

## ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ДВУХЧАСТИЧНОЙ АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ

В. Н. Байер, В. А. Хозе

С помощью способа, предложенного ранее авторами, вычислено интегральное сечение излучения фотона при аннигиляции электрон-позитронной пары в пару скалярных частиц. Проведен анализ сечения излучения фотона при аннигиляции электрон-позитронной пары в пару любых частиц с учетом формфакторов. При этом сечение излучения электронами вычислено точно, а в сечении излучения конечными частицами вычислены два первых члена разложения по степеням  $\omega/E$ , причем для вычисления второго члена разложения использован метод Лоу. Во всех рассмотренных сечениях интерференционный член обращается в нуль.

### 1. Введение

В предыдущей работе [1] авторы предложили простой способ вычисления интегрального сечения излучения фотона с произвольной энергией при аннигиляции электрон-позитронной пары в пару других частиц. Идея способа состоит в интегрировании отдельных частей диаграмм с широким использованием свойств релятивистской, калибровочной и зарядовой инвариантностей. С помощью этого способа было вычислено интегральное сечение излучения фотона при рождении пары мюонов в электрон-позитронном столкновении.

В данной работе вычисляются сечения излучения фотона в ряде аннигиляционных процессов. Рассмотрен процесс излучения при образовании пары скалярных частиц при аннигиляции электрон-позитронной пары (раздел 2). Для учета влияния сильных взаимодействий на процесс излучения начальными частицами достаточно просто ввести формфакторы конечных частиц. При этом, если по спинам конечных частиц проводится суммирование, то вследствие релятивистской, зарядовой и калибровочной инвариантностей оказывается возможным [2] записать универсальную формулу для интегрального сечения излучения начальными частицами, в которую входят две функции, зависящие от формфакторов (раздел 3).

Для учета влияния сильных взаимодействий на процесс излучения конечными частицами необходимо знать вклады диаграмм комптоновского типа (две линии конечных частиц и две фотонных, из которых одна виртуальная). Для этого можно либо ввести феноменологические формфакторы четыреххвостки, либо использовать динамические модели, либо, наконец, разложить амплитуду четыреххвостки по степеням  $\omega/E$ . Об указанных формфакторах для четыреххвостки в настоящее время ничего не известно, а рассмотрение, например, в рамках дисперсионного подхода, является весьма сложной самостоятельной задачей и ниже не проводится. В то же время довольно много информации можно получить с помощью разложения амплитуды излучения фотона конечными частицами по степеням  $\omega/E$ . Оказывается, что нулевой член разложения дается приближением классических токов, для которого мы можем также выписать универсальную формулу. Для получения следующего члена разложения исполь-

зовался метод Лоу [3], причем само разложение проделано на примере излучения при рождении пары пионов (раздел 4). Аналогично оно может быть проделано и для излучения при рождении любых пар частиц.

2. Сечение излучения при рождении пары скалярных частиц

Процесс излучения фотона при рождении пары скалярных частиц в электрон-позитронном столкновении представляется пятью диаграммами

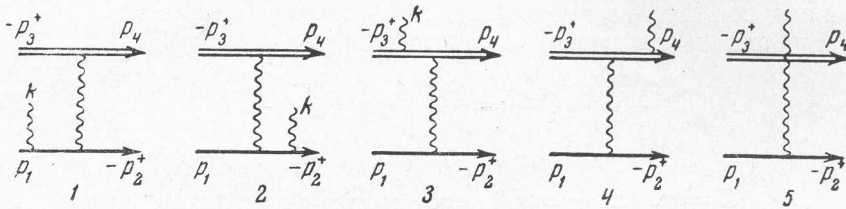


Рис. 1

(рис. 1). Матричный элемент процесса имеет вид<sup>1)</sup>

$$M = A[\Lambda^{-2}\bar{v}(p_2^+)L_1^{\nu u}(p_1)P_\nu + \Lambda^{-2}\bar{v}(p_2^+)\gamma^{\nu u}(p_1)S_\nu], \tag{2.1}$$

