ПМТФ, № 6, 1965

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ПРИМЕНЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ

Е. Я. Коган, С. С. Моисеев, В. Н. Ораевский

(Новосибирск)

В настоящей работе для исследования устойчивости неоднородной замагниченной плазмы по отношению к возмущениям, в которых электрическое поле можно считать потенциальным ($\mathrm{rot}\, E \approx 0$), используются магнитогидродинамические модели.

В бесстолкновительной плазме для изучения движений поперек сильного магнитного поля используется гидродинамическая модель, являющаяся по существу расширением известной модели Чу — Гольдбергера — Лоу [1]. Приведен полный тензор вязких напряжений, включающий, наряду с «магнитной вязкостью», так называемую «инерционную вязкость».

В случае сильных столкновений ($\nu \gg \omega$) используется обычная двухжидкостная гидродинамика. Показано, что столкновительная вязкость приводит к неустойчивости «желобкового» типа в том случае, когда без учета столкновений «желобковая» мода застабилизирована конечным ларморовским радиусом. Рассмотрен также случай, когда надтепловые высокочастотные колебания (не приводящие непосредственно к аномальной диффузии) вызывают, аналогично «столкновительной» электронной вязкости, неустойчивость на низкочастотных (дрейфовых) колебаниях, приводящую к аномальной диффузии.

Обозначения

f — функция распределения частиц;
E_α — компонента электрического поля;
H_0 — магнитное поле;
ρ — плотность;
V — скорость частиц;
e — заряд;
m, M — масса электрона и иона;
Ω_i, Ω_e — ионная и электронная циклотронные частоты;
$\pi_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений;
P — давление;
$p_{\alpha\beta}$ — тензор давления;
t — время;
ω — частота;
T — температура;
ν — частота столкновений;
τ — время столкновений;
j — плотность тока;
ω_i, ω_e — дрейфовые ионная и электронная частоты;
k_x, k_y, k_z — компоненты волнового вектора;
n_0 — плотность частиц;
r_i — ларморовский радиус;
g — ускорение силы тяжести;

Известно, что магнитогидродинамическая модель описания плазмы корректна при условии, что длина свободного пробега частицы много меньше размера, на котором существенно меняются макровеличины, а также $\nu \gg \omega$, где ν — частота столкновений, ω — «частота» процесса ($\omega \sim 1 / t_0$, a t_0 — характерное время процесса). В случае $\nu \ll \omega$ при наличии сильных магнитных полей магнитогидродинамическая модель пригодна для описания движения поперек магнитного поля.

§ 1. Рассмотрим получение системы гидродинамических уравнений для движения плазмы при полном пренебрежении столкновениями.

При получении системы магнитогидродинамических уравнений удобно воспользоваться методом моментов Грэда [2]. Кинетическое уравнение, проинтегрированное по продольным (параллельным магнитному полю) хаотическим скоростям v_z, имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{e}{M} E_\beta^* \frac{\partial f}{\partial v_\beta} - \frac{dV_\alpha}{dt} \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} v_\beta \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} + \Omega_i [\mathbf{v} \times \mathbf{h}]_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\left(E_\beta^* = E_\beta + [\mathbf{V} \times \mathbf{h}]_\beta, \quad \frac{dV_\alpha}{dt} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + V_\beta \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}\right)$$

