

ФОКУСИРОВКА ИНТЕНСИВНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В УСКОРИТЕЛЬНОЙ ТРУБКЕ

И. Н. Мешков и Б. В. Чириков

В настоящей работе рассмотрено прохождение интенсивного электронного пучка через прямолинейную ускорительную трубку. Одной из основных задач при этом является фокусировка пучка, т. е. обеспечение небольших поперечных размеров пучка и малой угловой расходимости. Вопросам фокусировки электронных пучков посвящено большое количество работ (см., например [1]); однако, насколько нам известно, до сих пор не рассматривалась динамика релятивистского пучка с учетом собственного поля и при наличии продольного ускоряющего поля.

§ 1. Уравнения движения

Исходим из уравнений движения ($e = m = c = 1$)¹

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dz}{dt} \right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}; & \gamma &= (1 - \beta^2)^{-1/2}, \\ \frac{d}{dt} \left(\gamma \frac{dy}{dt} \right) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f; & \beta^2 &= \dot{z}^2 + \dot{y}^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где y — поперечная координата (рис. 1); φ — электростатический потенциал внешнего поля (с обратным знаком), подчиняющийся уравнению $\Delta \varphi = 0$ и определяемый граничными условиями на ускоряющих электродах; f — сила, связанная с объемным зарядом и равная разности электростатического расталкивания f_E и магнитного стягивания $f_H = -f_E \dot{z}^2$.
 Результирующая сила

$$f = f_E (1 - \dot{z}^2) \simeq \frac{f_E}{\gamma^2}. \quad (1.2)$$

Заметим, что обычно используемое последнее приближенное выражение справедливо лишь при $\dot{y}^2 \ll 1 - \dot{z}^2$, т. е. при $\theta \ll \frac{1}{\gamma}$, где θ — угол наклона траекторий электрона к оси пучка.

В дальнейшем будем рассматривать два случая: аксиально-симметричную (I) и ленточную (II) геометрию. Как обычно [1], будем считать пучок „ламинарным“ (отсутствуют пересечения траекторий) и достаточно резко ограниченным в поперечном направлении. Тогда можно рассмотреть движение только граничного электрона, для которого

$$f_E = \frac{2J}{y\beta} \text{ (I); } f_E = \frac{2\pi J}{b\beta}, \text{ (II)} \quad (1.3)$$

где J — полный ток пучка, а b — ширина ленточного пучка.

¹ Приводим перевод некоторых единиц из системы ($e = m = c = 1$ в практическую: $\varphi_1 = \frac{mc^2}{e} \simeq 5 \cdot 10^5$ в; $J_1 = \frac{mc^3}{e} \simeq 17\,000$ а; $W_1 = mc^2 \simeq 5 \cdot 10^5$ эв.

В уравнениях (1.1), мы не учитываем продольной составляющей сил пространственного заряда. Это допустимо при условии, что разность потенциалов за счет объемного заряда (φ^*) много меньше кинетической энергии электронов $W = \gamma - 1$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi^*}{W} \sim \frac{J}{W\beta} \simeq \frac{W+1}{\sqrt{W+2}} \frac{J}{W^{3/2}} \ll 1 \text{ (I),} \\ \frac{\varphi^*}{W} \sim \frac{W+1}{\sqrt{W+2}} \frac{J}{W^{3/2}} \frac{y_0}{b} \ll 1 \text{ (II),} \end{aligned} \right\}$$

где y_0 — апертура ускорительной трубки (рис. 1).

Уравнение траекторий следует из (1.1) и имеет вид [для случая (I)]

$$\frac{\varphi(\varphi+2)}{\varphi-1} \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dy}{dz} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2J}{y(\varphi+1)\sqrt{\varphi(\varphi+2)}}, \quad (1.4)$$

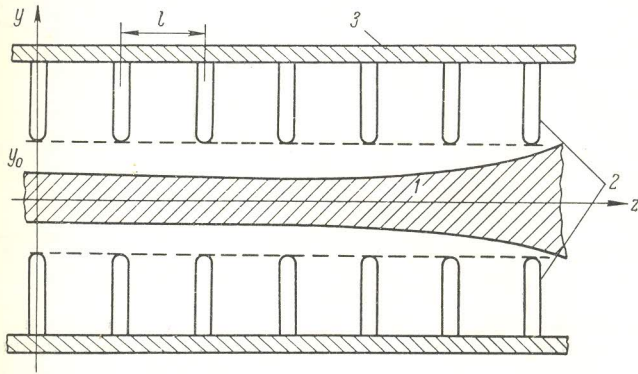


Рис. 1. Схема ускорительной трубки.