где

$$A = \frac{ie^3}{(2\pi)^{7/2}} \frac{m}{(8E_1E_2E_3E_4\omega)^{1/2}}, \tag{2.2}$$

$$P = p_4 - p_3^+, \quad \Delta = p_4 + p_3^+, \quad \Lambda = p_1 + p_2^+;$$

$$S_\nu = \left(\frac{ep_4}{\eta'} + \frac{ep_3^+}{\eta}\right)P_\nu + \left(\frac{ep_4}{\eta'} - \frac{ep_3^+}{\eta}\right)k_\nu - 2e_\nu. \tag{2.3}$$

После усреднения по спидам электронов и суммирования по поляризациям фотонов получаем

$$\bar{S}_i S_f |M|^2 = \frac{|A|^2}{4} \left[ \frac{1}{\Lambda^4} \frac{M_e^{\nu\nu'}}{m^2} P_\nu P_{\nu'} + \frac{1}{\Lambda^4} \frac{I_e^{\nu\nu'}}{m^2} T_{\nu\nu'} + \frac{2}{\Lambda^2 \Delta^2} \frac{K_1^{\nu\nu'}}{m^2} P_\nu S_{\nu'} \right]. \tag{2.4}$$

Здесь

$$T_{\nu\nu'} = - \sum S_\nu S_{\nu'} = 4g_{\nu\nu'} + \xi^2 P_\nu P_{\nu'} + \zeta^2 k_\nu k_{\nu'} + (\xi\xi)(P_\nu k_{\nu'} + P_{\nu'} k_\nu) - 2(\xi_\nu P_{\nu'} + \xi_{\nu'} P_\nu + \zeta_\nu k_{\nu'} + \zeta_{\nu'} k_\nu), \tag{2.5}$$

$$\xi_\nu = \frac{p_{4\nu}}{\eta'} + \frac{p_{3\nu^+}}{\eta}, \quad \zeta_\nu = \frac{p_{4\nu}}{\eta'} - \frac{p_{3\nu^+}}{\eta}, \tag{2.6}$$

где суммирование ведется по поляризации фотона.

Сечение исследуемого процесса удобно, как прежде, записать в виде

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_s + d\sigma_{es}, \tag{2.7}$$

где  $d\sigma_e$  — вклад, в котором фотон излучается начальными частицами,  $d\sigma_s$  — вклад, в котором фотон излучается конечными частицами,  $d\sigma_{es}$  — интерференционный член. Рассмотрим сечение

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{(2\pi)^2 |F|} \int \frac{d^3k}{\omega} M_e^{\nu\nu'} V_{\nu\nu'}, \tag{2.8}$$

<sup>1)</sup> Здесь и ниже мы используем те же обозначения, что и в предыдущей статье [4].

$$\begin{aligned}
 V_{\nu\nu'} &= \frac{1}{4\Lambda^4} \int \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4} P_\nu P_{\nu'} \delta(\Lambda - p_3^+ - p_4) = \\
 &= -\frac{\pi}{6\Lambda^2} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{3/2} \left( g_{\nu\nu'} - \frac{\Delta_\nu \Delta_{\nu'}}{\Delta^2} \right). \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Вследствие градиентной инвариантности  $M_e^{\nu\nu'}$  вклад в (2.8) дает только свертка с тензором  $g_{\nu\nu'}$ . Выполняя эту свертку и проведя тривиальное интегрирование по азимутальному углу вылета фотона, получаем дифференциальное сечение по углу между направлениями начального электрона и фотона в  $\zeta$ -системе начальных частиц:

$$\frac{d^2\sigma_e(E, \omega, \vartheta_h)}{d(\cos \vartheta_h) d\omega} = \frac{\alpha^3 \omega}{24E^2\beta} \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{3/2} Z, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
 Z &= m^2(\Delta^2 + 2m^2) \left( \frac{1}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa'^2} \right) + 2m^2 \left( \frac{1}{\kappa'} - \frac{1}{\kappa} \right) + \\
 &+ 2 \left( \frac{\kappa}{\kappa'} + \frac{\kappa'}{\kappa} \right) + \frac{4}{\kappa\kappa'} [E^2\Delta^2 + m^2(E\omega - m^2)]. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав по углу  $\vartheta_h$ , получаем

