the fluctuations. There may also be situations when the oscillation energy is maintained at a nonequilibrium level owing to the development of the instability. The determination of the spectrum of such steady oscillations is of considerable importance in considering various transfer processes in unstable plasma.

With the aid of the nonlinear equations for oscillations obtained above, we can in principle solve this problem for the weak plasma instability, although the actual implementation is extremely complicated.

In this section we will show how this is done, taking as an example two very important types of plasma instability in a magnetic field. This will also provide a useful illustration of which assumptions (sometimes conditional ones) to make in order to obtain an answer.

4A Nonlinear theory of current instability - Drummond and Rosenbluth [19]

As a first illustration we shall examine the turbulent spectrum of a homogeneous plasma placed in a strong magnetic field ... along whose force lines flows an electron current of density ....

Drummond and Rosenbluth showed that even for small drift velocities ..... such plasma is unstable with respect to the excitation of potential oscillations with frequencies ... close to the first ion cyclotron resonance ..... and with wave lengths the order of the Larmor ion radius (............). The dispersion equation for the oscillation frequency is easily obtained from the general equation (Annex A), retaining only the term with the small denominator .... and using the condition of the smallness of the Landau damping for ions ....

(80)

The dispersion equation of ref. 19 .... wrongly takes into consideration the relationship between frequency and temperature when .... This error is repeated in refs. 16 and 17.

As can be seen from this expression, we have here a nondecaying oscillation spectrum. This considerably simplifies the form of the

(cont'd)

collision term in the kinetic equation for waves and was the reason for choosing this instability as our example.

We have limited ourselves to the case where the directed electron velocity ... only slightly exceeds the critical value ... , so that oscillations with frequencies close to the higher harmonics of the cyclotron ion frequency (. ....) are damped. In the formulas for the responses ..... given in Annex A, as well as in the linear eq. 1, it is therefore sufficient to retain only terms with the small denominators (.........) . Substituting the result into eq. 22, we write the kinetic equation for the number of waves ... in a stationary regime (....)

(81)

where

is the number of oscillation quanta with frequency ..... and wave vector .... .

is the instability growth rate due to resonance interaction with the electrons,

is the linear Landau damping rate for ions;

where

The nonlinear term in this equation describes the interaction of oscillations with the plasma ions. In calculating the contribution of forced oscillations of amplitude .... we have neglected terms of the order .... (these tersm are represented in the formula for ..... by the last term and are most important when .....). Since the phase

(cont'd)

velocity of the redistributed oscillations .... is considerably greater than the thermal velocity of the ions ... , the basic process of wave interaction with particles is the scattering of the waves by the ions (see section 2). The oscillation scattering is accompanied by a red shift of the wave frequencies, that is on scattering the energy of the turbulent pulsations is partly dissipated into thermal motion of the ions. The fraction of dissipated energy is small in comparison with the total energy .... , so that the energy transfer across the spectrum is almost a constant "flow".

Since, in an actual plasma stability problem, only ôscillations in the unstable regions of the spectrum, where .... , have in the first approximation an epithermal amplitude, the most rapid exchange of energy occurs between the unstable modes. However, if we take into account only the growing oscillations, we see that the kinetic equation for waves does not have a stationary solution, because the nonlinear terms in our equation describe the scattering of waves; and although this partially dissipates the pulsation energy, it does conserve the number of oscillation quanta. As a result, the total number of quanta ... grows in time due to the instability. We must therefore also consider oscillations in damped regions of the spectrum (...........), where oscillation growth is possible if the nonlinear growth rate .... exceeds the damping rate. In addition, the nonvanishing amplitudes of the damped oscillations may result from the scattering of some oscillations on others. The last process begins to play a part if the spectrum of oscillation energy density .... in the long-wave portion of the spectrum becomes large.