1 — электронный пучок; 2 — ускоряющие электроды; 3 — изолятор; y_0 — половина апертуры трубки; l — расстояние между электродами.

где φ выбрано равным кинетической энергии. В случае (II) в правой части (1.4) нужно произвести замену $y \rightarrow \frac{b}{\pi}$.

Вместо z вводим независимую переменную u по формуле

$$\varphi(z) = \text{ch } u - 1. \quad (1.5)$$

Пересчет от φ к u и обратно удобно производить, пользуясь графиком на рис. 6.

Уравнение (1.4) принимает вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \frac{d^2y}{du^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \frac{dy}{du} \text{sh } u - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \text{ch } u = \frac{2J}{y \text{sh } u}. \quad (1.6)$$

Заметим, что замена переменных (1.5) применима только при дополнительном условии взаимно-однозначного соответствия между z и u , которое может нарушаться, если потенциал $\varphi(z)$ содержит большую переменную составляющую (см. § 4). Преобразование (1.5) полезно, если ускоряющее поле является почти однородным, так что $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \approx \text{const}$, а $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ мало.

§ 2. Пучок без ускорения

В уравнении (1.4) $\varphi = \gamma - 1 = \text{const}$

$$y \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{2J}{[\varphi(\varphi + 2)]^{3/2}} = 2A^2. \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения имеет вид [1]

$$A \frac{z - z^*}{y^*} = \int_0^{\sqrt{\ln \frac{y}{y^*}}} e^{t^2} dt, \quad (2.2)$$

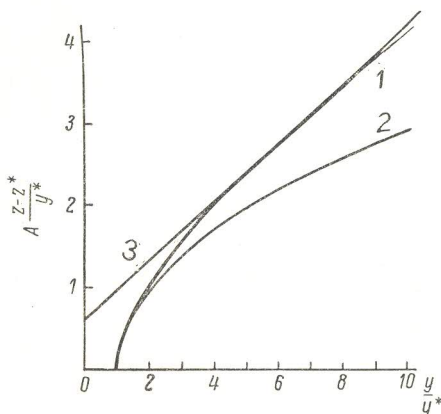


Рис. 2. Расширение пучка без ускорения.

1 — точное решение (2.2); 2 — решение в линейном приближении (2.3); 3 — приближенное решение (2.4).

где y^* — значение $y(z)$, при котором $y' = 0$. Оказывается, что в практически интересных случаях решение (2.2) может быть аппроксимировано с хорошей точностью решением линейризованного уравнения $\eta'' = \frac{2A^2}{y_n}$, где y_n — начальное значение $y = y(0)$; $\eta = y - y_n \ll y_n$. Решение имеет вид

$$y \approx y_n + \left(\frac{dy}{dz}\right)_n z + \frac{A^2 z^2}{y_n}. \quad (2.3)$$

На рис. 2 представлены оба решения для случая $y_n' = 0$. Если нас удовлетворяет точность в 10%, то формулу (2.3) можно применять до $y = 2.5y^*$. При больших $\frac{y}{y^*}$ точное решение (2.2) можно аппроксимировать линейной зависимостью (прямая на рис. 2)

$$z = 0.60 + 0.37 \left(\frac{y}{y^*}\right). \quad (2.4)$$

Наибольшая ошибка в месте перехода от (2.3) к (2.4) при $\left(\frac{y}{y^*}\right) \approx 3$ составляет около 15%.

Для ленточного пучка [случай (II)] уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{2\pi A^2}{b}; \quad A = \frac{\sqrt{J}}{[\varphi(\varphi + 2)]^{3/4}}. \quad (2.5)$$

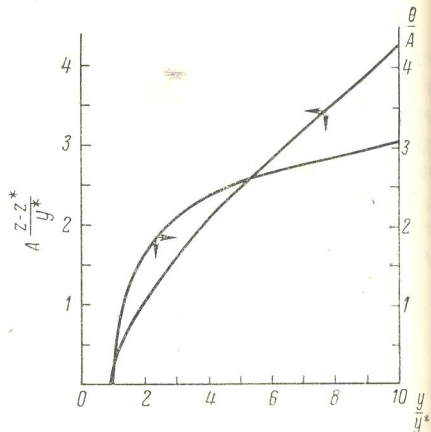


Рис. 3. Универсальные кривые для расчета движения пучка без ускорения с учетом пространственного заряда.

y^* — наименьший размер пучка; z^* — положение y^* ; $\theta = \frac{dy}{dz}$; $A = \sqrt{J} [\varphi(\varphi + 2)]^{-3/4}$ (см. рис. 4). Шкалы для кривых указаны стрелками. Подробное описание использования кривых дано в § 2.