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{6E^2\beta} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{\Lambda^2} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{3/2} Y, \quad (2.12)$$

$$Y = (L - 1)(\Delta^2 + 2\omega^2) + m^2 \left[ L \left( \frac{2\omega}{E} - \frac{m^2}{E^2} \right) - 2 \right], \quad (2.13)$$

$$L = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta = \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{E}. \quad (2.14)$$

Проинтегрировав по углу  $\vartheta_h$ , получаем

$$d\sigma_s = \frac{\alpha^3}{4(2\pi)^2 |F|} \int \frac{d^3k}{\omega\Lambda^4} I_e^{\nu\nu'} W_{\nu\nu'}, \quad (2.15)$$

$$W_{\nu\nu'} = \int \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4} T_{\nu\nu'} \delta(\Lambda - p_3^+ - p_4 - k). \quad (2.16)$$

Если учесть, что тензор  $T_{\nu\nu'}$  удовлетворяет условию

$$\Lambda^\nu T_{\nu\nu'} = \Lambda^{\nu'} T_{\nu\nu'} = 0, \quad (2.17)$$

то общее выражение для  $W_{\nu\nu'}$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}
 W_{\nu\nu'} &= h_1 g_{\nu\nu'} + \frac{\Lambda^2}{(k\Lambda)^2} (h_1 + \Lambda^2 h_2) k_\nu k_{\nu'} + \\
 &+ h_2 \Lambda_\nu \Lambda_{\nu'} - \frac{h_1 + \Lambda^2 h_2}{k\Lambda} (k_\nu \Lambda_{\nu'} + k_{\nu'} \Lambda_\nu). \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Для вычисления функций  $h_1$ ,  $h_2$  достаточно свернуть тензор  $W_{\nu\nu'}$  с тензорами  $g^{\nu\nu'}$  и  $k^\nu k^{\nu'}$  и вычислить интегралы, получающиеся из (2.16); это проще всего сделать в  $\zeta$ -системе двух конечных частиц. В  $\zeta$ -системе начальных частиц имеем

$$2h_1 - \Lambda^2 h_2 = \frac{4\pi}{E^2 \omega^2} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \{ (E^2 - \mu^2) [(\Delta^2 - 2\mu^2)L_1 - \Delta^2] + 4E^2 \omega^2 \}, \quad (2.19)$$

$$h_2 = \frac{\pi}{E^2 \omega^2} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} [3\Delta^2 - L_1(\Delta^2 + 2\mu^2)],$$

$$L_1 = \frac{1}{\beta_0} \ln \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}, \quad \beta_0 = \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2}. \quad (2.20)$$

Подставляя полученные величины в формулу (2.15), легко получить дифференциальное сечение по углу между направлениями начального электрона и фотона для вклада скалярных частиц:

$$\frac{d^2\sigma_s(E, \omega, \vartheta_k)}{d(\cos \vartheta_k) d\omega} = -\frac{\alpha^3 \omega}{64\pi E^4 \beta} \left[ h_1 \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) + \frac{\kappa \kappa'}{2E^2 \omega^2} (h_1 + \Lambda^2 h_2) \right]. \quad (2.21)$$

Интегрируя (2.21) по углу вылета фотона, получаем

$$d\sigma_s = \frac{\alpha^3}{24E^4 \beta} \frac{d\omega}{\omega} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) \times \\ \times \left\{ [(\Delta^2 - 2\mu^2)L_1 - \Delta^2] \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) + 4\omega^2 \right\}. \quad (2.22)$$

При вычислении вклада интерференционного члена возникает интеграл

$$O_{vv'} = \int \frac{d^3 p_3}{E_3} \frac{d^3 p_4}{E_4} \delta(\Lambda - p_3^+ - p_4 - k) S_V P_{V'}. \quad (2.23)$$