In the stationary case under consideration, eq. 81 is a system of linear equations for which we can easily find particular solutions. For example, let there be only two oscillations of finite amplitude, one of which .... builds up as a result of instability .... while the other has a smaller frequency ...... and is damped .... The process of establishing the oscillation amplitude may then be imagined as follows: At first only the amplitude of the unstable oscillation .... grows. However, as soon as its amplitude ... exceeds the critical value at which the energy flow into the low-frequency mode as a result of the scattering on ions equals the energy dissipation due to linear damping, the previously damped oscillation ... begins to grow rapidly. This growth continues to a level where the instability of the high-frequency mode begins to decline as a result of nonlinear effects. In a stationary regime the inflow of

(cont'd)

energy into each mode is balanced by an outflow of energy, and from eq. 81 we obtain

(82)

Note that eq. 81 has innumerable solutions, if only because there are exact solutions with two, three or any number of oscillations. (A general solution for the spectrum of the wave number ... with finite number N when there are (plasma) oscillations is presented in the form of the sum .... , the coefficients of which ... are determined by means of a system of algebraic equations (81). An important point here is that division of this equation by ... reduces it to a system of linear algebraic equations which are no longer satisfied by the solutions found above). However, such solutions with a finite number of waves are themselves unstable since any additional wave which may arise can, generally speaking, grow. Consequently, a state must be realised physically in which all oscillations are excited in the unstable region. We shall restrict ourselves to a rough estimate of the amplitude of pulsations in such a regime, comparing the inflow of energy into the unstable mode with the nonlinear outflow of energy into damped regions of the spectrum. Instead of summing, we shall for convenience integrate with respect to wave number. In view of the axial symmetry of the problem, integration with respect to the azimuthal angle is carried out immediately. For an approximate estimate of the integral with respect to ... , one may use a series expansion of the integrand in the frequency difference in frequencies (........), which is reasonable since only oscillations with small frequency differences .... interact among themselves. As a result eq. 81 becomes

(83)

It is clear that the strongest limitation on the amplitude is produced by interaction with the mode which has large ... . Assuming that ... changes in phase space (....) more quickly than the coefficient .... , we write approximately

As can be seen from this expression, in the region of maximum frequency .... for .... the amplitude of the

(cont'd)

fluctuations of the electrical field is at a minimum [16]. With the increase in the wavelength .... the spectrum of the electrical field energy density .... approaches a constant limit, while into the region of short wavelengths ... falls proportionately to the fourth power of the ratio of the wavelength .... to the Larmor radius .... Finally, in considering the function .... we write the explicit expression for the growth rate of the instability in a Maxwellian plasma with a current. Selecting [19] the distribution of electrons with respect to velocities ... in the form

we obtain from eq. 2

It follows that there is an instability only when .... and ... have the same signs (for ......) (henceforth we shall consider only the case where ....), the oscillation spectrum being limited by the inequality ..... with respect to ... . It can be seen from eq. 2 that as ... increases the instability is suppressed due to the linear Landau damping on the ions for values of the order of .... Substituting this value into eq. 4 we find the energy level of the fluctuations of the electric field

(84)

With the methods described for finding an oscillation spectrum for a slightly unstable plasma one can estimate various transfer coefficients, in particular the coefficient of the diffusion of plasma across the magnetic field owing to the oscillations. We shall estimate the diffusion coefficient by means of quasi-linear theory.

In view of the ambipolarity of the diffusion, we need only consider electrons; in describing these we shall limit ourselves to a drift approximation. The kinetic equation for the electron distribution function in the drift approximation is

(85)

After the usual operation we obtain an averaged equation for the slowly changing part of the distribution function (for example, see ref. 22)

(cont'd)

(86)

where there has been added to the right hand part the collision term in the ... -approximation (... is the Maxwellian function of electron distribution with respect to velocities). Here we have retained terms with derivatives along coordinates from the slowly changing distribution function .... , since it is they which describe the diffusion of plasma in velocity space. By writing the equation in such a form we are able to consider a... number of effects applicable both to homogeneous and to inhomogeneous plasmas.

It follows from eq. 86 that when

(87)

particle collisions are important and establish a Maxwellian velocity distribution. In this case we can use formulas for the growth rate calculated on the assumption that the Maxwellian velocity distribution of electrons is corrected.