Отсюда

$$y = y_{н.} + \left(\frac{dy}{dz}\right)_{н.} z + \frac{\pi A^2 z^2}{b}. \quad (2.6)$$

По кривой $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$ на рис. 2 можно рассчитывать расширение пучка для частного случая, когда вначале пучок является параллельным. В общем случае для расчета движения пучка необходимо знать угол наклона траектории крайнего электрона

$$\theta \approx \frac{dy}{dz} = 2A \sqrt{\ln \frac{y}{y^*}}.$$

Эта зависимость представлена на рис. 3 вместе с функцией $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$. ($A=f(\varphi)$ представлена на рис. 4). Порядок расчета следующий: по начальному углу наклона траектории и начальному размеру пучка определяем из кривой $\theta\left(\frac{y}{y^*}\right)$ наименьший размер пучка для данного случая, а из кривой $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$ его положение (z^*). Затем, пользуясь кривой $z\left(\frac{y}{y^*}\right)$, вычисляем дальнейшее расширение пучка. Напомним, что пучок является симметричным относительно z^* .

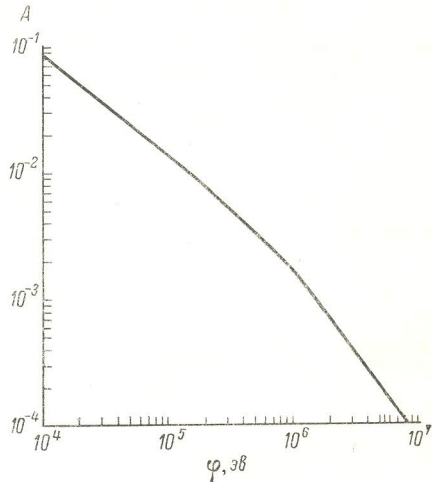


Рис. 4. График зависимости $A(\varphi)$ для $J=1$ а.

$$A = \sqrt{J} [\varphi(\varphi + 2)]^{-3/4}.$$

§ 3. Ускорение в однородном поле

Уравнение (1.6) принимает в этом случае вид $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} = E_0 = \text{const}\right)$

$$y \frac{d^2y}{du^2} = \frac{2J}{E_0^2 \text{sh } u} = \frac{2B}{\text{sh } u}. \quad (3.1)$$

Линеаризуя это уравнение, получаем

$$\frac{d^2\eta}{du^2} = \frac{2B}{y_{н.} \text{sh } u}, \quad (3.2)$$

откуда

$$y \approx y_{н.} + \left(\frac{dy}{du}\right)_{н.} (u - u_{н.}) + \frac{2B}{y_{н.}} \int_{u_{н.}}^u \ln \text{th} \frac{u}{2} du - \frac{2B}{y_{н.}} (u - u_{н.}) \ln \text{th} \frac{u_{н.}}{2}, \quad (3.3)$$

где $\frac{dy}{du} = \frac{\theta}{E_0} \sqrt{\varphi(\varphi + 2)}$.

Графики функций $-\ln \text{th} \frac{u}{2}$ и $-\int_0^u \ln \text{th} \frac{x}{2} dx$ приведены на рис. 5. При $u, u_{н.} \ll 1$ приближенно получаем

$$y - y_{н.} \approx \frac{2B}{y_{н.}} u_{н.} \ln \frac{u}{u_{н.}} + (u - u_{н.}) \left\{ \left(\frac{dy}{du}\right)_{н.} + \frac{2B}{y_{н.}} \left(\ln \frac{u}{u_{н.}} - 1\right) \right\}. \quad (3.4)$$

При $u \gg 1$, но $u_{н.} \ll 1$, (рис. 6) имеем

$$y - y_{н.} \approx 4.91 \frac{B}{y_{н.}} + (u - u_{н.}) \left\{ \left(\frac{dy}{du}\right)_{н.} + \frac{2B}{y_{н.}} \ln \frac{2}{u_{н.}} \right\}. \quad (3.5)$$