Здесь M — масса ионов, Ω_i — ионная циклотронная частота, $\mathbf{v}$ — хаотическая часть скорости частицы, V — массовая скорость частиц (так что $\mathbf{u} = \mathbf{v} + V$ — полная скорость частицы); $\mathbf{h}$ — орт в направлении магнитного поля $\mathbf{H}_0$; остальные обозначения общеприняты; α — индекс, пробегающий значения x, y. Из (1.1) обычным путем получаем систему уравнений для моментов до третьего момента включительно:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + V_\beta\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial\pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{e}{M}\rho E_\alpha + \Omega_i[\mathbf{V}\times\mathbf{h}]_\alpha \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\frac{dP_{\alpha\beta}}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_\gamma}(S_{\alpha\beta\gamma}) + \frac{dV_\varepsilon}{\partial x_\gamma}(\delta_{\gamma\varepsilon}P_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\varepsilon}P_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\varepsilon}P_{\alpha\gamma}) - \\ -\Omega_i(P_{\alpha\varepsilon}[e_\varepsilon\times\mathbf{h}]_\beta + P_{\beta\varepsilon}[\mathbf{e}_\varepsilon\times\mathbf{h}]_\alpha) = 0 \qquad (\boldsymbol{P}_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta})\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\frac{dp}{dt} + 2p\operatorname{div}\mathbf{V} = -\pi_{\alpha\beta}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\operatorname{div}\mathrm{S} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered}\frac{dS_{\alpha\beta\gamma}}{dt} + \frac{\partial Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda}\{\delta_{\mu\alpha}P_{\beta\gamma} + \delta_{\mu\beta}P_{\alpha\gamma} + \delta_{\mu\gamma}P_{\alpha\beta}\} + \\ + \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_\mu}(\delta_{\mu\lambda}S_{\alpha\beta\gamma} + \delta_{\alpha\lambda}S_{\mu\beta\gamma} + \delta_{\beta\lambda}S_{\alpha\mu\gamma} + \delta_{\gamma\lambda}S_{\alpha\beta\mu}) + \\ + \Omega_i\varepsilon_{\eta\lambda\mu}h_\lambda\{\delta_{\alpha\mu}S_{\eta\beta\gamma} + \delta_{\beta\mu}S_{\alpha\eta\gamma} + \delta_{\gamma\mu}S_{\alpha\beta\eta}\} = 0\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{e}_1^2 = 1, \quad (\mathbf{e}_1\mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_1\times\mathbf{h}]$$

$$P_{\alpha\beta} \equiv \int v_\alpha v_\beta f dv, \qquad S_{\alpha\beta\gamma} = \int v_\beta v_\beta v_\gamma f dv, \qquad Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \equiv \int v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\varepsilon f dv$$

Здесь p — давление; $P_{\alpha\beta}$ — тензор напряжений; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера; $\pi_{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений. Отметим, что

$$S_p\pi_{\alpha\beta} \equiv \pi_{xx} + \pi_{yy} = 0, \qquad \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha}$$

При помощи приведенных уравнений нетрудно убедиться, что показатель адиабаты для данного движения $\gamma = 2$ (см. также [1]).

Для случая $\tau^\circ/t_0 \ll 1$, $r^\circ/L \ll 1$ (τ° — время обращения по ларморовой окружности, r° — ее радиус, L и t_0 — характерные пространственный и временной параметры задачи), $S_{\alpha\beta\gamma}$ и $Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}S_{\alpha\beta\gamma} = {}^1/_4(\delta_{\alpha\beta}S_\gamma + \delta_{\alpha\gamma}S_\beta + \delta_{\beta\gamma}S_\alpha) \\ Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = \frac{pT}{M}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\varepsilon} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\varepsilon} + \delta_{\alpha\varepsilon}\delta_{\beta\gamma}) + \\ + \frac{T}{M}(\delta_{\alpha\beta}\pi_{\gamma\varepsilon} + \delta_{\alpha\gamma}\pi_{\beta\varepsilon} + \delta_{\alpha\varepsilon}\pi_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma}\pi_{\alpha\varepsilon} + \delta_{\beta\varepsilon}\pi_{\alpha\gamma} + \delta_{\gamma\varepsilon}\pi_{\alpha\beta})\end{gathered} \tag{1.7}$$

