Доклады Академии наук СССР
1965. Том 161, № 4

ФИЗИКА

А. А. ГАЛЕЕВ

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ В СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком Г. И. Будкером 26 X 1964)

Впервые статистический механизм ускорения частиц был предложен Э. Ферми (1) для объяснения происхождения космических лучей. Он рассмотрел конкретно ускорение заряженной частицы в среде, состоящей из множества хаотически движущихся магнитных облаков. Выбор такой модели удобен в том отношении, что взаимодействие частиц с магнитными облаками можно представлять себе как обычные «столкновения» частиц малой и очень большой массы. Подсчет баланса энергии в системе из этих частиц разной массы показывает, что энергия, первоначально запасенная в магнитных облаках большой массы, стремится распределиться поровну между отдельными частицами и облаками. В реальных условиях турбулентное движение не обязательно представляет собой движение отдельных сгустков материи как целого. Очень часто его можно мыслить как набор слабовзаимодействующих между собой коллективных движений — колебаний среды. Так, мы остановимся, в частности, на ускорении частицы слаботурбулентной плазмой, в которой возбуждено огромное число собственных колебаний малой амплитуды. Ускорение частицы в этой модели уже нельзя представить так наглядно, как в модели Ферми (1), однако, ввиду малости амплитуд колебаний, слабое взаимодействие их между собой и с частицами плазмы можно изучать с помощью теории возмущений (2, 3) и получить точный количественный ответ.

Ускорение частиц вследствие обратного поглощения Черенкова колебаний плазмы, находящихся в резонансе с ускоряемыми частицами, появляется в первом порядке теории возмущений по слабому взаимодействию волн с частицами и подробно изучено в работах (4). В работах (4) показано, что условие резонанса $(\omega = \mathbf{kv})$ очень часто накладывает ограничения на скорость частицы, а следовательно, и ее энергию. Кроме того, наличие самого эффекта ускорения при этом существенно зависит от распределения энергии волн в фазовом пространстве $(\omega, \mathbf{k})$.

Мы остановимся здесь подробно на случае слабой стационарной турбулентности, представляющей собой набор большого числа низкочастотных $(\omega \ll \Omega_H = eH / Mc)$ длинноволновых $(k_z < v_{Ti} / \Omega_H,\ v_{Tj} = \sqrt{T_j / m_j})$ альфвеновских колебаний, распространяющихся почти вдоль невозмущенного магнитного поля H_{0z} * $(k_\perp \ll k_z)$. Флуктуирующие магнитные и электрические поля тогда можно представить в виде суммы полей отдельных колебаний постоянной амплитуды

$$\delta\mathbf{H} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{H}_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c. c.} \quad (1)$$

Для удобства определения поляризации волн предполагаем наличие малой компоненты волнового вектора поперек поля $\mathbf{k}_\perp$ и будем считать, что вектор электрического поля $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ перпендикулярен плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0)$:

* Такого рода турбулентное состояние может возникнуть, например, в результате развития «шланговой» неустойчивости в слабом магнитном поле (5) и малой анизотропии температур.

$$E_{\mathbf{k}} = [\mathbf{k} \times \mathbf{h}] E_k / k_{\perp}, \qquad \mathbf{h} \simeq \mathbf{H}_0 / H_0. \tag{2}$$

Связь же электрического и магнитного поля определяется уравнением Максвелла

$$\mathbf{H}_{\mathbf{k}} = \frac{c}{\omega_{\mathbf{k}}} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}}]. \tag{3}$$

В противоположность ([4]), будем рассматривать ускорение очень быстрых частиц, движущихся со скоростями v_{0z}, значительно бо́льшими фазовых скоростей альфвеновских волн ω / k_z и тепловых скоростей частиц $v_{Tj} = \sqrt{T_j / m_j}$. Для таких частиц закон сохранения энергии разрешает лишь процесс одновременного поглощения двух колебаний с близкими друг к другу по величине и противоположными по знаку «импульсами» k_z, k_z':

$$\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} = (k_z + k_z') v_{0z}, \qquad \omega_{\mathbf{k}},\ \omega_{\mathbf{k}'} > 0. \tag{4}$$

