ПМТФ, № 4, 1965

СЛАБАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В СРЕДАХ С РАСПАДНЫМ СПЕКТРОМ

В. Е. Захаров

(Новосибирск)

Теория слабой турбулентности плазмы исследовалась во многих работах [1–5]. Было установлено, что слабую турбулентность можно описывать при помощи кинетических уравнений для волн. При этом столкновительный член в кинетическом уравнении есть сумма двух существенно различных слагаемых. Первое из них имеет характер нелинейного затухания волн и отлично от нуля в тех случаях, когда существенно взаимодействие между волнами и частицами. Оно имеет сравнительно простую математическую природу и может быть проанализировано.

Второе слагаемое есть собственно столкновительный член, оно существенно зависит от вида спектра в среде и описывает обмен энергией между различными группами волн. Случай, когда главную роль играет это второе слагаемое в столкновительном члене, почти не изучен. Настоящая работа посвящена изучению этого случая.

Анализ проводится на простой изотропной модели среды с законом дисперсии, близким к линейному, но с положительной второй производной — будем называть такой спектр распадным. Эта модель существенно ближе к реальности, чем модель, рассмотренная в работе [6]. Результаты, полученные из этой модели, имеют, по-видимому, довольно общий характер и выражают существенные закономерности слабой турбулентности в средах с распадным спектром.

Основной результат работы следующий: кроме решения Рэлэй — Джинса, существует другое решение, обращающее в нуль столкновительный член. Это решение соответствует существенно неравновесному процессу и может осуществляться в реальных задачах, где всегда есть источники волн или переносные члены, играющие ту же роль, только в случаях, когда в среде имеется затухание волн с коэффициентом, достаточно быстро растущим в область больших k. При этом осуществляется как бы универсальный характер неравновесного процесса.

Обозначения

k — волновой вектор;
ω_k — частота волн;
$V_{kk'k''}$ — матричный элемент, описывающий взаимодействие волн;
u — переменная, описывающая среду;
a_k — комплексная амплитуда волн;
n_k — плотность волн в k-пространстве;
N_k — плотность волн в сферической нормировке;
ε — параметр, характеризующий дисперсию;
γ_k — плотность источников волн;
$\Gamma(s)$ — гамма-функция;
k_0 — граница области неустойчивости;
γk^α — декремент затухания;
k_1 — граница области прозрачности;
ν — инкремент неустойчивости.

Рассматриваются волны в среде, описываемой скалярной функцией координат и времени u. Эта величина подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\Delta - \varepsilon\Delta\Delta)\, u = \Delta u^2 \qquad (\varepsilon > 0) \quad (\Delta \text{ — оператор Лапласа}) \qquad (1)$$

Совершим преобразование Фурье по координатам

$$\frac{\partial^2 u_\mathbf{k}}{\partial t^2} + \omega_\mathbf{k}^2 u_\mathbf{k} = k^2 \int u_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} d\mathbf{k}' \qquad (\omega_\mathbf{k}^2 = k^2 + \varepsilon k^4) \qquad (2)$$

Перейдем к новым переменным,— комплексным амплитудам волн,

$$a_\mathbf{k} = \frac{u_\mathbf{k} + i\dot{u}_\mathbf{k}}{\sqrt{2k\omega_\mathbf{k}}}$$

Для этих величин получаем уравнение

$$a_{\mathbf{k}}^{\cdot} + i\omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} = -i \int V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} (a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}''} \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} + 2a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}''} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} + a_{\mathbf{k}'}^* a_{\mathbf{k}''}^* \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'+\mathbf{k}''})\, d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \quad (3)$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(\frac{k^2 k'^2 k''^2}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}''}} \right)^{1/2} \quad (4)$$

Будем рассматривать случай $k \ll 1 / \sqrt{\varepsilon}$. При этом можно положить

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \approx \frac{1}{\sqrt{8}} (|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|\,|\mathbf{k}''|)^{1/2} \quad (5)$$

Для получения кинетического уравнения к уравнению (3) нужно применить теорию возмущений. Выясним критерий ее применимости. Для этого совершим замену переменной

$$a_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t)$$

$$\frac{\partial c_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i \int V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} [c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}''} \exp(it(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}))\, \delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} + \ldots]\, d\mathbf{k}' d\mathbf{k}''$$

Выберем $c_{\mathbf{k}}^{\circ} = c\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0}$. Тогда

$$c_{\mathbf{k}}^{(1)} = c_1 \delta_{\mathbf{k}-2\mathbf{k}_0}, \qquad c_1 = \frac{V_{2\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0}}{\omega_{2\mathbf{k}_0} - \omega_{\mathbf{k}_0}} = \frac{c^2}{4\varepsilon\, |\mathbf{k}_0|^{3/2}}$$

