

## ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНА ПРИ РОЖДЕНИИ ПАРЫ МЮОНОВ В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОМ СТОЛКНОВЕНИИ

*В. Н. Байер, В. А. Хозе*

С помощью простого метода, существенно опирающегося на калибровочную, зарядовую и лоренц-инвариантность, вычислено точное интегральное сечение излучения фотона при рождении пары мюонов в электрон-позитронном столкновении.

### 1. Введение

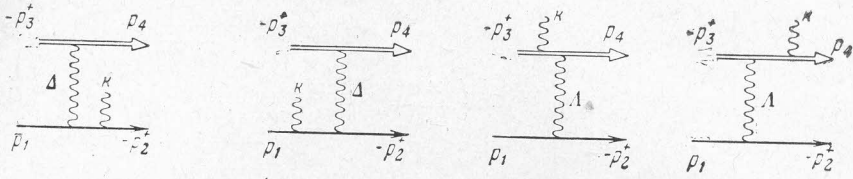
Одним из основных типов процессов, которые будут наблюдаться в ближайшее время в опытах на встречных электронных и электрон-позитронных пучках, являются процессы рассеяния и рождения пар частиц, сопровождаемые излучением жесткого фотона. Если для описания рождения мягких фотонов ( $\omega/\varepsilon \ll 1$ ) существует простой и эффективный аппарат, учитывающий классический характер излучения таких фотонов, то в случае излучения жестких фотонов расчеты становятся исключительно громоздкими, получаемые дифференциальные сечения весьма непрозрачными, а вычисление интегральных сечений стандартным путем интегрирования дифференциальных становится практически невыполнимым. Поскольку в настоящее время уже измерено сечение однократного тормозного излучения при электрон-позитронном столкновении на встречных пучках [1], задача вычисления точных интегральных сечений становится важной не только с теоретической, но и с практической точки зрения.

В данной работе рассмотрен процесс излучения фотона при рождении пары мюонов в электрон-позитронном столкновении  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^- + \gamma$ . Предложен метод, позволяющий простым образом вычислить точные интегральные сечения этого процесса, проинтегрированные по конечным мюонным состояниям. Идея метода состоит в интегрировании отдельных частей диаграмм с использованием свойств релятивистской, калибровочной и зарядовой инвариантностей. При этом фактически не требуется производить весьма громоздкое вычисление дифференциального сечения, поскольку интегрируются непосредственно шпуры электронной и мюонной частей диаграмм. Этот метод является достаточно универсальным и может быть использован для вычисления сечений однотипных процессов.

Во втором разделе приведен вывод точной формулы для интегрального сечения излучения фотона при образовании пары мюонов; в третьем разделе проведен анализ этой формулы.

### 2. Вычисление интегрального сечения

Процесс излучения фотона при рождении пары мюонов представляется четырьмя диаграммами (см. рисунок). Здесь использованы обозначения: импульсы начальных частиц  $p_1(E_1, \mathbf{p}_1)$ ,  $p_2^+(E_2, \mathbf{p}_2)$ ; импульсы конечных частиц  $p_3^+(E_3, \mathbf{p}_3)$ ,  $p_4(E_4, \mathbf{p}_4)$ ,  $k(\omega, \mathbf{k})$ . В дальнейшем использована метрика,



где  $(ab) = a_0b_0 - \mathbf{ab}$ . Матричный элемент процесса имеет вид

$$M = B \{ \Delta^{-2} (\bar{v}(p_2^+) L_1^{\nu} u(p_1)) (\bar{u}(p_4) \gamma_{\nu} v(p_3^+)) + \Lambda^{-2} (\bar{u}(p_4) L_2^{\nu} v(p_3^+)) (\bar{v}(p_2^+) \gamma_{\nu} u(p_1)) \}, \quad (2.1)$$