При замене  $p_3^+ \leftrightarrow p_4$  подынтегральное выражение меняет знак, так что

$$O_{vv'} = 0. \quad (2.24)$$

Видно, что вклад интерференционного члена в случае рождения пары скалярных частиц, как и в случае рождения пары мюонов [1], обращается в нуль. Таким образом, суммарное дифференциальное сечение есть

$$\frac{d^2\sigma}{d(\cos \vartheta_k) d\omega} = \frac{d^2\sigma_e}{d(\cos \vartheta_k) d\omega} + \frac{d^2\sigma_s}{d(\cos \vartheta_k) d\omega} \quad (2.25)$$

и дается формулами (2.10) и (2.21). Суммарное интегральное сечение есть

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_s \quad (2.26)$$

и дается формулами (2.12) и (2.22).

Существует еще простой способ получения формулы (2.22), при котором интегрирование проводится сразу по всем импульсам конечных частиц (при фиксированном  $\omega$ ). Этот способ приведен в Приложении.

Полученное выражение для  $d\sigma$  (2.26) является точным. Рассмотрим теперь поведение сечений в разных предельных случаях. Вблизи порога  $\mu^2/E^2 \sim 1$ ,  $\omega/E \ll 1$ ; тогда разлагая до членов первого порядка по  $\omega/E$ , получаем

$$d\sigma_e^{th} = \frac{\alpha^3}{3E^2} \frac{d\omega}{\omega} \beta_0^3 \left[ \ln \left( \frac{2E}{m} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (2.27)$$

$$d\sigma_s^{th} = \frac{2\alpha^3}{9E^2} \frac{d\omega}{\omega} \beta_0^3 \left( 1 - \frac{\omega}{E} \right) \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right); \quad (2.28)$$

вблизи порога  $\beta_0 \ll 1$ ; видно, что сечение излучения тяжелыми частицами вблизи порога имеет дополнительную малость, пропорциональную



квадрату скорости этих частиц, как и должно быть, поскольку излучение тяжелых частиц вблизи порога является дипольным.

Вдали от порога  $\mu^2/E^2 \ll 1$ ; тогда с точностью до членов первого порядка по  $\mu^2/E^2$ ,  $\omega/E$  имеем

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{3E^2} \left(1 - \frac{3\mu^2}{2E^2}\right) \left[ \ln\left(\frac{2E}{m}\right) - \frac{1}{2} \right] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (2.29)$$

$$d\sigma_s = \frac{\alpha^3}{3E^2} \left(1 - \frac{3\mu^2}{2E^2}\right) \left(1 - \frac{\omega}{E}\right) \left[ \ln\left(\frac{2E}{\mu}\right) - \frac{1}{2} \right] \frac{d\omega}{\omega}. \quad (2.30)$$

Как мы видим, вблизи порога вклад излучения тяжелой частицей очень мал. По мере роста энергии начальных частиц над порогом рождения вклад излучения тяжелыми частицами растет, причем, при  $E \sim 2\mu$  имеем  $d\sigma_s \sim 0,1 d\sigma_e$ . Эта ситуация аналогична той, которая возникает при рождении пары мюонов [1]. Что касается жесткой части фотонного спектра, то при  $\omega \rightarrow \omega_{max}$  имеем

$$d\sigma_e \approx (\omega_{max} - \omega)^{3/2}, \quad d\sigma_s \approx (\omega_{max} - \omega)^{1/2}.$$