Условие применимости теории возмущений есть

$$c_1 \ll c, \text{ или } n_{\mathbf{k}} \ll 16\varepsilon^2 k^3 \text{ для } n_{\mathbf{k}} = |c_{\mathbf{k}}|^2 \quad (6)$$

Условие (6) показывает, что чем меньше отклоняется спектр волн от линейного, тем меньше допустимая амплитуда волн, при которой можно пользоваться теорией возмущений и кинетическим уравнением. Это связано с тем, что при спектрах, близких к линейным, большую роль могут играть резонансные взаимодействия между волнами, не приводящие к хаотизации фаз.

Кинетическое уравнение для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial t} + 2\gamma_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2} \int (|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}'|\,|\mathbf{k}''|)^{1/2} \{\delta_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} \delta_{\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}} (n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''} - 2n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'}) + 2\delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} \delta_{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}'} - \omega_{\mathbf{k}''}} (n_{\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}''} + n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}''} - n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'})\}\, d\mathbf{k}' d\mathbf{k}'' \quad (7)$$

Будем искать сферически симметричные решения этого уравнения. Введем новую величину $N_k = k^2 n_{\mathbf{k}}$. Имеем после усреднения по углам

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} + 2\gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} = 2\pi^4 \operatorname{st}(N, N) = 2\pi^4 \Big\{ \int_0^k N_{k'} N_{k-k'} dk' - 4N_k \int_0^k N_{k'} dk' + 2\int_0^\infty N_{k'} N_{k+k'} dk' - \frac{4N_k}{k^2} \int_0^k k^2 N_k dk - \frac{8N_k}{k} \int_k^\infty k N_k dk \Big\}$$

При усреднении полагаем приближенно $\omega_k = |k|$. В этих уравнениях $2\gamma_k N_k$ — формально введенная плотность источников волн.

Исследуем свойства оператора $\operatorname{st}(N, N)$. Ясно, что он определен на функциях, убывающих при $k \to \infty$ быстрее, чем $1 / k^2$. На первый взгляд кажется, что эти функции будут давать расходимость на малых k. Однако это не так. Действительно, все расходящиеся на малых k члены группируются в интеграл

$$2 \int_0^{1/2 k} N_{k'} (N_{k-k'} - 2N_k + N_{k+k'})\, dk' \qquad \left(k'^2 N_{k'} \frac{\partial^2 N_k}{\partial k^2} \right)$$

Для малых k подынтегральное выражение имеет вид, указанный в скобках, т. е. расходимости сокращаются на два порядка.

Итак, областью определения оператора $\mathrm{st}\,(N, N)$ будут функции, убывающие при $k \to \infty$ быстрее $1 / k^2$ и растущие при $k \to 0$ медленнее, чем $1 / k^3$. Формально уравнению $\mathrm{st}\,(N, N) = 0$ удовлетворяет решение

$$N_k = T_k \qquad (T = \mathrm{const}) \tag{8}$$

Это решение есть распределение Рэлея — Джинса. Однако такие решения не входят в область определения оператора, и линеаризовать на фоне этих решений нельзя. Физически это означает, что при рассмотрении таких решений необходимо учитывать квантовые поправки.

Однако уравнение $\mathrm{st}\,(N, N) = 0$ имеет другие решения, принадлежащие области определения оператора. Будем искать решение в виде

$$N_k = \frac{L}{k^s} \qquad (2 < s < 3)$$

Тогда

$$\mathrm{st}\,(N, N) = \frac{L^2}{k^4} F(s) \qquad (L = \mathrm{const})$$

Здесь

$$F(s) = \frac{\Gamma^2(1-s)}{\Gamma(2-2s)} - \frac{4}{1-s} + 2\,\frac{\Gamma(1-s)\,\Gamma(2s-1)}{\Gamma(s)} - \frac{8}{s-2} + \frac{4}{3-s} \tag{9}$$

Исследование показывает, что $F(3) = +\infty$, $F(2) = -\infty$. Это значит, что функция $F(s)$ должна иметь нуль в интервале $2 < s < 3$.