Из (3.4) и (3.5) видно, что эффект пространственного заряда выражается в виде добавки к начальному углу расходимости

$$\delta\theta \approx \frac{2J}{E_0 y_n} [\sqrt{\varphi_n (\varphi_n + 2)}]^{-1/2} \times \begin{cases} \ln \frac{u}{u_n} - 1; & u \ll 1, \\ \ln \frac{2}{u_n}; & u \gg 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

и начальному размеру пучка

$$\delta y_n \approx \frac{2J}{E_0^2 y_n} \times \begin{cases} u_n \ln \frac{u}{u_n}; & u \ll 1, \\ 4.91 \frac{B}{y_n}; & u \gg 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

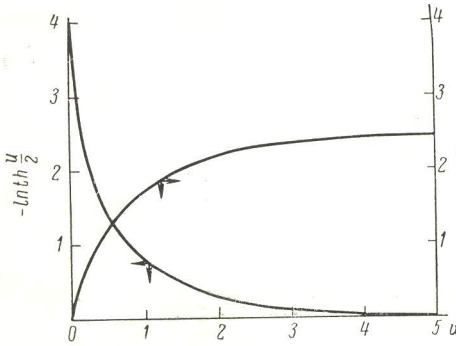


Рис. 5. К расчету движения пучка в однородном ускоряющем поле с учетом пространственного заряда в линейном приближении по формуле (3.3).

Шкалы для кривых указаны стрелками.

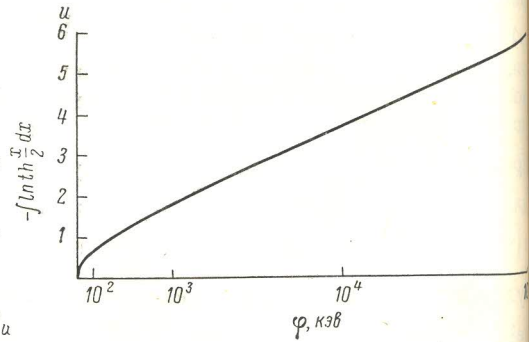


Рис. 6. Зависимость $u(\varphi)$ (1.5): $u \approx \sqrt{2\varphi}$ при $\varphi \leq 1$ (500 кэВ) и $u \approx \ln 2\varphi$ при $\varphi \geq 1$.

Для ленточного пучка (случай (II), § 1) решение (3.3) является точным, причем в правых частях формул (3.2) ÷ (3.7) вместо y_n необходимо подставить величину $\frac{b}{\pi}$.

§ 4. Фокусировка пучка периодическим полем

Будем исходить из уравнения (1.6). Примем, что вблизи оси ($ky \ll 1$) электростатический потенциал имеет вид (см. § 5)

$$\varphi(z) = E_0 z + \varepsilon \left(1 + \frac{k^2 y^2}{4} \right) \cos kz. \quad (4.1)$$

В соответствии с выбором потенциала в § 1 точка $z = 0$ выбирается таким образом, чтобы $E_0 z = \gamma - 1$ (см. также § 5). Постоянная ε считается малой ($\varepsilon \ll \varphi$) и определяется граничными условиями (см. § 5). Уравнение (1.6) с точностью до ε^2 принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{du^2} - \frac{dy}{du} \frac{\varepsilon k^2 \cos kz}{E_0^2 \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz \right)} \operatorname{sh} u - y \frac{\varepsilon k^2 \cos kz}{2E_0^2 \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz \right)} \operatorname{ch} u = \\ = \frac{2J}{y E_0^2 \left(1 - \frac{2\varepsilon k}{E_0} \sin kz \right) \operatorname{sh} u}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Связь z и u дается выражением (1.5)

$$\operatorname{ch} u = 1 + E_0 z + \varepsilon \cos kz. \quad (4.3)$$

Для взаимно-однозначного соответствия переменных z , u необходимо, чтобы $E_0 > \varepsilon k$. Иными словами, формулы этого параграфа не применимы при очень слабом ускоряющем поле (см. § 2). Примем, что $k \gg E_0$, т. е. переменная u мало изменяется на расстоянии $\sim k^{-1}$. В этом случае уравнение (4.2) можно решать методом усреднения^[2]. Для этого представляем величину y в виде суммы двух слагаемых: медленно меняющегося (y) и малого, но быстро (так как $k \gg E_0$) осциллирующего (η), т. е. $y \rightarrow y + \eta$ ($\eta \ll y$). Подставляя это выражение в (4.2), производим разделение уравнения на медленную (4.4) и осциллирующую (4.5) части, которые должны равняться нулю независимо. Первое уравнение получается усреднением (4.2) по быстрым осцилляциям