### 3. Сечение излучения при рождении пары произвольных частиц

Метод, предложенный в [1], может быть использован для вычисления сечения любого процесса, в котором электрон-позитронная пара превращается в пару частица — античастица и фотон. Ясно, что вклады диаграмм, на которых излучают начальные электроны, могут быть вычислены таким же способом как в [1] (см. также и раздел 2 настоящей работы). Для описания вершины рождающихся частиц введем матричный элемент тока перехода  $\langle p_4, p_3^+ | J_\mu | 0 \rangle$ . Можно показать [2], что из требований релятивистской и зарядовой инвариантностей и закона сохранения тока следует, что для частиц с произвольным спином сумма по поляризации конечных частиц может быть записана в виде

$$\begin{aligned} X_{\mu\nu} &= \sum \langle p_4, p_3^+ | J_\mu | 0 \rangle \langle p_4, p_3^+ | J_\nu | 0 \rangle^* = \\ &= \frac{1}{4E_3 E_4} \left[ 4D_1(\Delta^2) \left( \frac{\Delta_\mu \Delta_\nu}{\Delta^2} - g_{\mu\nu} \right) - 2D_2(\Delta^2) P_\mu P_\nu \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $D_1, D_2$  являются функциями формфакторов конечных частиц. Так, например, для пионов

$$D_1 = 0, \quad D_2 = -|F(\Delta^2)|^2/2; \quad (3.2)$$

для нуклонов

$$D_1 = 1/2 \Delta^2 |\mathcal{F}_1 + g\mathcal{F}_2|^2, \quad D_2 = |\mathcal{F}_1|^2 - \Delta^2 g^2 |\mathcal{F}_2|^2 / 4\mu^2. \quad (3.3)$$

Здесь  $F(\Delta^2)$ ,  $\mathcal{F}_1(\Delta^2)$ ,  $\mathcal{F}_2(\Delta^2)$  — соответственно электромагнитные формфакторы пиона и нуклонов во времениподобной области передач импульсов. Соответствующие выражения для вектонов приведены в [2].

Если мы опять представим сечение в виде

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_f + d\sigma_{ef} \quad (3.4)$$

(ср. (2.7)), то для вычисления  $d\sigma_e$  достаточно в формулу (2.9) вместо произведения  $P_\nu P_{\nu'}$  подставить  $4E_3 E_4 X_{\nu\nu'}$  (формула (3.1)), причем полученный интеграл мы обозначим  $U_{\nu\nu'}$ . Тогда в формулу (2.8) вместо  $V_{\nu\nu'}$  надо подставить

$$U_{\nu\nu'} = \frac{1}{\Delta^4} \int d^3 p_3 d^3 p_4 X_{\nu\nu'} \delta(\Delta - p_3^+ - p_4) =$$

$$= -\frac{2\pi}{\Delta^4} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \left[ D_1 - \frac{D_2}{6} (\Delta^2 - 4\mu^2) \right] \left( g_{vv'} - \frac{\Delta_v \Delta_{v'}}{\Delta^2} \right). \quad (3.5)$$

Проводя после этого вычисление интеграла (2.8), получаем дифференциальное сечение по углу вылета фотона  $\vartheta_k$ :

$$\frac{d^2\sigma_e(E, \omega, \vartheta_k)}{d(\cos \vartheta_k) d\omega} = \frac{\alpha^3 \omega}{2E^2 \beta} \frac{1}{\Delta^4} \times \\ \times \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \left[ D_1 - \frac{D_2}{6} (\Delta^2 - 4\mu^2) \right] Z, \quad (3.6)$$

где  $Z$  дается формулой (2.11), а интегральное сечение имеет вид

$$d\sigma_e = \frac{2\alpha^3}{\beta E^2} \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{\Delta^4} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} \left[ D_1 - \frac{D_2}{6} (\Delta^2 - 4\mu^2) \right] Y, \quad (3.7)$$

где  $Y$  дается формулой (2.13).

При вычислении вклада излучения родившимися частицами мы также должны учесть их структуру. При этом нужно вычислить вклад диаграмм комптоновского типа. В результате мы получим выражение, содержащее некоторое (зависящее от спина) число функций инвариантных кинематических параметров. Если родившиеся частицы — пионы, то таких функций 3, если рождаются нуклоны, то их уже 12 и т. д. В настоящее время об этих функциях ничего неизвестно. Поэтому через эти функции можно выразить только дифференциальное сечение, и этим подходом нельзя пользоваться при вычислении интегральных сечений.