Используя (1.7), уравнения (1.4) и (1.6) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial\pi_{\alpha\beta}}{\partial t} + \pi_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V} - \pi_{\gamma\varepsilon}\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\varepsilon}\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial S_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathrm{S}\right) + \\ + \pi_{\alpha\mu}\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\mu} + \pi_{\beta\mu}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\mu} + p\left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\mathbf{V}\right) - \\ - \Omega_i\{\pi_{\alpha\mu}[\mathbf{e}_\mu\times\mathbf{h}]_\beta + \pi_{\beta\mu}[\mathbf{e}_\mu\times\mathbf{h}]_\alpha\} = 0\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{dS_\alpha}{dt} + 4\frac{P_{\alpha\beta}}{M}\frac{\partial T}{\partial x_\beta} + 2p\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\pi_{\alpha\beta}}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\left\{S_\alpha\operatorname{div}\mathbf{V} + \right. \\ \left. + S_\beta\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{3}S_\beta\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\right\} - \Omega_i[S\times\mathbf{h}]_\alpha = 0\end{gathered}$$

Удерживая в (1.8) линейные члены для возмущений величин вида $\exp(i\omega t)$, получим разложением по $\omega / \Omega_i \ll 1$ выражение для тензора вязких напряжений

$$\pi_{yy} = -\pi_{xx} = \frac{p}{2\Omega_i}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \frac{i\omega p}{4\Omega_i^2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{2\Omega_i^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}T \tag{1.9}$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{p}{2\Omega_i}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) - \frac{i\omega p}{4\Omega_i^2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) - \frac{1}{2\Omega_i^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{M}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\}T$$

$$S_x = -\frac{1}{\Omega_i}\left\{\frac{4p}{M}\frac{\partial T}{\partial y} + 2p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_{xy}}{\rho}\right) + 2p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi_{yy}}{\rho}\right)\right\}$$

$$S_y = \frac{1}{\Omega_i}\left\{\frac{4\rho}{M}\frac{\partial T}{\partial x} + 2p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_{xx}}{\rho}\right) + 2p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\pi_{xy}}{\rho}\right)\right\} \tag{1.10}$$

Здесь T — температура, ρ — плотность.

В (1.9) члены первого порядка по ω / Ω_i соответствуют выражениям для «магнитной» вязкости, полученным в [3].

Следующий член описывает так называемую «инерционную» вязкость. Заметим, что выражение для тензора вязких напряжений в [3] не имеет предельного перехода к случаю $\nu_i \to 0$ (ν_i — частота ион-ионных столкновений). Для дальнейшего выпишем эти выражения в «столкновительном» случае при $\Omega_i \tau \gg 1$ в системе координат с осью z, параллельной магнитному полю H_0 [3]

$$\pi_{xx} = -\frac{p}{2\nu_i}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{0.3p\nu_i}{2\Omega_i^2}(W_{xx} - W_{yy}) - \frac{p}{2\Omega_i}W_{xy}$$

$$\pi_{yy} = -\frac{p}{2\nu_i}(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{0.3p\nu_i}{2\Omega_i^2}(W_{yy} - W_{xx}) + \frac{p}{2\Omega_i}W_{xy} \tag{1.11}$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = -\frac{0.3p\nu_i}{\Omega_i^2}W_{xy} + \frac{p}{2\Omega_i}(W_{xx} - W_{yy})$$

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\,\mathrm{div}\,\mathbf{V}$$

§ 2. Исследуем «желобковую» неустойчивость в двух предельных случаях: для плазм — бесстолкновительной и с большой частотой столкновений. В первом случае, используя уравнения (1.2), (1.3) (1.5), (1.9), (1.10) с учетом гравитационного потенциала, квазинейтральности плазмы и потенциальности возмущений соответственно

$$\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \tag{2.1}$$

удерживая члены по $(\omega / \Omega_i)^2$ включительно, можно, с точностью до некоторых несущественных членов, получить следующее уравнение для возмущений вида $\varphi(x)\exp(i\omega t + ikr)$ (плазма предполагается неоднородной вдоль x):