Для классических волновых полей малой амплитуды ($|\mathbf{H}_{\mathbf{k}}|^2 / 4\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}} \gg 1$, $\sum\limits_{\mathbf{k}} |\mathbf{H}_{\mathbf{k}}|^2 \ll H_0^2$), процесс (4) можно рассматривать в рамках классической теории возмущений ([2], [3]). Для этого, итерируя уравнение Больцмана в отсутствие столкновений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{e_j}{m_j c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_0] \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) f_j = - \frac{e_j}{m_j} \sum_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{E}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}}] \right) \frac{\partial f_j}{\partial v}; \quad j = i,\ e,$$

получаем разложение функции распределения частиц $f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ в ряд по степеням амплитуд волн:

$$f_j = f_{0j} + f^{j(1)} + f^{j(2)} + \ldots, \tag{5}$$

где последовательные приближения для $f^{j(n)}$ получаются с помощью итерационной формулы для соответствующих компонент Фурье ([6]):

$$f^{j(n+1)}_{\mathbf{k},\omega'+\omega''} = - \frac{e_j}{m_j} \int\limits_{-\infty}^{t} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \left(E_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}_{\mathbf{k}'\omega'}] \right) \frac{\partial f^{j(n)}_{\mathbf{k}''\omega''}}{\partial \mathbf{v}}\, dt'. \tag{6}$$

Интеграл (6) берется вдоль невозмущенной траектории частиц в магнитном поле:

$$\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j(t), \qquad \mathbf{v}_j(t) \simeq \{ v_{\perp} \cos(\theta_j - \omega_{Hj} t),\ v_{\perp} \sin(\theta_j - \omega_{Hj} t),\ v_z \}. \tag{7}$$

Невозмущенное же распределение частиц по скоростям выбирается в виде суммы максвелловского распределения основных частиц плазмы и монохроматического по скоростям распределения ускоряемых частиц

$$f_{0j}(\mathbf{v}, t) \simeq n_0 \left(\frac{m_j}{2\pi T_j} \right)^{3/2} e^{-m_j \mathbf{v}^2 / 2T_j} + \delta n_j \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{0j}(t)). \tag{8}$$

Затем с помощью (5)—(8) вычисляем ток частиц $\mathbf{j}$ с точностью до членов третьего порядка по амплитудам волн и вычисляем работу электрического поля над частицами $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ в предположении хаотичности фаз амплитуд. С помощью указанной процедуры мы получаем правильное математическое описание эффектов, квадратичных по энергии волн таких, как процесс (4), и находим полное изменение энергии частиц в единицу времени за счет этих процессов.

Перейдем теперь к непосредственному вычислению. Из (6)—(8) с помощью (2), (3) получаем разложение (5) в пренебрежении членами $\lambda \ll 1$

$$\simeq - \frac{e_j}{m_j} \sum_{n=\pm 1} \frac{J_n'(\lambda) \left[\frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) + \frac{k_z v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial}{\partial v_z} \right]}{\omega - k_z v_z - n\omega_{Hj}} f_{0j} e^{-in(\theta_j + \pi/2 - \delta_{\mathbf{k}}) + i[\mathbf{k} \times \mathbf{v}]_z / \omega_{Hi}} E_{\mathbf{k}},$$

$$
f^{j(2)}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}',\omega+\omega'} \simeq \frac{e_j^2}{m_j^2} \sum_{n=\pm 1} \frac{J_n'(\lambda') J_n(\lambda)\left(\dfrac{k_z}{\omega} - \dfrac{k_z'}{\omega}\right)\dfrac{\partial}{\partial v_z} f_{0j}}{\omega - k_z v_z - n\omega_{Hj}} \times
$$

$$
\times \frac{e^{-in(\delta_{\mathbf{k}}-\delta_{\mathbf{k}'})+i[\mathbf{k}\times\mathbf{v}]_z/\omega_{Hj}}}{\omega + \omega' - (k_z + k_z') v_z + i0} E_{\mathbf{k}'} E_{\mathbf{k}}, \qquad (9)
$$

$$
f^{j(3)}_{\mathbf{k},\omega} \simeq -\frac{e_j^3}{m_j^3} \sum_{l,n=\pm 1} \sum_{k'} \frac{J_l'(\lambda')\left[\dfrac{\partial}{\partial v_\perp}\left(1 - \dfrac{k_z v_z}{\omega}\right) + \dfrac{k_z v_\perp}{\omega}\dfrac{\partial}{\partial v_z}\right]}{\omega - k_z v_z - l\omega_{Hj}} \times
$$