С другой стороны, мы можем воспользоваться разложением указанных амплитуд по степеням  $\omega/E$ . Этим разложением можно вообще пользоваться в довольно широкой области над порогом, поскольку в этой области из-за скачка масс  $\omega/E \ll 1$ . Тогда интегральное сечение процесса может быть представлено в виде (см., например, [3])

$$d\sigma_f = \sigma_{f0} d\omega / \omega + \sigma_{f1} d\omega + \sigma_{f2} \omega d\omega + \dots \quad (3.8)$$

При этом легко видеть, что член  $\sigma_{f0}$  в случае аннигиляционных процессов точно дается приближением классических токов. Действительно, по определению, классические токи содержат все члены, не имеющие  $\omega$  в числителе; с другой стороны, в аннигиляционных процессах при интегрировании по углам вылета конечных частиц не возникает дополнительных степеней  $\omega$  (в отличие от случая излучения при рассеянии, где пределы интегрирования по углам зависят от  $\omega$ ; так,  $\Delta_{min}^2 = (\omega m^2 / E^2)^2$  и точное выражение для  $\sigma_0$  не может быть получено из выражения с классическими токами, см., например, [4]).

По определению, для излучения одного фотона

$$d\sigma_{cl} = \sigma_{el} \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \omega d\omega d\Omega_k \left[ \frac{p_1}{(p_1 k)} - \frac{p_2^+}{(p_2^+ k)} + \frac{p_3^+}{(p_3^+ k)} - \frac{p_4}{(p_4 k)} \right]^2. \quad (3.9)$$

Выполняя интегрирование по углам вылета фотона и конечных частиц, получаем

$$d\sigma_{cl}(E, \omega) = \sigma_{f0} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\alpha^3}{E^4 \beta} \left( \frac{E^2 - \mu^2}{E^2} \right)^{1/2} \left( 1 + \frac{m^2}{2E^2} \right) \times \\ \times \left\{ D_1^0 - \frac{2}{3} (E^2 - \mu^2) D_2^0 \right\} \left[ \frac{2E^2 - \mu^2}{4E^2} L_1^0 - \frac{1}{2} \right] \frac{d\omega}{\omega}. \quad (3.10)$$

В этой формуле определенные раньше функции  $D$  и  $L_1$  (см. (2.20) и (3.2), (3.3)) взяты в точке  $\omega = 0$  (тогда  $\Delta^2 = 4E^2$ ).

Следует еще заметить, что интерференционный член  $d\sigma_{ef}$  (3.4) обращается в нуль, так же как и во всех предыдущих случаях, если амплитуду излучения электронами брать в точном виде, а амплитуду излучения конечными частицами — в приближении классических токов.

#### 4. Исследование излучения конечными частицами с помощью метода Лоу

Существует общий метод вычисления первых двух членов разложения (3.8) с учетом сильного взаимодействия во всех порядках [3]. Мы рассмотрим вычисление сечения  $\sigma_{f1}$  на примере излучения при рождении пары пионов. Матричный элемент для излучения фотона конечными частицами может быть получен прямо из второго члена формулы (2.1), куда вместо  $S_v$  мы подставим величину  $T_{v\mu}e_\mu$ . Последнюю мы разобьем на две части:

$$T_{v\mu} = T_{v\mu}^A + T_{v\mu}^B. \quad (4.1)$$

По определению,  $T_{v\mu}^A$  состоит из суммы вклада всех диаграмм, на которых вершина с излучением реального фотона связана с остальной частью диаграммы одиночной пионной линией (рис. 2),  $T_{v\mu}^B$  — вклад остальных диаграмм. За-

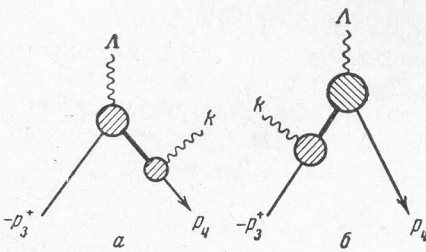


Рис. 2

метим, что при  $\omega \rightarrow 0$  расходится только величина  $T_{v\mu}^A$ , что же касается величины  $T_{v\mu}^B$ , то она остается конечной [3].