$$\frac{3}{4}\frac{\omega}{\omega-\omega_i}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} - k_y^2\left(\frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega-\omega_i} - \frac{gk_0}{(\omega-\omega_i)^2} - \alpha\frac{\omega}{\omega-\omega_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + k_y^4\left\{\frac{3}{4}\frac{\omega}{\omega-\omega_i} - \frac{gk_0}{(\omega-\omega_i)^2} - \alpha\left[\frac{\omega}{\omega-\omega_i} - \frac{gk_0}{(\omega-\omega_i)^2}\right]\right\}\varphi = 0 \tag{2.2}$$

$$\omega_i = k_y k_0 \frac{cT}{eH}, \qquad k_0 \equiv \frac{h_0'}{n_0}, \qquad \alpha = \frac{1}{k_y^2 r_i^{\circ 2}}$$

Уравнение (2.2) записано в лабораторной системе отсчета с осью z, параллельной магнитному полю. Здесь g — ускорение силы тяжести, ω_i— ионная дрейфовая частота, n_0—невозмущенная плотность, r° —ионный ларморовский радиус, штрих означает дифференцирование по x.

Исследуем решения (2.2) в предположении $\omega_i^2 > gn_0' / n_0$, т. е. когда решения дифференциального уравнения второго порядка не приводят к неустойчивости. Наличие нулей U_2 (U_2 — коэффициент при второй производной), как известно [4], может привести к запутыванию всех четырех решений и проявлению новых дисперсионных свойств плазмы. Как видно из (2.2), для достаточно коротких волн ($\lambda_2 \gtrsim r^\circ$) качественно правильный результат получим, пренебрегая членом $\sim \varphi$ и анализируя решения $U_2 = 0$. При этом видим, что в отличие от [4] для двумерного движения в чисто «бесстолкновительном» режиме неустойчивые решения отсутствуют. Отметим, что если $\omega_i^2 \lesssim gk_0$, т. е. инкременты неустойчивого решения малы, то точки $U_2 \approx 0$ лежат в окрестности вещественной оси. В этом случае решения запутываются и интегральный вклад от моды $k_2 \sim \sqrt{\alpha U_2}$ для финитных решений может оказаться самым существенным, что приводит к улучшению критерия устойчивости

$$\omega_i^2 > gk_0 / \alpha$$

Для получения уравнения в случае сильных столкновений воспользуемся соотношениями (1.2), (1.3) (1.11) в гравитационном поле. При возмущениях $\varphi(x) \exp(i\omega t + ik_y y)$ для $\Omega_i \tau \gg 1$ получим

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{1}{r_i^2}\left(\frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} - 2\beta\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{k_y^2}{r_i^2}\varphi\left(-\frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} + \frac{gk_0}{i\nu_i \omega} + \beta\right) = 0 \qquad (2.3)$$

$$\beta = 1/\alpha = k_y^2 r^{\circ 2}{}_i$$

Здесь ν_i — частота ион-ионных столкновений.

В случае, когда влияние четвертой производной несущественно, для финитных решений качественно правильный результат, как известно [4], получим из условия $U_1 \approx 0$ (U_1 — коэффициент при φ), что дает

$$\omega^2 - \omega(\omega_i + i\beta\nu_i) - gk_0 = 0 \qquad (2.4)$$

Видим, что (2.4) содержит неустойчивые решения также и в случае $\omega_i^2 > gn_0' / n_0$, когда в отсутствие столкновений желобковые возмущения застабилизированы. Причем в случае $\omega_i^2 \gg gk_0$ имеем

$$\operatorname{Re}\omega \approx -\frac{gk_0}{\omega_i}, \qquad \operatorname{Im}\omega \sim -\frac{|gk_0|\nu_i\beta}{\omega_i^2} \qquad (2.5)$$

Важно отметить, что уравнение (2.3) будет содержать неустойчивые решения, если вместо обычных столкновений к вязкой диссипации будет приводить другая неустойчивость, что формально приведет лишь к другому выражению для коэффициента «вязкости». (Как стало известно, А. В. Тимофеев и Д. И. Рютов также обратили внимание в случае желобковых возмущений на влияние коллективной вязкости.) Наличие нулей U_2 приводит к необходимости учета четвертой производной, что, как нетрудно видеть, уменьшает инкремент данной неустойчивости.