$$
\times \frac{e^{-il(\theta+\pi/2-\delta_{\mathbf{k}'})}}{\omega + \omega' - (k_z + k_z') v_z + i0} \frac{J_n'(\lambda) J_n'(\lambda')\left(\dfrac{k_z}{\omega} - \dfrac{k_z'}{\omega'}\right)\dfrac{\partial}{\partial v_z} f_{0j}}{\omega - k_z v_z - n\omega_{Hj}} \times
$$

$$
\times e^{-in(\delta_{\mathbf{k}}-\delta_{\mathbf{k}'})+i[\mathbf{k}\times\mathbf{v}]_z/\omega_{Hj}} \, |E_{\mathbf{k}'}|^2 E_{\mathbf{k}},
$$

где $\lambda = k_\perp v_\perp / \omega_{Hj}$, $\mathbf{k} = \{-k_\perp \sin\delta_{\mathbf{k}},\ k_\perp \cos\delta_{\mathbf{k}},\ k_z\}$, $J_n(\lambda)$ — функция Бесселя.

Ток первого порядка по амплитуде $\mathbf{j}^{(1)}$ описывает лишь процессы испускания (поглощения) одного кванта колебания и нам неинтересен. Ток второго порядка по амплитудам поперечных колебаний $E_{\mathbf{k}'}$, $E_{\mathbf{k}''}$ при $k_\perp \to 0$ обращается в нуль. Однако две поперечные волны дают существенный вклад в колебания плотности заряда $\rho^{(2)}$ и потому способны возбудить продольное колебание с потенциалом $\varphi^{(2)}$, равным

$$
\varphi^{(2)}_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}'',\omega'+\omega''} \simeq \sum_j \frac{4\pi e_j}{(k''+k')^2} \int f^{j(2)}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}'',\omega'+\omega''} d\mathbf{v} \Big/ \varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}(\omega'+\omega''), \qquad (10)
$$

где

$$
\varepsilon_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}(\omega'+\omega'') \simeq 1 + \sum_j \frac{4\pi e_j^2}{(\mathbf{k}''+\mathbf{k}')^2} \int \frac{k_z (\partial f_{0j}/\partial v_z) J_0^2(\lambda)}{\omega'+\omega'' - (k_z'+k_z'') v_z + i0} d\mathbf{v}
$$

диэлектрическая проницаемость плазмы.

В свою очередь интерференция вынужденных продольных колебаний (10) с поперечными дает вклад в ток $\sim E_{\mathbf{k}}^3$, сравнимый с током (9) из-за интерференции трех поперечных колебаний непосредственно. С помощью (6) имеем для этого случая поправку для $f^{j(3)'}_{k,\omega'+\omega''}$

$$
f^{j(3)'}_{k,\omega'+\omega''} \simeq \frac{e_j^2}{m_j^2} \sum_{\substack{n=\pm 1\\ \mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}}} J_0(\lambda'') J_n'(\lambda') \left\{ \frac{k_z^4 \dfrac{\partial}{\partial v_z}}{\omega'+\omega'' - k_z v_z - n\omega_{Hj}} \times \right.
$$

$$
\times \frac{\dfrac{\partial}{\partial v_\perp}\left(1 - \dfrac{k_z' v_z}{\omega'}\right) + \dfrac{k_z' v_\perp}{\omega'}\dfrac{\partial}{\partial v_z}}{\omega' - k_z' v_z - n\omega_{Hj}} + \frac{\dfrac{\partial}{\partial v_\perp}\left(1 - \dfrac{k_z' v_z}{\omega'}\right) + \dfrac{k_z' v_\perp}{\omega'}\dfrac{\partial}{\partial v_z}}{\omega'+\omega'' - k_z v_z - n\omega_{Hj}} \times
$$

$$
\left. \times \frac{k_z'' \dfrac{\partial}{\partial v_z}}{\omega'' - k_z'' v_z + i0} \right\} f_{0j} E_{\mathbf{k}'\omega'} \varphi^{(2)}_{\mathbf{k}'',\omega''} e^{-in(\theta_j+\pi/2-\delta_{\mathbf{k}'})+i[\mathbf{k}\times\mathbf{v}]_z/\omega_{Hj}}. \qquad (11)
$$

Вычисляя с помощью (12)—(14) ток $\mathbf{j}$ и усредняя работу по фа[зам] амплитуд, получаем скорость изменения энергии частицы.