Вычисление показывает, что нулем $F(s)$ является $s = 2.5$. Итак, уравнение $\mathrm{st}\,(N, N) = 0$ имеет решение

$$N_k = Ak^{-2.5} \tag{10}$$

Рассмотрим теперь задачу с источниками волн и выясним, в каких условиях может осуществляться решение, близкое к решению (10)

$$2\gamma_k N_k = 2\pi^4\,\mathrm{st}\,(N, N) \tag{11}$$

Обычно к этому уравнению применяется оценка

$$N \sim \gamma / \pi^4 k_0 \tag{12}$$

Здесь γ — характерное значение инкремента, а k_0 — характерный размер в k-пространстве, на котором меняется функция γ.

Однако эта оценка годится только в том случае, когда области неустойчивости и затухания не разделены областью прозрачности. Реально чаще всего осуществляется противоположный случай. Покажем, что как раз в этом случае можно воспользоваться решением типа (10).

Заметим сначала, что если умножить уравнение (10) на k и проинтегрировать от нуля до бесконечности, то правая часть уравнения (11) обратится в нуль. Получим

$$\int_0^\infty k\gamma_k N_k dk = 0 \tag{13}$$

Это соотношение выражает собой закон сохранения энергии.

Пусть теперь существует область неустойчивости с характерным инкрементом ν и характерным размером k_0, и, кроме этого, существует затухание вида

$$\gamma_k = \gamma\pi^{-4}k^{\alpha} \qquad (\alpha > 1/2)$$

Смысл этого условия будет ясен из дальнейшего. Обозначим теперь решение в области малых значений k через M_k; N_k решение в остальной области. Формально продолжив N_k в область малых k, можно записать уравнение (11) в виде

$$\gamma k^{\alpha} N_k = \int_0^k N_{k'} N_{k-k'} dk' - 4N_k \int_0^k N_{k'} dk' + 2\int_0^{\infty} N_{k'} N_{k+k'} dk' - \frac{4N_k}{k^2}\int_0^k k'^2 N_{k'} dk' -$$

$$- \frac{8N_k}{k}\int_k^{\infty} k' N_{k'} dk' + 2\int_0^{k_0} (M_{k'} + N_{k'})(N_{k-k'} - 2N_k + N_{k+k'})\, dk' -$$

$$- \frac{4N_k}{k^2}\int_0^{k_0} k'^2 (M_{k'} - N_{k'})\, dk'$$

При $k \gg k_0$ последние два члена можно преобразовать к виду

$$A\left(\frac{\partial^2 N_k}{\partial k^2} - \frac{4N_k}{k^2}\right) \qquad \left(A = \int_0^{k_0} k'^2 (M_{k'} - N_{k'})\, dk'\right) \tag{14}$$

Если γ достаточно мало́, то можно искать решение в виде

$$N_k = Bk^{-2.5} \tag{15}$$

Тогда первые члены уравнения имеют порядок $B^2 k^{-4}$, а члены типа (14) имеют порядок $ABk^{-4.5}$, и, следовательно, при больших k их влиянием можно пренебречь. Решение типа (15) будет справедливо вплоть до тех k, когда каждый из интегралов, входящих в штосс-член, не сравняется с членом затухания, т. е. до k_1, определяемых соотношением

$$\gamma k_1^{\alpha-2.5} B \sim B^2 k_1^{-4}, \quad \text{или} \quad k_1 \sim \left(\frac{B}{\gamma}\right)^{1/\alpha+1.5} \tag{16}$$

При $k > k_1$ решение быстро затухает.

Для определения величины B воспользуемся соотношением (13). Имеем

$$\nu k_0^2 \frac{B}{k_0^{2.5}} \sim \gamma B \int_0^{k_1} k^{-1.5+\alpha} dk \tag{17}$$

Все такие рассуждения верны, если главный вклад в интеграл, стоящий в правой части соотношения (17), дают большие k (иначе неправомерно пренебрежение влиянием области неустойчивости). Отсюда получаем $\alpha > {}^1/_2$. Из отношения (17) находим

$$B \sim \gamma^{-\frac{1}{\alpha - {}^1/_2}} \left[\frac{\nu(\alpha - {}^1/_2)}{k_0^{{}^1/_2}}\right]^{\frac{\alpha + {}^3/_2}{\alpha - {}^1/_2}} \tag{18}$$

Все это верно, если существует значительная область прозрачности, т. е. если $k_1 \gg k_0$. Вычисление k_1 дает условие

$$\nu(\alpha - {}^1/_2) \gg \gamma k_0^{\alpha} \tag{19}$$

Это неравенство может быть удовлетворено при достаточно малом γ.

Сравнение формул (18) и (12) показывает, что оценки решений в этих двух предельных случаях существенно различны.