где

$$B = \frac{ie^3}{(2\pi)^{1/2}} \frac{m\mu}{(2\omega E_1 E_2 E_3 E_4)^{1/2}}, \quad (2.2)$$

$$L_1^{\nu} = \gamma^{\nu} \frac{\hat{p}_1 - \hat{k} + m}{-2\kappa} \hat{e} + \hat{e} \frac{\hat{p}_2^+ + \hat{k} + m}{2\kappa'} \gamma^{\nu}, \quad (2.3)$$

$$L_2^{\nu} = \gamma^{\nu} \frac{\hat{p}_3^+ - \hat{k} + \mu}{-2\eta} \hat{e} + \hat{e} \frac{\hat{p}_4 + \hat{k} + \mu}{2\eta'} \gamma^{\nu},$$

$$\Delta = p_3^+ + p_4, \quad \Lambda = p_1 + p_2^+, \quad \kappa = (p_1 k), \quad \kappa' = -(p_2^+ k), \\ \eta = -(p_3^+ k), \quad \eta' = (p_4 k). \quad (2.4)$$

Усредняя по спинам начальных электронов и суммируя по спинам конечных мюонов и поляризациям фотона, получаем

$$\bar{S}_i S_f |M|^2 = -\frac{|B|^2}{4} \left[ \frac{\mathcal{L}_1}{\Delta^4} + \frac{\mathcal{L}_2}{\Lambda^4} + \frac{2\mathcal{L}_3}{\Lambda^2 \Delta^2} \right] \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{m^2 \mu^2} [M_e^{\nu\nu'} (J_{\mu})_{\nu\nu'}],$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{m^2 \mu^2} [M_{\mu}^{\nu\nu'} (J_e)_{\nu\nu'}], \quad \mathcal{L}_3 = \frac{1}{m^2 \mu^2} [K_1^{\nu\nu'} K_2^{\nu\nu'}]. \quad (2.6)$$

Здесь  $M_e, M_{\mu}$  — комптоновские тензоры, пропорциональные сечению комптоновского рассеяния поляризованного тяжелого «фотона» с массой  $\Delta^2$ :

$$\frac{M_e^{\nu\nu'}}{m^2} = \text{Sp} [L_1^{\nu} \Lambda_+(p_1) \bar{L}_1^{\nu'} \Lambda_-(p_2^+)], \quad \frac{M_{\mu}^{\nu\nu'}}{\mu^2} = R_1 \left\{ \frac{M_e^{\nu\nu'}}{m^2} \right\}; \quad (2.7)$$

$J_e, J_{\mu}$  — токовые тензоры:

$$\frac{J_e^{\nu\nu'}}{m^2} = \text{Sp} [\gamma^{\nu} \Lambda_+(p_1) \gamma^{\nu'} \Lambda_-(p_2^+)], \quad \frac{J_{\mu}^{\nu\nu'}}{\mu^2} = R_1 \left\{ \frac{J_e^{\nu\nu'}}{m^2} \right\}; \quad (2.8)$$

$K_1, K_2$  — интерференционные тензоры:

$$\frac{K_1^{\nu\nu'}}{m^2} = \text{Sp} [L_1^{\nu} \Lambda_+(p_1) \gamma^{\nu'} \Lambda_-(p_2^+)], \quad \frac{K_2^{\nu\nu'}}{\mu^2} = R_1 \left\{ \frac{K_1^{\nu\nu'}}{m^2} \right\}. \quad (2.9)$$

Операция  $R_1$  есть замена

$$p_1 \leftrightarrow -p_3^+, \quad p_2^+ \leftrightarrow -p_4, \quad m \leftrightarrow \mu. \quad (2.10)$$

Тензор  $M_e^{\nu\nu'}$  мы представим в следующем виде:

$$M_e^{\nu\nu'} = \frac{1}{4} [b_1^{\nu\nu'} + \underline{b_2^{\nu\nu'}} + b_3^{\nu\nu'}], \quad (2.11)$$

$$b_2^{vv'} = \frac{4m^2}{\kappa^2} \left\{ g^{vv'} \left[ m^2 + \kappa' - \kappa + (p_2^+ p_1) + \frac{\kappa \kappa'}{m^2} \right] - (p_1^v p_2^{+v'} + p_1^{v'} p_2^{+v}) + \left( \frac{\kappa}{m^2} + 1 \right) (k^v p_2^{+v'} + k^{v'} p_2^{+v}) \right\}, \quad (2.12)$$