§ 3. В предыдущем разделе было, в частности, показано, что учет ион-ионных столкновений может привести к развитию желобковой неустойчивости даже в условиях, когда ларморовский радиус ионов велик ($\omega_i^2 > gk_0$). Хорошо известно, что и в ряде других случаев (см., например, [5-17]) учет диссипативных эффектов может приводить к появлению новых неустойчивостей. Так, электрон-ионное трение приводит к развитию дрейфово-диссипативной неустойчивости, вызывающей диффузию

Бома [5]. Все эти неустойчивости, обязанные учету столкновений, представляются мало опасными в высокотемпературном режиме, когда частота соударений падает. Однако необходимо иметь в виду, что диссипативные эффекты могут возникать за счет некоторых других «затравочных» неустойчивостей, и тогда даже при отсутствии обычных соударений, вообще говоря, создаются условия для раскачки диссипативных неустойчивостей. Возможность такого эффекта была ранее отмечена авторами [1].

Здесь рассмотрим влияние высокочастотных колебаний на развитие дрейфово-диссипативной неустойчивости.

Предварительно обратим внимание, что «продольная» вязкость электронов приводит к дестабилизации плазмы на дрейфовых волнах подобно электрон-ионному трению. В самом деле, из уравнения для продольного движения электронов

$$- ik_z n_0 T_0 - e n_{0e} E_z + \eta \Delta_{11} v - m n_{0e} v_{0z} \nu_{ei} = 0 \tag{3.1}$$

где k_z — волновой вектор вдоль z, e — заряд, n_{0e} — невозмущенная плотность электронов, ν_{ei} — эффективная частота электрон-ионных соударений. Видно, что член $\eta\Delta_{11}v$ аналогичен члену, характеризующему ион-электронное трение и, следовательно, также оказывает дестабилизирующее действие. Однако в условиях применимости обычной гидродинамики за счет парных столкновений вязкий член в $(\lambda_e / \lambda_{11})^2$ меньше электрон-ионного трения и поэтому несуществен. Пусть теперь столкновения отсутствуют, но в плазме развились высокочастотные электронные колебания, вызванные пучковой неустойчивостью, которые приводят к некоторой эффективной «вязкости» электронного газа (взаимодействие с такими колебаниями, как известно, эквивалентно электрон-электронным столкновениям [8]). В качестве примера рассмотрим пучковую неустойчивость, исследованную в [9]. Квазилинейное уравнение для пучка имеет вид

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^2}{m^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{|E_k|^2}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \tag{3.2}$$

где f — функция распределения частиц пучка, $|E_k|$ — амплитуда пульсаций поля, согласно [9], по порядку величины составляет

$$|E_k| \sim n_0 m \frac{v^3}{\omega_0} \exp\left(\frac{t}{\tau_p}\right) \qquad \left(\omega_0 = \left(\frac{4\pi N_{0e} e^2}{m}\right)^{1/2}\right) \tag{3.3}$$

Здесь n_0 — невозмущенная плотность пучка, ω_0 — частота плазменных колебаний, N_{0e} — невозмущенная плотность электронов плазмы, τ_p — время установления «плато» на функции f.

В случае $n_0 \ll N_{0e}$ еще несущественно нелинейное взаимодействие волн, а для электронов плазмы можно воспользоваться системой гидродинамических уравнений (см. [9]).

Чтобы оценить влияние высокочастотных колебаний на интересующую нас дрейфово-диссипативную неустойчивость, необходимо фактически вычислить эффективное τ (время) электронных соударений в пучке. Из (3.2) и (3.3) для $t \sim \tau_p$ получим

$$\tau \sim \frac{\sqrt{N_{0e}}}{n_0} \frac{1}{\omega_0^*} \tag{3.4}$$

Здесь ω_0^* — плазменная частота для плотности пучка. Выражение (3.4) справедливо, когда резонансные электроны имеют скорости порядка средних тепловых.