Integrating eq. 86 with respect to velocities, we obtain the change in time of particle density owing to the onset of macroscopic flows of plasma across the magnetic field

(88)

It follows that the plasma flow consists of two parts

the first of which ... is totally unconnected with density gradients in the plasma, being a flow of matter carried by the waves (it disappears if the wave spectrum is axially symmetrical).

Substituting the estimate for the energy of oscillations (eq.84) and using the estimate for the maximum phase velocity .... we finally find

(89)

If eq. 87 is violated the infrequent particle collisions do not succeed in making the electron distribution Maxwellian, which relaxes

(cont'd)

under the action of the onsetting fluctuations of the magnetic fields to a more stable state.

If the particle collisions are neglected altogether, the instability suppresses itself before there is any significant diffusion of the particles. This can be most simply verified if in eq. 86 we replace the approximate coefficient ... by the spectrum mean coefficient .... and go on to the new variables

where ... is the velocity of the order of the resonance electron velocity (here ....). As a result, eq. 85 becomes

(90)

It follows from this equation that in times of the order .... on the distribution function .... a "plateau" with respect to the variable .... is established over the entire range of resonance frequencies (..............). The coordinate ... and velocity ... of the resonance electrons are related by .... , so that when the velocity ... changes to the order of magnituede .... , the displacement of resonance frequencies ... in time ... is approximately equal to [20]

(91)

The nonresonant particles in this approximation do not undergo any displacement.

When there are no particle collisions, the instability quickly suppresses itself in this way and there is no flow of plasma across the lines of force. However, even weak electron collisions have a tendency to make the distribution Maxwellian and prevent the formation of a plateau. The instability growth rate is therefore non-zero and we find it by means of perturbation theory with a small ratio of the collision frequency ... to the effective frequency .... [21] . In the first approximation the distribution function satisfies the condition

(92)

(cont'd)

We obtain the correction ... to the function ... arising from the influence of collisions if we equate in the stationary regime the two terms in the left-hand part of eq. 86 and integrate from velocities .... to such (..............) for which the Maxwellian distribution is true

(93)

Noting further that as a result of the influence of oscillations, only the derivatives .... change, and not the distribution function itself. we can by following eq. 92 write the approximate equality

Using this equality together with eq. 92 we rewrite eq. 93 in a more convenient form

(94)

Equation 92 actually determines for us the total instability growth rate, taking into account the influence on the stability of the inhomogeneity of the plasma. Such a general notation is reasonable for very small collision frequencies ... when the correction to the growth rate ... due to collisions is considerably smaller than the contribution of the inhomogeneity of the plasma (the plasma distribution .... relaxes so that the less unstable mode .... is damped while the more unstable mode acquires a fast growth rate (eq. 94). It is the opposite case, where the inhomogeneity of the plasma is very slight, which will interest us. In the stationary eq. 86 it is possible to omit without loss of accuracy the inhomogeneous terms and seek corrections to the instability growth rate

To calculate the flow of particles caused by the density gradient, we need to solve eqs.83, 94 and 88 simultaneously. As a result we obtain [16, 17]

(95)

In addition to this condition it is also necessary that the effects of the influence of inhomogeneity on the stability be small; this occurs

(cont'd)

when

4B "Universal instability" of an inhomogeneous plasma

As a second example of a slightly unstable plasma we shall consider a plasma whose inhomogeneity constitutes its inequilibrium. The linear and the nonlinear theories of the stability of an inhomogeneous plasma now number a great many works, many of which have been mentioned in reviews (for example, see ref. 22). We shall therefore touch on only some specific features of the problem without embarking on a detailed analysis.

For simplicity we shall limit ourselves to a case where there is no temperature gradient. We select a particle distribution function ...... of an inhomogeneous plasma placed in a strong magnetic field ... in the form

(96)

Such a plasma distribution is unstable with respect to the excitation of potential drift waves with frequencies close to the harmonics of ion cyclotron frequency .... and with phase velocities .... Non-potential perturbations (. ....) distorting the forced lines of the magnetic field are damped in the absence of a temperature gradient.

Note that if we are ultimately interested in the processes of plasma particle transfer across the retaining magnetic field, then, in the process, which is most interesting from the point of view of controlled thermonuclear reactions at high temperatures and infrequent collisions, it is not necessary to determine the energy of the oscillations which develop.