$$b_1^{vv'} = b_2^{vv'} (p_1 \leftrightarrow -p_2^+, k \leftrightarrow -k), \quad (2.13)$$

$$b_3^{vv'} = -\frac{4}{\kappa \kappa'} \left\{ 2g^{vv'} (p_1 p_2^+) [\kappa - \kappa' - (p_1 p_2^+) - m^2] - 2p_1^v p_1^{v'} \kappa' + 2p_2^{+v} p_2^{+v'} \kappa - 2k^v k^{v'} m^2 + (p_1^v p_2^{+v'} + p_1^{v'} p_2^{+v}) [2(p_1 p_2^+) + \kappa' - \kappa] - (p_1^v k^{v'} + p_1^{v'} k^v) (p_1 p_2^+) - (p_2^{+v} k^{v'} + p_2^{+v'} k^v) (p_1 p_2^+) \right\}. \quad (2.14)$$

Сечение исследуемого процесса запишем в виде

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_\mu + d\sigma_{e\mu}, \quad (2.15)$$

где  $d\sigma_e$  — вклад, в котором фотон излучается начальными частицами,  $d\sigma_\mu$  — вклад, в котором фотон излучается конечными мюонами,  $d\sigma_{e\mu}$  — интерференционный член. Рассмотрим сечение

$$d\sigma_e = -\frac{\alpha^3}{(2\pi)^2 |F|} \int \frac{d^3 k}{\omega \Delta^4} M_e^{vv'} N_{vv'}, \quad (2.16)$$

где

$$N_{vv'} = \int \frac{d^3 p_3}{E_3} \frac{d^3 p_4}{E_4} (J_\mu)_{vv'} \delta(\Delta - p_3^+ - p_4). \quad (2.17)$$

Лоренц-инвариантный тензор  $N_{vv'}$  может зависеть только от 4-вектора  $\Delta_v$  и, следовательно, в самом общем виде записывается как

$$N_{vv'} = c(\Delta^2, \mu^2) g_{vv'} + c_1(\Delta^2, \mu^2) \Delta_v \Delta_{v'}. \quad (2.18)$$

В силу закона сохранения тока

$$\Delta^v (J_\mu)_{vv'} = \Delta^{v'} (J_\mu)_{vv'} = 0 \quad (2.19)$$

тензор  $N_{vv'}$  является поперечным:

$$N_{vv'} = c(\Delta^2, \mu^2) \left[ g_{vv'} - \frac{\Delta_v \Delta_{v'}}{\Delta^2} \right]. \quad (2.20)$$

Для вычисления коэффициента  $c(\Delta^2, \mu^2)$  достаточно свернуть тензор  $N_{vv'}$  с  $g^{vv'}$  в формуле (2.17) и вычислить получающийся интеграл. Этот интеграл является инвариантным и проще всего вычисляется в  $\eta$ -системе двух мюонов. Тогда получаем

$$c(\Delta^2, \mu^2) = \frac{2\pi}{3} [2\mu^2 + \Delta^2] \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2}; \quad (2.21)$$

множитель  $(\Delta^2 - 4\mu^2)^{1/2}$  характеризует поведение сечения у порога.

Вследствие калибровочной инвариантности комптоновского тензора

$$\Delta_v M_e^{vv'} = \Delta_{v'} M_e^{vv'} = 0, \quad (2.22)$$

в сечение  $d\sigma_e$  вклад дает только свертка  $M_e^{vv'} g_{vv'}$ . Вычисляя эту свертку и выполняя тривиальное интегрирование по азимутальному углу вылета фотона, получаем дифференциальное сечение по углу между начальным