$$y'' - \frac{\varepsilon k^2}{E_0^2} \left(y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \overline{\cos kz}^u - \frac{4\varepsilon k J}{y E_0^3 \operatorname{sh} u} \overline{\sin kz}^u - \frac{\varepsilon k^2}{E_0^2} \left(\operatorname{sh} u \overline{\eta' \cos kz}^u + \frac{\operatorname{ch} u}{2} \overline{\eta \cos kz}^u \right) = \frac{2J}{y E_0^2 \operatorname{sh} u}. \quad (4.4)$$

Это уравнение написано с точностью до членов $\sim \varepsilon^2$. Черта означает усреднение по переменной u . Уравнение для η содержит все осциллирующие слагаемые (4.2) после подстановки в него $y + \eta$. Точностью до членов $\sim \varepsilon$ уравнение имеет вид

$$\eta'' + \frac{2J}{y^2 E_0^2 \operatorname{sh} u} \eta = \frac{\varepsilon k^2}{E_0^2} \left(y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \cos kz. \quad (4.5)$$

В соответствии с принятым выше условием $k \gg E_0$ величины $\operatorname{sh} u$ и $\operatorname{ch} u$ в уравнениях (4.4), (4.5) считаются постоянными. Частота функции $\cos kz$ по переменной u равна (4.3)

$$\frac{d(kz)}{du} = \frac{k \operatorname{sh} u}{E_0 - \varepsilon k \sin kz} \approx \frac{k \operatorname{sh} u}{E_0} \equiv k \left(\frac{dz}{du} \right)_0. \quad (4.6)$$

С точностью $\sim \varepsilon$ решение уравнения (4.5) есть

$$\eta = - \frac{\varepsilon \left(y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right) \cos kz}{\operatorname{sh}^2 u \left(1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)}. \quad (4.7)$$

Это выражение необходимо подставить в (4.4) и произвести усреднение, тогда имеем

$$\overline{\eta' \cos kz} \sim \overline{\sin kz \cos kz} = 0, \\ \overline{\cos kz} = - \frac{\varepsilon \left(y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right)}{\operatorname{sh}^2 u \left(1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)} \overline{\cos^2 kz} = - \frac{\varepsilon \left(y' \operatorname{sh} u + y \frac{\operatorname{ch} u}{2} \right)}{2 \operatorname{sh}^2 u \left(1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u} \right)}. \quad (4.8)$$

Так как уравнение (4.4) написано с точностью $\sim \varepsilon^2$ а $\eta \sim \varepsilon$, то усреднение в (4.8) достаточно провести в нулевом приближении по ε , тогда усреднение по z или по u приводит к одинаковому результату. Однако при вычислении $\overline{\cos^2 kz}^u$ это уже не так: чтобы получить общую точность $\sim \varepsilon^2$, усреднение необходимо провести с точностью $\sim \varepsilon$.

Имеем

$$\overline{\cos kz}^u = \frac{1}{T_u} \int_0^{T_u} \cos kz \frac{du}{dz} dz = \frac{T_z}{T_u} \overline{\cos kz} \frac{du^z}{dz} = \\ = \frac{T_z}{T_u} \left(\frac{du}{dz} \right)_0 \overline{\cos kz} \left(1 - \frac{\varepsilon k}{E_0} \sin kz - \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} \varepsilon \cos kz \right)^z = - \frac{\varepsilon \operatorname{ch} u}{2 \operatorname{sh}^2 u}. \quad (4.9)$$