Indeed, in a slightly inhomogeneous plasma (...............) instabilities develop with a small growth rate .... , so that we can use quasi-linear theory generalized for an inhomogeneous plasma in calculating their reciprocal influence on the plasma diffusion. The use of eqs. 88, 92 from the previous section – the infrequent collisions of particles being neglected – shows that in this approximation there is no plasma diffusion. As a result of finding the flow of plasma across the field ... in the second approximation with respect to the small ratio of the collision frequency ... to the reciprocal time of plateau formation on the distribution function ... , the amplitude of turbulent pulsations drops out of the estimate for the plasma flow along the density gradient [20, 21]

(97)

(cont'd)

The limits of applicability of this formula naturally depend on the level of the fluctuations of the electrical field .... in the Maxwellian plasma.

In order to obtain a numerical value for the diffusion coefficient we must substitute the frequencies ... and wavelengths ... , ... of the redistributed oscillations.

Leaving in the dispersion equation for the oscillations of the inhomogeneous plasma (see Annex A) only terms with small denominators .... we obtain expressions for the frequencies ... and growth rates ... of the redistributed oscillations

(98)

where

Henceforth we shall consider only quasi-neutral perturbations with a wavelength considerably greater than the Debye radius .... Violation of the condition of quasi-neutrality for small densities leads to the suppression of instability, as can be seen from this expression.

The condition that perturbations be possible .... places a limit on the maximum growth rate for low frequency modes

(99)

For long-wave oscillations the frequency .... , so that the growth rate becomes very small: .... As the wavelength becomes shorter the frequency reaches saturation .... and the growth rate ... increases in proportion to ... .

Perturbations with frequencies .... of the order of the Larmor ion frequency can only build up at very short wavelengths, less than the Larmor electron radius, and at a sufficiently low plasma pressure .... :

(100)

The instability growth rates are weakly dependent on the wavelength and are given by

(101)

(cont'd)

Finally, we must find the lower limit for the wavelength of the excited oscillations. At very small wavelengths ... the oscillations are damped as a result of falling into resonance with the ions which are moving with a diamagnetic drift velocity ....

Taking the latter into account in the dispersion equation for the oscillation, we obtain the curve of neutral equilibrium in the plane .... :

(102)

where

The relationship .... is tabulated numerically in ref. 23 for the case of "universal instability". We assume here that the plasma pressure is not very close to the critical .... , so that we may ignore the influence of longitudinal ion motion for short waves.

In principle eqs. 97, 98 and 102 solve the problem of the turbulent diffusion of a high-temperature plasma. Since the principal contribution to eq.97 is made by the low-frequency perturbations, by substituting into eq. 97 the frequencies .... and wavelengths .... , ... , we find

(103)

If eq. 87 is violated, the turbulent diffusion depends essentially on the oscillation energy in the plasma.

In considering the nonlinear interaction of electrical field fluctuations, we shall use the previously derived eq. 22 describing the change in time of the amplitudes of the individual oscillation modes. Since we are in a position to obtain only intelligent estimates, and not exact expressions, for the turbulence spectrum, we shall make a series of simplifying assumptions in writing these equations. Firstly we shall assume that as a result of the development of instability in the plasma, there are present only oscillations with frequencies very close to the harmonics of the cyclotron ion frequency .... , so that in the formulas for the distribution function (see Annex A) it is sufficient to retain only the terms with small denominators .... Secondly, we shall interest ourselves only in

(cont'd)

oscillations with the wavelength .... , for which the contribution to the dielectric permeability .... is made by the integral of the ion distribution function.

In addition, we shall neglect the thermal spread of ions and shall assume the following approximation to be true

(104)

Finally the nonlinear interaction of oscillations with electrons may take effect only at very low-wavelengths .... so that it is sufficient to take into account their effects in the limit ....

Taking into account these circumstances we obtain from eq. 22, with the aid of the formulas in Annex A the kinetic equation for the number of waves .... with frequency .... in a system of coordinates where there is no unperturbed electrical field ....