электроном и фотоном в  $\psi$ -системе начальных частиц:

$$\frac{d^2\sigma_e}{d\cos\vartheta_R d\omega} = \frac{\alpha^3\omega}{6E^2\beta} \frac{(2\mu^2 + \Delta^2)}{\Delta^4} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \times \\ \times \left\{ m^2(\Delta^2 + 2m^2) \left( \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa'^2} \right) + 2 \left[ \frac{m^2}{\kappa'} - \frac{m^2}{\kappa} \right] + \right. \\ \left. + 2 \left[ \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right] + \frac{4}{\kappa\kappa'} [E^2\Delta^2 + m^2(E\omega - m^2)] \right\}, \quad (2.23)$$

где в этой системе

$$\Delta^2 = 4E(E - \omega), \quad E_1 = E_2 = E. \quad (2.24)$$

Выполняя элементарное интегрирование по углу вылета фотона, получаем

$$d\sigma_e = \frac{2\alpha^3}{3E^2\beta} \frac{d\omega}{\omega} \frac{2\mu^2 + \Delta^2}{\Delta^4} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \left\{ (L - 1) \times \right. \\ \left. \times (\Delta^2 + 2\omega^2) + m^2 \left[ L \left( \frac{2\omega}{E} - \frac{m^2}{E^2} \right) - 2 \right] \right\}; \quad (2.25)$$

здесь

$$L = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta = \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{E}.$$

Приступим к вычислению  $d\sigma_\mu$ . Аналогично формуле (2.16) можно записать

$$d\sigma_\mu = - \frac{\alpha^3}{(2\pi)^2 |F|} \int \frac{d^2k}{\omega\Lambda^4} J_e^{\nu\nu'} Q_{\nu\nu'}, \quad (2.26)$$

$$Q_{\nu\nu'} = \int \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4} \delta(\Lambda - p_4 - p_3 - k) (M_\mu)_{\nu\nu'}. \quad (2.27)$$

В дальнейшем мы используем рассуждения, аналогичные приведенным для  $N_{\nu\nu'}$  в (2.17). Используя калибровочную инвариантность  $(M_\mu)_{\nu\nu'}$

$$\Lambda^\nu (M_\mu)_{\nu\nu'} = \Lambda^{\nu'} (M_\mu)_{\nu\nu'} = 0 \quad (2.28)$$

и то, что  $Q_{\nu\nu'}$  может зависеть только от 4-векторов  $\Lambda_\nu$ ,  $k_\nu$ , получим следующее выражение <sup>1)</sup> для  $Q_{\nu\nu'}$ :

$$Q_{\nu\nu'} = a_1 g_{\nu\nu'} + \frac{\Lambda^2 (a_1 + \Lambda^2 a_2)}{(k\Lambda)^2} k_\nu k_{\nu'} + \\ + a_2 \Lambda_\nu \Lambda_{\nu'} - \frac{(a_1 + \Lambda^2 a_2)}{(k\Lambda)} (k_\nu \Lambda_{\nu'} + k_{\nu'} \Lambda_\nu); \quad (2.29)$$

функции  $a_1$ ,  $a_2$  зависят от  $\mu^2$ ,  $\Lambda^2$ ,  $(k\Lambda)$ . Ясно, что вклад в сечение дают только первые два члена, поскольку имеет место закон сохранения тока

$$\Lambda^\nu (J_e)_{\nu\nu'} = \Lambda^{\nu'} (J_e)_{\nu\nu'} = 0. \quad (2.30)$$

Для вычисления функций  $a_1$ ,  $a_2$  достаточно свернуть тензор  $Q_{\nu\nu'}$  с тензорами  $g^{\nu\nu'}$  и  $k^\nu k^{\nu'}$ ; тогда получаем

$$Q_{\nu\nu'} g^{\nu\nu'} = 2a_1 - \Lambda^2 a_2, \quad Q_{\nu\nu'} k^\nu k^{\nu'} = a_2 (k\Lambda)^2. \quad (2.31)$$

<sup>1)</sup> В работе Горге и др. [2] близкий подход был использован для вычисления вклада излучения фотона электроном в мюон-электронном столкновении. Однако там было проведено интегрирование по  $d\omega$ , что привело к трудностям из-за инфракрасной расходимости, и не было выполнено интегрирование по импульсу конечного мюона. В [2] приведена обширная библиография.