Здесь T_z , T_u — периоды быстрых осцилляций по z и u соответственно. Ввиду неравенства $k \gg E_0$ $\frac{T_z}{T_u} \approx \left(\frac{du}{dz}\right)_0$ с точностью $\sim \varepsilon^0$. Аналогично

$$\overline{\sin kz}^u = -\frac{\varepsilon k}{2E_0}. \quad (4.10)$$

Из (4.4)—(4.10) получаем

$$\begin{aligned} y'' + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2 \operatorname{cth} u (2y' + y \operatorname{cth} u) \frac{1 - \frac{4J}{3k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u}}{1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \operatorname{sh}^3 u}} = \\ = \frac{2J}{y E_0^2 \operatorname{sh} u} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 k^2}{E_0^2}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для сравнения полученного уравнения с работами [3, 4] необходимо перейти к случаю $E_0 = 0$. Как было отмечено выше, прямой переход невозможен ввиду условия $E_0 > \varepsilon k$. Однако можно показать, что, применяя аналогичную процедуру усреднения непосредственно к (1.1) получим при $E_0 = 0$ уравнение

$$\ddot{y} + \frac{3}{8} \frac{(\varepsilon k)^2}{\gamma^2 \beta^2} y \frac{1 - \left(\frac{4J}{3k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)}{1 - \left(\frac{2J}{k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)} = \frac{2J}{y \beta \gamma^3}. \quad (4.12)$$

В этом уравнении член $\sim y$ характеризует среднюю фокусирующую силу в периодическом поле. Полученное для нее выражение совпадает (за исключением резонансного множителя)

$$\frac{\left(1 - \frac{4J}{3k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)}{\left(1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3}\right)}$$

с результатом работы [3, 4] (при переходе к нерелятивистскому случаю). Что касается резонансного множителя, то он практически несущественно. Действительно, для пучка без ускорения резонанс был бы существовать лишь в том случае, если пучок не расплывается, так как в противном случае изменение y нарушает условие резонанса. Это значит, что расплывание пучка должно компенсироваться фокусирующей силой, т. е. должно быть

$$\varepsilon^2 = \frac{16}{3} \frac{J}{(ky)^2} \frac{\beta}{\gamma}. \quad (4.13)$$

Отсюда резонансный знаменатель

$$1 - \frac{2J}{k^2 y^2 \gamma^3 \beta^3} = 1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon}{\gamma \beta^2}\right)^2 \approx 1,$$

так как $\gamma \beta^2 \sim \varphi \gg \varepsilon$ (см. выше).

Член $\sim y'$ в (4.11) характеризует затухание колебаний пучка, связанное с ускорением электронов; при переходе к случаю $E_0 = 0$ затухание исчезает [см. также (1.4)]. Уменьшение действия объемного заряда (множитель $\left[1 - \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2\right]$) в (4.11) также связано с ускорением [см. (4.12)]. Этот эффект мал в силу неравенства $\varepsilon k \ll E_0$, которое необходимо для преобразования знаменателя в (4.2), и в дальнейшем не учитывается.

В силу сделанных выше замечаний уравнение (4.11) принимает вид

$$y'' + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2 \operatorname{cth} u (2y' + y \operatorname{cth} u) = \frac{2J}{y E_0^2 \operatorname{sh} u}. \quad (4.14)$$

Рассмотрим квазистационарный случай ($y'' \approx y' \approx 0$), когда имеет место соотношение (4.13). При заданном ε это соотношение определяет зависимость размера пучка y от энергии электронов. Максимальный размер пучка соответствует $\gamma = \sqrt{2}$ ($W = (\gamma - 1)mc^2 \approx 200$ кэВ) и равен

$$(ky)_{\max}^2 = \frac{8}{3} \frac{J}{\varepsilon^2}. \quad (4.15)$$

Для квазистационарности необходимо, чтобы период колебаний пучка из (4.14) был бы много меньше времени ускорения ($\Delta u \sim 1$), т. е. должно быть

$$\frac{\varepsilon k}{E_0} \operatorname{cth} u \gg 1. \quad (4.16)$$

Это условие может выполняться лишь в нерелятивистском случае ($u \ll 1$). Невыполнение неравенства (4.16) означает наличие колебаний пучка вокруг равновесного значения (4.13). Эти колебания затухают из-за своеобразного „трения“ (член $\sim y'$ в (4.14)), связанного с ускорением электронов. С другой стороны, в нерелятивистском случае амплитуда колебаний растет в связи с уменьшением частоты: $y \sim \sqrt{u}$. Последний процесс оказывается более сильным, чем затухание, декремент которого $\sim \frac{(\varepsilon k)^2}{u} \ll 1$, если не выполнено условие (4.16).