(105)

where

... is the growth rate of instability due to the resonance interaction of the wave with electrons (eq. 98);

is the Landau damping rate on ions; and

(cont'd)

The second term in this equation describes the decay of one oscillation into two others and the reverse process, the merging of two oscillations into one. By presenting the "drift" oscillations as a coherent set ... of quanta of individual oscillations with quasi-energy ... and quasi-momentum ... , we can write the oscillation integral due to the decay of drift oscillations in a form which is analogous to the "Stoss" (impulse) term in the kinetic equation for phonons in a solid body.

The third and fourth terms arise as a result of the interaction of waves and particles in the approximation which is non-linear in the wave amplitudes. Since the phase velocity of the drift waves is considerably greater than the thermal velocity of the ions .... the law of conservation of energy permits only the scattering of oscillations by ions

(106)

where .... is the energy of the oscillations which are being and have been scattered, respectively; .... is the change in the particle momentum .... on scattering. During such a scattering process energy is transferred from the short-wave to the long-wave modes. For electrons, in eq. 106 one can write a plus sign to correspond to the emission (absorption) of two oscillations simultaneously.

We shall first consider low-frequency oscillations (.........). Since the nonlinear interaction decreases as the phase velocity ... increases, the principal contribution is made by resonance electrons with velocities of the order ... . The group of resonance electrons constitutes only a small part, of the order ....., of their total number and the nonlinear terms therefore contain the same smallness as the linear terms which produce instability .... As a result of the latter, the evolution in time of wave packets with oscillation wavelengths shorter than .... can no longer be described with the aid of the equations obtained, although by virtue of .... the instability may be assumed to be small. This becomes obvious if we take into account the fact that as the wavelength decreases the coefficients .... , ... in eq. 105 grow accordingly in proportion to the second and fourth power of the ratio of the Larmor radius ... to the wavelength .... When .... , the nonlinear effects connected with the thermal motion of electrons are therefore the first to appear as the amplitude grows. This occurs at such

(cont'd)

amplitudes that not only correction (quadratic in the wave energies) to the energy of the interaction becomes important, but also all other terms of the expansion in amplitude of the energy of wave interaction become important, and we are faced with the necessity of summing infinite series.

This difficulty does not arise when we consider the interaction of longer waves .... for which a principal part is played by the nonlinear transfer of energy into longer-wave pulsations arising from the scattering on ions. Comparing in kinetic eq. 105 the linear inflow of oscillations with the nonlinear outflow, we find that the energy of such modes cannot exceed the value

(107)

(In [20] and [24] the nonlinear interaction with electrons has been omitted from the kinetic equation for waves; also omitted is that part of the interaction with ions which we describe by .... and which plays an important part when .... Therefore, estimates of the amplitudes of short-wave pulsations from previously-obtained formulas are too high). Here the nonlinear term of the order ... , and therfore the oscillation energy ...... , contain the small ratio .... It is clear that the following terms of the expansion of interaction energy in the amplitudes of the individual waves contain this small ratio in increasing powers ..... , so that the expansion is correct.

Since at present there are no standard methods for considering strong instability, we shall limit ourselves to the case of waves which are not very short .... , where all the methods developed above are applicable.

It follows from the estimate eq. 107 that the flow of energy from the short-wave ...... to the long-wave modes .... as a result of scattering on ions does not exceed the linear growth of instability relative to the long-wave pulsations .... Comparing the latter with the nonlinear outflow of energy as a result of decay, we obtain an estimate of the spectrum of energy density in the long-wave oscillations [20, 22, 24]

(108)

where .... is the wavelength of drift waves which, like the entire spatial behaviour of fluctuations of the electrical field potential .... ,

(cont'd)

is generally described by an integro-differential equation corresponding to dispersion eq. 98 in the WKB-approximation. Naturally, only oscillations embracing the entire volume of the plasma can produce effective turbulent diffusion. The wavelength .. of oscillations with such a wide region of possible motion .... is of the same order as the value of the Larmor ion radius .... Using the estimate of the maximum growth rate, eq. 99, we determine the coefficient of diffusion on such pulsations [20, 22, 24]

(109)

If we now consider the low-frequency drift oscillations with shorter wavelengths .... and take into account the large amplitude of the long-wave oscillations, eq. 108, we notice that they are damped in the nonlinear regime because of the strong scattering on ions and do not contribute to the diffusion

The estimate eq. 109 is quite sufficient in a plasma of not very low density .... when, as a result of instability, only oscillations with wavelength .... are present.

