Доклады Академии наук СССР
1965. Том 161, № 2

ФИЗИКА

Г. М. ЗАСЛАВСКИЙ, С. С. МОИСЕЕВ

СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 22 X 1964)

Хорошо известно, что в системе с медленно меняющимися параметрами может существовать величина, сохраняющаяся во времени с экспоненциальной степенью точности,— адиабатический инвариант. Справедливость последнего легко устанавливается с помощью метода стацинарной фазы ([1]), и задача, по существу, полностью эквивалентна задаче о надбарьерном отражении в квантовой механике в квазиклассическом приближении ([2]). В системе, состоящей из нескольких связанных осцилляторов, вопрос о сохранении адиабатических инвариантов сразу усложняется благодаря возможности прохождения осцилляторов через резонанс («момент резонанса» может находиться при этом в комплексной плоскости времени t). Если при $t\to-\infty$ был возбужден, например, какой-либо один осциллятор, то при $t\to+\infty$ возможны самые разнообразные перераспределения начальной энергии между осцилляторами. В настоящей работе подробно исследуется система двух связанных осцилляторов, параметры которых медленно меняются со временем. Формальная сторона вопроса заключается в построении асимптотического решения уравнения четвертого порядка при заданных граничных условиях.

Функция Лагранжа исследуемой системы имеет вид

$$L = {}^1/_2(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - {}^1/_2\omega_1^2(t)x^2 - {}^1/_2\omega_2^2(t)y^2 + \alpha(t)xy, \qquad (1)$$

где предполагается в дальнейшем, что параметр связи $\alpha < \omega_1\omega_2$ (случай, когда $\alpha > \omega_1\omega_2$, как будет видно в дальнейшем, не представляет физического интереса, а рассмотрение его тривиально). Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} + \omega_1^2(t)x = \alpha(t)y, \qquad \ddot{y} + \omega_2^2(t)y = \alpha(t)x. \qquad (2)$$

Собственные частоты $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ и параметр связи $\alpha(t)$ предполагаются аналитическими функциями и нигде не обращаются в нуль на действительной оси t. Если бы параметры ω_1, ω_2, α не зависели от t, то можно было бы привести сумму двух квадратичных форм (1) к каноническому виду одним преобразованием. В рассматриваемом случае такое преобразование нельзя провести единым способом на всей оси t. Это связано с тем, что матрица преобразования, зависящая теперь от t через параметры ω_1, ω_2, α, является особой в точках на плоскости комплексного переменного t, где совпадают характеристические числа квадратичной формы ${}^1/_2(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2-\alpha xy)$ ([3]). Система (2) изучалась в ([4]) в связи с задачей о пересечении термов при атомных столкновениях. Результаты работы ([4]) использовались в ([5]) для задач о трансформации волн в плазме. Исследования, проведенные в ([4], [5]), являются, в определенном смысле, неточными (соответствующие замечания будут сделаны ниже).

Для дальнейшего удобно привести систему (2) к виду

$$\beta\frac{d^2x}{d\tau^2} + \Omega_1^2(\tau)x = \Gamma y, \quad \beta\frac{d^2y}{d\tau^2} + \Omega_2^2(\tau)y = \Gamma x \quad (\beta \ll 1), \qquad (3)$$

где $\tau = t / T$; T — характерное время изменения параметров *; $\Omega_1 \sim \sim \Omega_2 \sim 1$; величина $\Gamma \sim \alpha / \omega^2$ и характеризует степень связи осцилляторов. Решение системы (3) ищется в виде разложения:

$$x,\, y = \exp\left\{\frac{i}{\sqrt{\beta}}\int^{\tau}(\bar{k}_0(\tau) + \sqrt{\beta}\,\bar{k}_1(\tau) + \cdots)\,d\tau\right\}. \tag{4}$$

Главные члены четырех асимптотических решений определяются выражениями:

$$x_\pm = \Pi_1 \exp\left[\pm i\int^{t} k_1(\tau)\,d\tau\right], \quad y_\pm = \Pi_2 \exp\left[\pm i\int^{t} k_2(\tau)\,d\tau\right] \tag{5}$$

которые получаются после подстановки (4) в (3). Здесь

$$\pm k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} \mp \sqrt{\frac{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2}{4} + \Gamma^2}}; \tag{6}$$

$\Pi_{1,2}$ — предэкспоненциальные множители, определенные в ([4]).