С другой стороны, вычисляя эти свертки в интеграле (2.27) и взяв полученные инвариантные интегралы, что проще всего сделать в  $\psi$ -системе конечных мюонов, легко найти функции  $a_1$ ,  $a_2$ . Мы приведем эти функции в  $\psi$ -системе начальных частиц:

$$a_1 = 2\pi \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega^2} \left\{ \Delta^2 \left( 2 + \frac{\mu^2}{2E^2} \right) + 2\omega^2 - L_1 \left[ \Delta^2 \left( 1 + \frac{\mu^2}{2E^2} \right) + 2\omega^2 - \frac{\mu^4}{E^2} \right] \right\}, \quad (2.32)$$

$$a_2 \Delta^2 = 4\pi \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega^2} [\Delta^2 - 2\mu^2 L_1], \quad (2.33)$$

где

$$L_1 = \frac{1}{\beta_0} \ln \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}, \quad \beta_0 = \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2}. \quad (2.34)$$

Подставляя полученные величины в формулу (2.26), легко получить дифференциальное сечение по углу между начальным электроном и фотоном для вклада излучения мюонов:

$$\frac{d^2\sigma_\mu}{d(\cos\vartheta_k) d\omega} = \frac{\alpha^3 \omega}{(2\pi) 8E^4 \beta} \left\{ \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) a_1 + \frac{\kappa\kappa'}{2E^2 \omega^2} (a_1 + \Delta^2 a_2) \right\}. \quad (2.35)$$

Выполняя интегрирование по углу вылета фотона, получаем

$$d\sigma_\mu = \frac{\alpha^3}{6E^4 \beta} \frac{d\omega}{\omega} \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \left\{ (L_1 - 1) \times \right. \\ \left. \times (\Delta^2 + 2\omega^2) - \mu^2 \left[ L_1 \left( \frac{2\omega}{E} + \frac{\mu^2}{E^2} \right) + 2 \left( 1 - \frac{\omega}{E} \right) \right] \right\}. \quad (2.36)$$

Нам осталось вычислить вклад интерференционных членов. Заметим прежде всего, что из явного вида  $K_{2\nu\nu'}$  (2.9) легко установить, что при замене  $p_3^+ \leftrightarrow p_4$  величина  $K_{2\nu\nu'}$  меняет знак:

$$K_{2\nu\nu'}(p_4, p_3^+, \mu) = -K_{2\nu\nu'}(p_3^+, p_4, -\mu) = -K_{2\nu\nu'}(p_3^+, p_4, \mu). \quad (2.37)$$

При вычислении у нас возникает интеграл типа

$$O_{\nu\nu'} = \int \frac{d^3 p_3}{E_3} \frac{d^3 p_4}{E_4} \delta(\Lambda - p_3^+ - p_4 - k) K_{2\nu\nu'}. \quad (2.38)$$

Легко видеть, что при замене переменных  $p_3 \leftrightarrow p_4$  подынтегральное выражение меняет знак, так что

$$O_{\nu\nu'} = 0. \quad (2.39)$$

Таким образом, проинтегрированное по конечным мюонным состояниям интерференционное сечение  $d\sigma_{e\mu}$  обращается в нуль. Поэтому суммарное дифференциальное сечение есть

$$\frac{d^2\sigma}{d(\cos\vartheta_k) d\omega} = \frac{d^2\sigma_e}{d(\cos\vartheta_k) d\omega} + \frac{d^2\sigma_\mu}{d(\cos\vartheta_k) d\omega} \quad (2.40)$$

и дается формулами (2.23) и (2.35), а суммарное интегральное сечение есть

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_\mu \quad (2.41)$$

и дается формулами (2.25) и (2.36).