В случае не очень больших скоростей частиц $v_{Tj} < v_{0z}^j < \omega_{Hj}/k_z$ происходит значительное сокращение вкладов от токов (9)—(11), и о[...]

чательное выражение для работы $j\cdot E$ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\int {}^1\!/_2 m_j \mathbf{v}^2 \delta f_{0j} d\mathbf{v} = -{}^1\!/_4 \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \left(\frac{\omega}{k_z}-\frac{\omega'}{k_z'}\right)^2 \cdot \pi \cos^2(\delta_\mathbf{k}-\delta_{\mathbf{k}'})\, k_z^2 \frac{|H_\mathbf{k}|^2 |H_{\mathbf{k}'}|^2}{H_0^4} \times$$
$$\times \int \frac{m_j v_z^2}{2} v_z \frac{\partial \delta f_{0j}}{\partial v_z} \delta(\omega+\omega'-(k_z+k_z')v_z)\, dv_z.$$

Подставляя сюда (6), пренебрегая членами порядка $\sim \dfrac{\omega}{v_{0z}|H_\mathbf{k}|^2}\dfrac{d|H_\mathbf{k}|^2}{dk_z}$ и воспользовавшись вытекающим из (4) равенством фазовых скоростей взаимодействующих волн, имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{m_j v_{0j}^2}{2} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{0z}^2}\cdot 2\pi\cdot \cos^2(\delta_\mathbf{k}-\delta_{\mathbf{k}'})\, k_z |v_{0z}| \frac{|H_{\mathbf{k}'}|^2 |H_\mathbf{k}|^2}{H_0^4} \times$$
$$\times k_z \delta\left(k_z + k_z' - \frac{\omega+\omega'}{v_{0z}}\right)\frac{m_j v_{0z}^2}{2}. \qquad (12)$$

Это выражение очень напоминает формулу Э. Ферми ([1])

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = \left(\frac{V}{v}\right)^2 \frac{v}{l}\frac{mv^2}{2},$$

если подставить сюда вместо средней скорости облаков среднюю фазовую скорость магнитогидродинамических пульсаций $V \sim \omega/k_z$, вместо скорости v — ее скорость свободного движения v_{0z} вдоль силовых линий невозмущенного поля H_0 и, наконец, вместо длины свободного пробега l величину порядка длины волны пульсаций, увеличенную в $(H_0^2/\sum_\mathbf{k} |H_\mathbf{k}|^2)^2$ раз

$$^{-1} \simeq 2\pi \cdot \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} k_z |H_\mathbf{k}|^2 |H_{\mathbf{k}'}|^2 H_0^{-4} \cos^2(\delta_k - \delta_{\mathbf{k}'})\, k_z \delta\left(k_z + k_z' - \frac{\omega+\omega'}{v_{0z}}\right)).$$

Но при скоростях, бо́льших $v_{0z}^j > \omega_{Hj}/k_z$, ускорение подчиняется другому закону:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_j v_{0j}^2}{2} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{\omega^2}{k_z^2 v_{0z}^2}\, \pi \sin^2(\delta_\mathbf{k}-\delta_{\mathbf{k}'})\, k_z |v_{0z}| \frac{|H_{\mathbf{k}'}|^2 |H_\mathbf{k}|^2}{H_0^4} \times$$
$$\times k_z \delta(k_z + k_z' - (\omega+\omega')/v_{0z})\, m_j \omega_{Hj}^2/2k_z^2. \qquad (13)$$

Автор выражает благодарность Г. М. Заславскому и Р. З. Сагдееву за полезные замечания и обсуждение работы.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
15 X 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Fermi, Phys. Rev., 75, 1169 (1949). [2] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, З. Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961). [3] А. А. Галеев, В. И. Карпман, З. Сагдеев, Ядерный синтез, 4, № 4 (1964). [4] В. Н. Цытович, ЖЭТФ, 44, (1963); Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 5, 918 (1963). [5] А. А. Веденов, З. Сагдеев, Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 3, стр. 278. [6] M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker, Nuclear Fu- n. Supl., Part 1, 75 (1962).