Для  $T_{v\mu}^A$  имеем следующее выражение:

$$T_{v\mu}^A = \Gamma_v(\Lambda^2, p_3^{+2}, (p_4 + k)^2) \Delta(p_4 + k) \Gamma_\mu(0, (p_4 + k)^2, p_4^2) + \Gamma_\mu(0, p_3^{+2}, (p_3^+ + k)^2) \Delta(p_3^+ + k) \Gamma_v(\Lambda^2, (p_3^+ + k)^2, p_4^2), \quad (4.2)$$

где  $\Delta$  и  $\Gamma_v$  — точные перенормированные функции распространения и электромагнитный вершинный оператор пиона.

Поскольку нас интересует излучение мягких фотонов, то мы будем разлагать величины в (4.2) по степеням  $k$  и оставлять только первых два члена. Воспользовавшись обобщенным тождеством Уорда, легко показать [3], что

$$T_{v\mu}^A = \Gamma_v(\Lambda^2, p_3^{+2}, (p_4 + k)^2) \frac{p_{4\mu}}{(p_4 k)} - \Gamma_v(\Lambda^2, (p_3^+ + k)^2, p_4^2) \frac{p_{3\mu}^+}{(p_3^+ k)}. \quad (4.3)$$

Оператор  $\Gamma_v$ , очевидно, может быть представлен в виде

$$\Gamma_v(\Lambda^2, p_3^{+2}, (p_4 + k)^2) = (p_3^+ + p_4 + k) \sqrt{\varphi_1} + (p_4 + k - p_3^+) \sqrt{\varphi_2},$$

$$\Gamma_v(\Lambda^2, (p_3^+ + k)^2, p_4^2) = (p_3^+ + p_4 + k) \sqrt{\tilde{\varphi}_1} + (p_4 - k - p_3^+) \sqrt{\tilde{\varphi}_2}, \quad (4.4)$$

где  $\varphi_k, \tilde{\varphi}_k$  — скалярные функции тех же аргументов. При этом из требования калибровочной инвариантности

$$\Lambda_\nu \Gamma^\nu(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = 0 \quad (4.5)$$

имеем

$$\varphi_1(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = \tilde{\varphi}_1(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = 0. \quad (4.6)$$

Разлагая функции  $\varphi_2, \tilde{\varphi}_2$  по степеням  $k$  и учитывая, что

$$\varphi_2(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = \tilde{\varphi}_2(\Lambda^2, p_3^{+2}, p_4^2) = F(\Lambda^2) \quad (4.7)$$

есть электромагнитный формфактор пиона, получаем для  $T_{\nu\mu}^A$  из (4.3)

$$T_{\nu\mu}^A = \left[ (p_4 + k - p_3^+)_{\nu} \frac{p_{4\mu}}{(p_4 k)} - (p_4 - p_3^+ - k)_{\nu} \frac{p_{3\mu}^+}{(p_3^+ k)} \right] F(\Lambda^2) + \\ + 2(p_4 + p_3^+)_{\nu} [p_{4\mu}(\varphi_1)_3 - p_{3\mu}^+(\tilde{\varphi}_1)_2] + \\ + 2p_{4\mu}(p_4 - p_3^+)_{\nu}(F)_3 - 2p_{3\mu}^+(p_4 - p_3^+)_{\nu}(F)_2. \quad (4.8)$$

Здесь  $(F)_3$  и  $(F)_2$  есть производные формфактора  $F$  по соответствующему аргументу, взятые при  $k = 0$ .