Дальнейшая задача заключается в том, что задав, например, на $+\infty$ решение Z в виде

$$Z_+ = A_0x_+ + B_0y_+ + C_0y_- + D_0x_-, \tag{7}$$

мы должны определить решение Z_- на $-\infty$. Особыми точками асимптотического решения Z являются, как уже отмечалось, точки совпадения характеристических корней $\pm k_{1,2}$. При этом возможны следующие четыре случая: 1) $k_1 = -k_1 = 0$; 2) $k_2 = -k_2 = 0$; 3) $k_1 = k_2$; 4) $k_1 = -k_2$. Все эти точки, в силу наложенного ранее ограничения на ω_1, ω_2, α, не лежат на действительной оси t. Первые два случая соответствуют обычным точкам поворота в уравнении Шредингера, и их рассмотрение известно (см., например, ([6])). В работах ([4], [5]) рассматривался только случай 3. Следует заметить, что корень характеристического уравнения k имеет 4 ветви и, следовательно, вообще говоря, 6 возможных случаев пересечения корней. Так как уравнение для определения k биквадратно, то остаются указанные 4 случая, и игнорирование какого-либо из них, вообще говоря, незаконно.

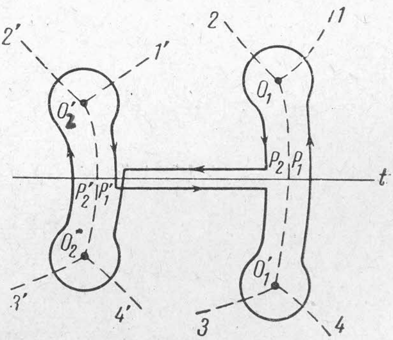

Рис. 1

Представим решения (5) в виде:

$$\begin{aligned} x_\pm &= \Pi_1 \exp\left[\pm i\int^{t}\frac{k_1 + k_2}{2}\,d\tau\right]\exp\left[\pm i\int^{t}\frac{k_1 - k_2}{2}\,d\tau\right], \\ y_\pm &= \Pi_2 \exp\left[\pm i\int^{t}\frac{k_1 + k_2}{2}\,d\tau\right]\exp\left[\mp i\int^{t}\frac{k_1 - k_2}{2}\,d\tau\right] \end{aligned} \tag{8}$$

и ограничимся рассмотрением случая, когда выражения $(k_1 - k_2)^2$ и $(k_1 + k_2)^2$ имеют простые нули соответственно в точках O_1, O_2 и O_1', O_2' (рис. 1). В силу вещественности коэффициентов характеристического уравнения корни t_{O_1}, $t_{O_1'}$ и t_{O_2}, $t_{O_2'}$ соответственно комплексно сопряженные. Коэффициенты A_0, B_0, C_0, D_0 в (7) меняются скачкообразно при пере-

* Для простоты считаем T одинаковым для ω_1, ω_2, α и $\omega_1 \sim \omega_2$. Как будет видно из дальнейшего, это не ограничивает общности рассмотрения.

ходе с одной линии уровня, где $\mathrm{Im}\,(k_1 \pm k_2) = 0$ (линии Стокса), на другую. При этом пересекаются линии *1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4'*, на которых $\mathrm{Re}\,(k_1 \pm k_2) = 0$. При обходе точек O_1, O_2 независимо ведут себя пары решений (x_+, y_+) и (x_-, y_-); при обходе точек O_1', O_2' такую же независимость проявляют пары (x_+, y_-) и (x_-, y_+). На линиях *1, 3* $\mathrm{Im}\,(k_1 - k_2) < 0$; на линиях *2, 4* $\mathrm{Im}\,(k_1 - k_2) > 0$, на линиях *1', 3'* $\mathrm{Im}\,(k_1 + k_2) > 0$; на линиях *2', 4'* $\mathrm{Im}\,(k_1 + k_2) < 0$.