In a rarer plasma, the overestimates of the amplitude of short-wave pulsations in strong coupling [21] show that the diffusion coefficient may undergo at the most a fivefold change in comparison with eq. 109. The letter relations also change only slightly.

We should like to add a few words about the estimate of the influence on diffusion of the high-frequency drift waves (.....). They develop with small growth rates .... and are well described by kinetic eq. 105 in which the basic role is played by the nonlinear effects describing the scatteri of waves by ions. In a Maxwellian plasma, when the level of long-wave turbulent pulsations is determined by eq. 108, the high-frequency oscillations are suppressed in the nonlinear regime.

When the frequency of particle collisions ... is reduced to below the "quasi-linear" ... for pulsations with wavelengths .... , we still do not go over to the regime of the diffusion of high-temperature plasma. This is due to the fact that the formation of a plateau on the electron distribution function produces suppression of the long-wave oscillations; but then, in accordance with eq. 105, there arises the possibility that shorter waves will develop. Let ... be the wave number below which the linear growth rate of instability falls as a result of the reciprocal influence of oscillations

(cont'd)

on the background (we shall further define it at a given frequency in accordance with the obvious formula ....). Then, for oscillations which are shorter than the mode .... , the distribution function .... may be considered Maxwellian and, as before, they will be suppressed as a result of the strong scattering on ions. The amplitude of the longer-wave oscillations grows to such a value that the mode (............) serving as an energy source begins to be suppressed. At this point it is possible to give only an upper estimate for the total "energy" of all the long-wave pulsations

(110)

The amplitude of the unstable short wave oscillation .... is established in accordance with the possible rate of oscillation energy dissipation in damped regions of the spectrum and of the decrease in the number of quanta as a result of decay.

However, the level of the amplitude of the damped oscillations itself depends on the value .... and the problem of determining the amplitude .... becomes complicated. In accordance with eq. 110 we may assume that

From this we obtain directly an upper estimate for the diffusion coefficient

If the plasma pressure is .... , then as the frequency gradually decreases we arrive at oscillations with a wavelength shorter than .... We may determine their amplitude in the "weak coupling" approximation. It is therefore possible to state only that the result. eq. 109, is true at least to collision frequencies

(111)

At the lower frequency we can find directly the diffusion coefficient by means of eq. 103.

(cont'd)

Annex

We shall find the expansions (necessary for constructing turbulent plasma kinetics) of the rapidly oscillating part of a distribution function in the amplitudes of fluctuating electrical fields .... . For this we shall transfer the nonlinear terms in the kinetic Boltzmann equation for the individual component of the Fourier distribution function .... into the right-hand part and integrate the equation with respect to the particle trajectories [25]

(112)

The integral is here taken along the particle trajectory defined by the equations

(113)

where .... is the phase of particle gyration around the force line, the magnetic field being directed along the z axis.

If the approximations which have already been found are substituted into the right-hand part of eq. 110, it may be used directly for finding the series expansion of the distribution function in powers of the small amplitudes ...., by means of successive integrations.

We shall solve the problem for the general case of an inhomogeneous plasma when the particle density changes with the x coordinate. The particle distribution function in an unperturbed plasma depends only on the integrals of particle motion and may be written

(114)

We shall consider only those cases where the WKB-approximation may be used in describing the fluctuation of electrical fields in a plasma and shall expand the electrical field in a Fourier series

(115)

where .... is the Fourier transformation of the scalar potential.