### 3. Анализ интегрального сечения

Полученное выражение для сечения  $d\sigma$  (2.41) является точным. Рассмотрим теперь поведение сечения в разных предельных случаях. Прежде всего изучим поведение сечения вблизи порога рождения мюонов; тогда очевидно, что  $\mu^2/E^2 \sim 1$ ,  $\omega/E \ll 1$ . В этом случае сечение, с точностью до членов первого порядка по  $\omega/E$ , имеет вид

$$d\sigma_e^{th} = \frac{2\alpha^3}{E^2} \frac{d\omega}{\omega} \left(1 + \frac{\omega}{3E}\right) \beta_0 \left(\ln \frac{2E}{m} - \frac{1}{2}\right), \quad (3.1)$$

$$d\sigma_\mu^{th} = \frac{4}{3} \frac{\alpha^3}{E^2} \frac{d\omega}{\omega} \beta_0^3, \quad (3.2)$$

где вблизи порога  $\beta_0 \ll 1$  (см. (2.34)). Отсюда видно, что у порога сечение излучения фотона мюонами в  $\beta_0^2 / \ln(E/m)$  раз меньше сечения излучения фотона электронами и весьма мало.

При  $E \gg \mu$  (вдали от порога) и условии  $\omega/E \ll 1$  имеем с точностью до членов первого порядка по  $\mu^2/E^2$  и  $\omega/E$

$$d\sigma_e = \frac{4}{3} \frac{\alpha^3}{E^2} \frac{d\omega}{\omega} \left(\ln \frac{2E}{m} - \frac{1}{2}\right), \quad (3.3)$$

$$d\sigma_\mu = \frac{4}{3} \frac{\alpha^3}{E^2} \frac{d\omega}{\omega} \left(\ln \frac{2E}{\mu} - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\omega}{E}\right). \quad (3.4)$$

Видно, что в этом случае отношение сечений сводится к отношению входящих в них логарифмов, так что при  $E = 250$  MeV значение  $d\sigma_\mu$  составляет  $\sim 15\%$  от  $d\sigma_e$ , а при  $E = 1$  GeV составляет  $\sim 30\%$  от  $d\sigma_e$ . Следовательно, вклад излучения фотона мюонами отнюдь не мал.

Важной особенностью полученных формул, существенно отличающей случай излучения фотона при рождении пары частиц от случая тормозного излучения при рассеянии электронов, является убывание полного сечения с ростом энергии как  $\ln(E/m)/E^2$ , в то время как сечение тормозного излучения при рассеянии растет как  $\ln(E/m)$ . Это связано с тем, что основной вклад в сечение тормозного излучения дают малые передачи импульса (см., например, [3]). Так, в случае тормозного излучения при рассеянии электрона на кулоновском центре минимальная передача импульса есть  $\omega m^2/2E^2$ . В данном же случае передача импульса не может быть малой (она больше  $2\mu$ ), что и приводит к тому, что множитель  $1/E^2$  не компенсируется. Ясно, что такое положение характерно для всех процессов излучения фотона при рождении пары частиц в случае аннигиляции электрон-позитронной пары.

Рассмотрим еще жесткую часть спектра фотонов. Фотон обладает максимальной энергией в случае, когда он и два конечных мюона разлетаются в противоположные стороны и мюоны имеют равные импульсы:

$$\omega_{max} = (E^2 - \mu^2)/E. \quad (3.5)$$

Непосредственно из выражений (2.25) и (2.36) видно, что при  $\omega \rightarrow \omega_{max}$  сечение  $d\sigma$  стремится к нулю как  $(\omega_{max} - \omega)^{1/2}$ .

В заключение авторы выражают благодарность В. М. Галицкому за обсуждение.

Новосибирский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
6 октября 1964 г.

#### Литература

- [1] S. Bernardini, J. Corraza, J. Di Jiugno, I. Haissinski, P. Marin, R. Querzoli, B. Touschek. Preprint LNF-64/33, 1964; Nuovo Cim. (в печати).  
[2] V. Gorge, M. Locher, H. Rollnik. Nuovo Cim., 27, 928, 1963.  
[3] V. Baier, V. Galitsky. Phys. Lett., 13, 355, 1964.

#### PHOTON EMISSION DURING MUON PAIR PRODUCTION IN ELECTRON-POSITRON COLLISIONS

V. N. Baier, V. A. Khoze

A simple method which essentially is based on gauge, charge and Lorentz invariance is employed for calculating the exact integral cross section for emission of photons during muon pair production in electron-positron collisions.