Для определения правил склейки решений (5) при наличии особых точек $k_1 = \pm k_2$ воспользуемся методом, аналогичным методу Цвана.

Учитывая приведенные рассуждения, будем обходить точки O_1, O_2, O_1', O_2' по контуру, изображенному на рис. 1. Начиная из точки P_1 с решением в виде (7) будем при коэффициентах ставить индекс i после пересечения линии с номером i (при переходе через линии со штрихами будем отмечать коэффициенты штрихами). Имеем:

$$A_1 = M_1A_0;\ B_1 = B_0 / M_1 + \alpha_1M_1A_0;\ C_1 = M_2C_0;\ D_1 = D_0 / M_2 + \alpha_1M_2C_0;$$

$$A_2 = A_1 + \beta_1B_1; \quad B_2 = B_1; \quad C_2 = C_1 + \beta_1D_1; \quad D_2 = D_1;$$

$$A_4' = M_1N_1A_2; \quad B_4' = \frac{N_2}{M_1}B_2; \quad C_4' = \frac{M_2}{N_1}C_2 + \alpha_2M_1N_1A_2;$$

$$D_4' = \frac{D_2}{M_2N_2} + \alpha_2\frac{N_2}{M_1}B_2;$$

$$A_3' = A_4' + \beta_2C_4';\ B_3' = B_4' + \beta_2D_4';\ C_3' = C_4';\ D_3' = D_4'; \tag{9}$$

$$A_2' = N_1^2A_3';\ B_2' = N_2^2B_3';\ C_2' = \frac{C_3'}{N_1^2} + \gamma_2A_3'N_1^2;\ D_2' = \frac{D_3'}{N_2^2} + \gamma_2N_2^2B_3';$$

$$A_3 = N_1M_1A_1';\ B_3 = \frac{N_2}{M_1}B_1' + \gamma_1N_1M_1A_1';\ C_3 = \frac{M_2}{M_1}C_1';$$

$$D_3 = \frac{D_1'}{M_2N_2} + \gamma_1\frac{M_2}{N_1}C_1';$$

$$A_1' = A_2' + \delta_2C_2'; \quad B_1' = B_2' + \delta_2D_2'; \quad C_1' = C_2'; \quad D_1' = D_2';$$

$$A_4 = A_3 + \delta_1B_3; \quad B_4 = B_3; \quad C_4 = C_3 + \delta_1D_3'; \quad D_4 = D_3,$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i — неопределенные множители;

$$M_{1,2} = \exp\left\{\frac{l_1 \pm i\varphi_1}{2}\right\};$$
$$N_{1,2} = \exp\left\{\frac{l_2 \pm i\varphi_2}{2}\right\}; \tag{10}$$
$$l_{1,2} = \frac{i}{4\sqrt{\beta}}\int\limits_{L_{1,2}}(k_1 \mp k_2)\,d\tau > 0;$$
$$L_1 = P_1O_1P_2O_2P_1;\ L_2 = P_1'O_2'P_2'O_1'P_1';$$

$\varphi_{1,2}$ — неопределенные набеги фаз, возникающие из предэкспонент. Возвращаясь в точку P_1 и требуя совпадения с (7), вследствие аналитичности решения получаем с учетом единственности решения

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = i\sqrt{1 - e^{-2l_1}}; \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \delta_2 = i\sqrt{1 - e^{-2l_2}};$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/4. \tag{11}$$