Нетрудно видеть, что для перехода к ленточной геометрии необходимо произвести замену $\frac{J}{y} \rightarrow \frac{\pi J}{b}$, а также положить резонансный множитель и множитель $\left[1 - \left(\frac{\varepsilon k}{E_0}\right)^2\right]$ равными единице.

§ 5. Расчет периодического поля в ускорительной трубке

Коэффициент ε , характеризующий фокусировку периодическим полем, определяется граничными условиями, заданными на электродах ускорительной трубки. Мы ограничимся простейшим случаем одинаковых электродов, расположенных на равном расстоянии друг от друга и с одинаковой разностью потенциалов между ними (рис. 1). В соответствии с этими условиями электрическое поле в трубке представим в виде суперпозиции однородного ускоряющего поля и периодического

$$\varphi(y, z) = E_0 z + \varphi_{\sim}(y, z). \quad (5.1)$$

Решение уравнения $\Delta \varphi_{\sim} = 0$ в случае цилиндрической геометрии есть^[4] (см. (5.3))

$$\varphi_{\sim}(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_0((2n+1)k_0 y) \cos(2n+1)k_0 z, \quad (5.2)$$

где $I_0(x) = J(ix)$ — функция Бесселя мнимого аргумента; $k_0 = \frac{\pi}{l}$. Коэффициенты C_n определяются из граничных условий, которые наиболее удобно рассмотреть при $y = y_0$ (рис. 1). Наиболее простым способом создания переменного поля в ускорительной трубке является попарное замыкание соседних ускоряющих электродов; ход потенциала при $y = y_0$ показан для этого случая на рис. 7, а. Граничные условия для периодической части потенциала показаны на рис. 7, б. При малой толщине

электродов по сравнению с l функцию $\varphi_{\sim}(y_0, z)$ можно считать пилообразной с наклоном $\pm E_0$. Разлагая ее в ряд Фурье

$$\varphi_{\sim}(y_0, z) = -\frac{E_0 l}{2} + \frac{4E_0}{\pi k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)k_0 z}{(2n+1)^2} \quad (5.3)$$

и подставляя в (5.2), находим коэффициенты C_n и решение

$$\varphi_{\sim}(y, z) = -\frac{E_0 l}{2} + \frac{4E_0}{\pi k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_0((2n+1)k_0 y) \cos(2n+1)k_0 z}{I_0((2n+1)k_0 y_0) (2n+1)^2}. \quad (5.4)$$

Постоянное слагаемое $-\frac{E_0 l}{2}$ относим к члену $E_0 z$, передвинув соответствующим образом начало отсчета: $z \rightarrow z - \frac{l}{2}$. При $k_0 y_0 \gg 1$ (чаще

расположенные электроды с большой апертурой) $I_0 \approx \exp((2n+1)k_0 y_0) \times \sqrt{2\pi(2n+1)k_0 y_0}$. Сравнивая (5.4) и (4.1), находим

$$(\varepsilon k)^2 = \frac{16E_0^2}{\pi^2 I_0^2(k_0 y_0)} \approx \frac{32}{\pi} E_0^2 k_0 y_0 e^{-2k_0 y_0}. \quad (5.5)$$

В этом случае существенна только первая гармоника потенциала. Если наоборот, $k_0 y_0 \ll 1$, то потенциал (4.1) будет представлять собою сумму многих гармоник. Нетрудно проследить, что в окончательную формулу (4.14) вместо $(\varepsilon k)^2$ нужно подставить величину

$$(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2 = \frac{16}{\pi^2} E_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} I_0^{-2}((2n+1)k_0 y_0) = \frac{1}{l} \int_0^{2l} E_{\sim}^2(0, z) dz, \quad (5.6)$$

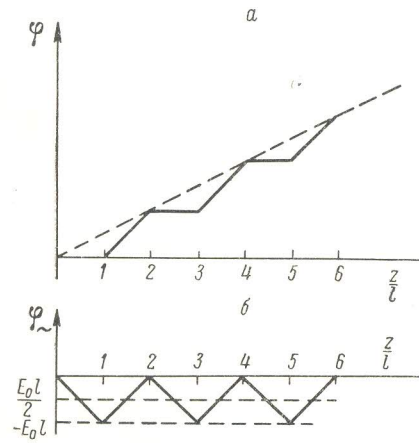


Рис. 7. Граничные условия в ускорительной трубке (§ 5).

где E_{\sim} — переменное электрическое поле на оси. Выражение $(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2$ является универсальной функцией безразмерного аргумента $k_0 y_0$, которая приведена на рис. 8 (кривая I).