[1] Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Доклад на II Всесоюзном съезде механиков. М., январь 1964 г.

Далее, для случаев низкочастотных потенциальных возмущений $\sim \exp(i\omega t + ik_y y + ik_z z)$, воспользуемся следующими соотношениями. Уравнением движения холодных ионов поперек магнитного поля

$$MN_{0i}\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = eN_{0i}\mathbf{E}_\perp + \frac{e}{c}N_{0i}[\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{H}_0] \tag{3.5}$$

Уравнением движения электронов пучка вдоль направления

$$-ik_z nT_0 - en_0E_z - k_z^2\tau n_0T_0 v = 0 \tag{3.6}$$

Условием квазинейтральности

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{3.7}$$

Тогда можно получить дисперсионное уравнение (движением) электронов плазмы вдоль $\mathbf{H}_0$

$$1 - i\frac{\omega_s}{\omega k_z^2\lambda_e^2}\frac{n_0}{N_{0e}}\left[1 - \frac{\omega_e}{\omega}\right] = 0, \qquad \omega_s = \frac{\Omega_i\Omega_e}{\nu_e}\frac{k_z^2}{k_y^2}, \qquad \omega_e = \frac{N_{0e}'}{N_{0e}}k_y\frac{cT}{eH} \tag{3.8}$$

Здесь n, N_e, N_i — возмущенная плотность электронов пучка, электронов плазмы, ионов соответственно, T — температура, ν_e — электронная циклотронная частота, ν_e — частота «электронных» соударений, λ_e — длина свободного пробега электронов ($\lambda_e \sim v\tau$, v — тепловая скорость электронов), ω_e – дрейфовая электронная частота, N_{0e}' — производная N_{0e} по x (направление неоднородности).

Условие малости вклада затухания Ландау на электронах имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k_z^2v^2} \ll \frac{\omega_s}{\omega k_z^2\lambda_e^2}\frac{n_0}{N_{0e}} \tag{3.9}$$

Тогда при $\omega_s^* \gg \omega_e$, $\omega_0^*(n_0 / N_{0e})^{-1/2} \gg \omega_e$ (последнее неравенство есть условие применимости гидродинамики для дрейфовых движений электронов пучка) получим

$$\operatorname{Im}\omega \sim \frac{\omega_e^2k_z^2\lambda_e^2N_{0e}}{\omega_s n_0}, \qquad \omega_s^* = \frac{\omega_s n_0}{k_z^2\lambda_e^2N_{0e}} \tag{3.10}$$

Обратим внимание, что инкремент не зависит от k_z, поэтому перекрещенность силовых линий магнитного поля непосредственно не влияет на развитие неустойчивости в пределах применимости данного результата.

Таким образом, высокочастотные колебания, которые непосредственно к диффузии не приводят, могут, однако, служить косвенной причиной возникновения диффузии на низкочастотных колебаниях.

Авторы благодарят А. А. Галеева за ценные дискуссии.

Поступила 28 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Chew G., Goldberger M., Low F. The Boltzman equation and one-fluid Hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. Proc. Roy. Soc., 1956, vol. 236, p. 112.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
3. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. «Вопросы физики плазмы», 1963, т. 1.
4. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости. ПМТФ, 1964, № 6.
5. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. О коэффициенте диффузии Бома. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, № 2, стр. 763.
6. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Универсальная неустойчивость плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, вып. 3, стр. 903.
7. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория устойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия. Атомная энергия, 1963, т. 6.
8. Кадомцев Б. Б. Сб. «Вопросы теории плазмы», М., 1964, т. 4.
9. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д. Квазилинейная теория возбуждения колебаний при инжекции электронного пучка в плазменное полупространство. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 47, вып. 4(10), стр. 1388.