Из всего изложенного выше видно, что решение типа (10) может осуществляться при наличии двух условий — широкой области прозрачности и достаточно быстро растущего коэффициента затухания. Последнее требование есть требование существенной неравновесности задачи. При этих условиях решение в области прозрачности имеет универсальный вид. Аналогичное явление происходит в обычной турбулентности, где в области прозрачности устанавливается колмогоровский спектр. Однако механизмы установления универсального решения в этих двух случаях существенно различны. Именно, в случае обычной турбулентности жидкости взаимодействуют между собой масштабы одного порядка, так что можно ввести понятие потока энергии по спектру турбулентности и получить спектр из соображений размерности. В нашем же случае взаимодействуют одновременно все масштабы. Найденное решение не может быть получено из соображений размерности; вообще говоря, оно зависит от характера взаимодействия волн.

Рассмотрим возможность обобщения полученных выше результатов. В общем случае распадная турбулентность характеризуется двумя факторами — спектром волн $\omega_{\mathbf{k}}$ и матричным элементом $V_{\mathbf{kk'k''}}$, описывающим взаимодействие, причем $\omega_{\mathbf{k}}$ — положительная, выпуклая снизу функция и $V_{\mathbf{kk'k''}}$ — положительная функция, симметричная по последним двум индексам. Выберем

$$\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|^s \, (s > 1), \qquad V_{\mathbf{kk'k''}} = (|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k'}|\,|\mathbf{k''}|)^t \tag{20}$$

Тогда, рассматривая изотропные решения кинетического уравнения, можно перейти к переменной $\omega = k^s$. Получим

$$\frac{\partial N_\omega}{\partial t} + 2\gamma_\omega N_\omega = 2\pi^4 s^2 \omega^{t-1/s} \left\{ \int\limits_0^\omega \omega'^p (\omega - \omega')^p N_{\omega'} N_{\omega-\omega'} d\omega' - \right.$$

$$- 2N_\omega \int\limits_0^\omega \omega'^p [(\omega - \omega')^p + (\omega + \omega')^p] N_{\omega'} d\omega' + 2 \int\limits_0^\infty \omega'^p (\omega + \omega')^p N_{\omega'} N_{\omega+\omega'} d\omega' -$$

$$\left. - 2N_\omega \int\limits_0^\infty \omega'^p [(\omega + \omega')^p - (\omega - \omega')^p] N_{\omega'} d\omega' \right\} \qquad \left(p = \frac{t - s + 2}{s}\right) \tag{21}$$

Так же как и в рассмотренном выше случае, структура первых трех интегралов в столкновительном члене такова, что расходимости в нуле сокращаются на два порядка. Будем искать решение, зануляющее столкновительный член в виде

$$N_\omega = L / \omega^q$$

Нетрудно видеть, что допустимые значения q лежат в интервале

$$2p < q < p + 3 \tag{22}$$

Отсюда следует, что $p < 3$. Результат применения столкновительного члена к функции q есть выражение

$$\frac{L^2}{\omega^{2q-2p+1}} Q(q)$$

где функция $Q(q)$ обращается в бесконечность на границах интервала (22). Элементарное исследование показывает, что при $q = p + 3$ бесконечность — всегда положительного знака, а при $q = 2p$ знак бесконечности противоположен знаку p. Требование, чтобы бесконечности эти были разных знаков, достаточное для существования степенного решения, приводит к условию $0 < p < 3$. Отсюда получаем

$$s - 2 < t < 4s - 2$$

При таких условиях на t и s уравнения распадной турбулентности для задачи вида (20) имеют универсальное неравновесное решение.

Можно полагать, что полученные результаты справедливы для более общих $\omega_{\mathbf{k}}$ и $V_{\mathbf{kk'k''}}$.

В заключение автор благодарит Р. З. Сагдеева за обсуждение работы.

Поступила 28 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Camac M., Kantorowitz A. et all. Collisionless shock waves in plasma. (Ядерный синтез. Дополнение, ч. 2, 1962, стр. 423).
2. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. Об одной решаемой проблеме в теории турбулентности. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 5, стр. 1088.
3. Веденов А. А. Вопросы теории плазмы, т. 3. Госатомиздат, 1963, стр. 203.
4. Галеев А. А., Карпман В. И. Ударные волны в плазме, помещенной в магнитное поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 592.
5. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Турбулентность плазмы, помещенной в магнитное поле. Ж. эксперим. и теор. физ., 1962, т. 43, стр. 2234.
6. Захаров В. Е. Решаемая модель слабой турбулентности. ПМТФ, 1965, № 1.