Формулы (9)—(11) решают задачу о склейке асимптотических решений (5). Отсюда легко находим

$$A_0' = e^{-l_1-l_2} A_0 + e^{-l_2}\sqrt{1-e^{-2l_1}}\, B_0 - e^{-l_1}\sqrt{1-e^{-2l_2}}\, C_0 + \\ + \sqrt{(1-e^{-2l_1})(1-e^{-2l_2})}\, D_0;$$

$$B_0' = -e^{-l_2}\sqrt{1-e^{-2l_1}}\, A_0 + e^{-l_1-l_2} B_0 + \\ + \sqrt{(1-e^{-2l_1})(1-e^{-2l_2})}\, C_0 + e^{-l_1}\sqrt{1-e^{-2l_2}}\, D_0; \tag{12}$$

$$C_0' = e^{-l_1}\sqrt{1-e^{-2l_2}}\, A_0 + \sqrt{(1-e^{-2l_1})(1-e^{-2l_2})}\, B_0 + \\ + e^{-l_1-l_2} C_0 - e^{-l_2}\sqrt{1-e^{-2l_1}}\, D_0;$$

$$D_0' = \sqrt{(1-e^{-2l_1})(1-e^{-2l_2})}\, A_0 - e^{-l_1}\sqrt{1-e^{-2l_2}}\, B_0 + \\ + e^{-l_2}\sqrt{1-e^{-2l_1}}\, C_0 + e^{-l_1-l_2} D_0,$$

где учтено, что в результате полуобхода происходит замена $x_\pm \to x_\mp$ и $y_\pm \to y_\mp$.

Формулы (12) полностью решают вопрос о распределении энергии по различным степеням свободы двух связанных осцилляторов при заданных начальных условиях.

Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы: в системе двух связанных осцилляторов с медленно меняющимися со временем параметрами $(\omega_1, \omega_2, \alpha)$ «внутренние резонансы» $(k_1 = \pm k_2)$ оставляют инвариантным действие системы

$$I = I_x + I_y; \quad I_x = \frac{E_x}{k_1}; \quad I_y = \frac{E_y}{k_2}, \tag{13}$$

где $E_{x,y}$ — энергия соответствующего осциллятора.

Действительно, из (12) следует, что преобразование от (A_0, B_0, C_0, D_0) к (A_0', B_0', C_0', D_0') является унитарным и оставляет инвариантной величину $|A_0|^2 + |B_0|^2 = |A_0'|^2 + |B_0'|^2$ $(C_0 = B_0^*;\ D_0 = A_0^*)$. Учитывая, что

$$\Pi_{1,2} = 1/\sqrt{k_{1,2}}; \quad A_0 = \bar{A}\sqrt{k_1}; \quad B_0 = \bar{B}\sqrt{k_2}, \tag{14}$$

где $\bar{A}$, $\bar{B}$ — амплитуды колебаний, приходим сразу к (13) $(E_x = |\bar{A}|^2 k_1^2,\ E_y = |\bar{B}|^2 k_2^2)$.

Существенно, что действия подсистем I_x, I_y могут не сохраняться. Между разными степенями свободы может происходить интенсивный обмен энергии, зависящий от частот k_1, k_2 и от параметров l_1, l_2. Величина последних определяется отношением $\Gamma/\sqrt{\beta}$.

В заключение выражаем благодарность акад. М. А. Леонтовичу за критические замечания и Р. З. Сагдееву и Б. В. Чирикову за интерес к работе и ценные дискуссии.

Поступило
27 VII 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Дыхне, ЖЭТФ, 38, 570 (1960). [2] В. Л. Покровский, И. М. Халатников, ЖЭТФ, 40, 1713 (1961). [3] Э. А. Колдингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958. [4] E. C. Stuckelberg, Helv. Phys. Acta, 5, 370 (1932). [5] Н. Г. Денисов, Тр. Горьковск. физ.-техн. инст., сер. физ., 35, 3 (1957). [6] W. Furry, Phys. Rev., 71, 360 (1947).