Все проведенные в работе расчеты справедливы при условии $(nk_0 y_0)^2 \ll 1$, когда апертура электродов существенно больше размера пучка.

В случае ленточной геометрии поле во всем объеме трубки будем считать двумерным, т. е. $b \gg y_0$. В таком случае во всех формулах этого параграфа необходимо произвести замену $I_0(x) \rightarrow \text{ch } x$. График зависимости $(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2$ от $k_0 y_0$ для этого случая также приведен на рис. 8 (кривая II).

При $k_0 y_0 \gg 1$ имеем в частности

$$(\varepsilon k)^2 \approx \frac{32}{\pi^2} E_0^2 e^{-2k_0 y_0}. \quad (5.7)$$

Если же $k_0 y_0 \rightarrow 0$, то $(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2$ достигает максимального значения, од-

накового для обеих геометрий и равного: $\frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} \approx 1.95$. Такое

большое значение недопустимо ввиду условия $\varepsilon k \ll E_0$, использованного в § 4. Фактически необходимо, чтобы это неравенство выполнялось для наиболее сильной первой гармоники. На границе применимости ($\varepsilon k \approx E_0$ для $n=1$) $(k_0 y_0)_{\min} \approx 0.72$ и $\frac{(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2}{E_0^2} \approx 1$ для ленточной геометрии; для цилиндрической геометрии $(k_0 y_0)_{\min} \approx 1.0$ и $\frac{(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2}{E_0^2} \approx 1$.

Оценим предельное значение ε с точки зрения устойчивости периодической фокусировки. Согласно формулам (4.4), (4.8), (4.9), фокусирующая сила пропорциональна множителю $\cos^2 kz$, для которого в окончатель-

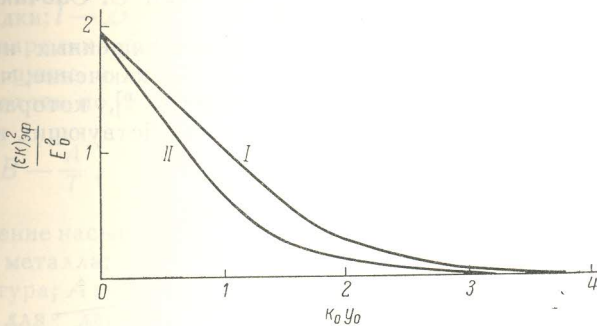


Рис. 8. Зависимость фокусирующей силы от параметров ускорительной трубки (§ 5).

I — цилиндрическая геометрия; II — ленточная геометрия.

ном уравнении принято среднее значение $1/2$. Если вместо этого использовать точное значение $\cos^2 kz = \frac{1}{2}(1 + \cos 2kz)$, то вместо (4.14) получим уравнение Матье

$$y'' + \frac{3}{8} \left(\frac{\varepsilon k}{E_0} \operatorname{cth} u \right)^2 (1 + \cos 2kz) y = 0. \tag{5.8}$$

Члены с J и y' для простоты опущены, а $\operatorname{cth} u$ считается постоянным согласно неравенству $k \gg E_0$ (§ 4). Принимая во внимание значение частоты (4.6), получим условие устойчивости в 1-й зоне в виде [5]

$$\varepsilon < \frac{4}{3} \frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch} u}. \tag{5.9}$$

Из полученных выше максимальных значений $(\varepsilon k)_{\text{эф.}}^2$ и формулы (4.15) следует выражение для предельного тока, который может ускоряться в трубке, не расплываясь

$$J \approx \frac{3}{8} (E_0 y)^2. \tag{5.10}$$

Если принять $E_0 \sim 10^4$ в/см и $y \sim 1$ см, получаем $J \sim 2$ а.

Авторы выражают благодарность Е. А. Абрамьяну за ценные дискуссии, И. Д. Багбая и А. Г. Борискину за помощь в работе.

Литература

- [1] Н. С. Зинченко. Курс лекций по электронной оптике. Харьков, 1961. — [2] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1953. — [3] А. М. Clogston, H. Heffner. J. Appl. Phys., 25, 436, 1954. — [4] Ring King Tien. J. Appl. Phys., 25, 1281, 1954. — [5] Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.

Поступило в Редакцию
15 марта 1965 г.
В окончательной редакции
12 июля 1965 г.