(cont'd)

Substituting eq. 114 and 115 into eq. 112, we obtain the correction to the distribution function eq. 114 in the linear approximation

(116)

Integration with respect to time can be carried out easily if we take into account the relationship

(117)

where ...... are the Bessels functions of a real argument. Using these we obtain from eq. 116

Since the perturbed distribution function already depends on the phases of ~~particle~~ gyration in the orbits .... , in comparison with eq. 116 we now have terms of a new type, connected by the differentiation with respect to ... . They are integrated with respect to time by means of

As a result the distribution function ..... in the second approximation becomes

(118)

Here differentiation with respect to velocities .... in the arguments of the Bessel function is replaced by differentiation with respect to the corresponding wave number ... , so that the remaining differentiations are

(cont'd)

carried out for .... Further integration of the kinetic equation from formula 7 becomes obvious and we shall omit it.

We shall write only expressions for the dielectric permeability accurate to the third order in the amplitudes. Linear approximation gives us a dispersion equation for the potential oscillations of an inhomogeneous plasma:

where .... , ... is the Bessel function of the imaginary argument, ... is the drift velocity of the j particles due to the inhomogeneity of the density.

Symmetrizing eq. 118 with respect to indexes k', k'' we obtain expressions for the responses ..... in the second approximation

A completely analogous procedure applies in the third approximation

References

1. A.A. Vedenov, E.P. Velikhov, R.Z. Sagdeev, Nuclear Fusion 1 (1961) 82.
2. W. Drummond, D. Pines, Nuclear Fusion, 1962 Supplement, Part 3, 1049.
3. M. Camac, A.R. Kantrowitz, M.M. Litvak, R.M. Patrick, H.E. Petschek, Nuclear Fusion, 1962 Supplement, Part 2, 423.
4. A.A. Galeev, V.I. Karpman, Zh. eksp. teor, Fiz. 44 (1963) 592.
5. B.B. Kadomtsev, V.I. Petviashvili, Zh. eksp. teor. Fiz. 43 (1962) 2234.
6. V.I. Karpman, Dokl. Akad. Nauk SSSR 152 (1963) 587.
7. A.A. Vedenov, Voprosy teorii plazmy (Questions of plasma theory),

(cont'd)

Gosatomizdat, Moscow, 3 (1963).

8. S.V. Iordansky, A.G. Kulikovsky, Zh. eksp. teor. Fiz. 46 (1964) 732.
9. V.P. Silin, Zh. prikl. mekh. tekhn. Fiz. 1 (1964) 31.
10. L.M. Altshul, V.I. Karpman, Zh. eksp. teor. Fiz. 47 (1964) 1552.
11. W. Bernard, H.B. Callen, Rev. mod. Phys. 31 (1959) 117.
12. L. van Hove, Physica, 21 (1955) 517; 23 (1957) 441.
13. Lectures in Theoretical Physics, Vol. III, ed. Wesley E. Brittin, Interscience Publishers, New York (1963).
14. L.M. Gorbunov, V.P. Silin, Zh. eksp. toer. Fiz. 47 (1964) 200.
15. A.A. Galeev, V.I. Karpman, R.Z. Sagdeev, Dokl. Akad. Nauk SSSR 157 (1964) 1088
16. V.I. Petviashvili, Zh. eksp. toer. Fiz. 45 (1963) 1467.
17. V.I. Karpman, Zh. prikl. mekh. tekh. Fiz. 6 (1963) 34.
18. G. Suramlishvili, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 153 (1963) 317.
19. W. Drummond, M. Rosenbluth, Phys. Fluids, 5 (1962) 1507.
20. A.A. Galeev, L.I. Rudakov, Zh. eksp. toer. Fiz. 45 (1963) 647.
21. V.N. Oraevsky, R.Z. Sagdeev, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 150 (1963) 775.
22. A.A. Galeev, S.S. Moisseev, R.Z. Sagdeev, Atom. Energiya, 15 (1963) 451.
23. A.B. Mikhailovsky, L.V. Mikhailovskaya, Zh. eksp. teor.Fiz. 45 (1963) 1566.
24. B.B. Kadomtsev, Zh. eksp. toer. Fiz. 45 (1963) 1230.
25. M. Rosenbluth, N. Krall, N. Rostoker, Nuclear Fusion, 1962 Supplement, Part I, 143.

(Manuscript received 17 July 1964).