Кроме того, должен выполняться закон сохранения тока

$$k_{\mu} T_{\nu\mu} = k_{\mu} T_{\nu\mu}^A + k_{\mu} T_{\nu\mu}^B = 0. \quad (4.9)$$

Отсюда, учитывая, что  $T_{\nu\mu}^B$  не содержит инфракрасных расходимостей, получаем

$$T_{\nu\mu}^B = -2g_{\mu\nu}F(\Lambda^2) - 2(p_4 + p_3^+)_{\nu} [p_{4\mu}(\varphi_1)_3 - p_{3\mu}^+(\tilde{\varphi}_1)_2] - \\ - 2p_{4\mu}(p_4 - p_3^+)_{\nu}(F)_3 + 2p_{3\mu}^+(p_4 - p_3^+)_{\nu}(F)_2. \quad (4.10)$$

Следовательно, полное выражение для  $T_{\nu\mu}$  (оставлены только два первых члена разложения) есть

$$T_{\nu\mu} = \left[ (p_4 + k - p_3^+)_{\nu} \frac{p_{4\mu}}{(k p_4)} - (p_4 - p_3^+ - k)_{\nu} \frac{p_{3\mu}^+}{(k p_3^+)} - 2g_{\mu\nu} \right] F(\Lambda^2). \quad (4.11)$$

Видно, что производные по массам сократились, что имеет место во всех случаях [3, 5]. Полученное выражение представляет матричный элемент излучения точечной частицей, умноженный на формфактор. Это соответствует известному утверждению [5-7], что первые два члена разложения амплитуды по частотам фотонов определяются полным зарядом системы и, следовательно, зависят только от формфактора. Ясно, что вычисление интегрального сечения проводится так же, как и для точечных частиц. При этом сечение излучения фотона пионами (см. (2.22)) с точностью до членов первого порядка по  $\omega/E$  и в ультрарелятивистском пределе по электронам имеет вид

$$d\sigma_{\pi} = \frac{\alpha^3}{24E^4} \frac{d\omega}{\omega} \left( \frac{\Lambda^2 - 4\mu^2}{\Lambda^2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) [(\Lambda^2 - 2\mu^2)L_1 - \Lambda^2] F(\Lambda^2), \quad (4.12)$$

сечение излучения фотона электронами

$$d\sigma_e = \frac{\alpha^3}{6E^2} \frac{d\omega}{\omega} \left( \frac{\Lambda^2 - 4\mu^2}{\Lambda^2} \right)^{3/2} (L - 1) \left[ F(\Lambda^2) - \frac{\omega}{E} \Lambda^2 \frac{dF(\Lambda^2)}{d\Lambda^2} \right], \quad (4.13)$$

а интерференционный член, как показано в конце раздела 2, равен нулю.

Полное сечение излучения при рождении пары пионов в электрон-позитронной аннигиляции с точностью до членов первого порядка по  $\omega/E$  есть<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Заметим, что в широком интервале энергий  $d\sigma_{\pi} \approx 0,1d\sigma_e$ , так что основной вклад дает сечение  $d\sigma_e$ , которое мы вычисляем точно. Кроме того, если  $d\sigma_e$  в (2.22) разложить по степеням  $\omega/E$  и оставить два первых члена разложения, то это обеспечивает весьма высокую точность вплоть до  $\omega/E \sim 1/2$ , что следует прямо из сравнения разложения с точным результатом.



$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_\pi. \quad (4.14)$$

Как и следовало ожидать, оно выражается через электромагнитный форм-фактор пиона и его производную по переданному импульсу. Точно таким же способом может быть получено интегральное сечение излучения в случае рождения протон-антипротонной пары.

Авторы благодарны В. М. Галицкому за многочисленные обсуждения.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Сечение излучения точечными конечными частицами может быть вычислено с помощью следующего простого приема. Представим  $d\sigma_s$  (2.15) в виде

$$d\sigma_s = \frac{\alpha^3}{4(2\pi)^2|F|} \frac{1}{\Lambda^4} I_e^{vv'} R_{vv'}, \quad (П.1)$$

где

$$R_{vv'} = \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{d^3p_3}{E_3} \frac{d^3p_4}{E_4} \omega^2 d\Omega_k \delta(\Lambda - p_4 - p_3^+ - k) T_{vv'}, \quad (П.2)$$

может зависеть только от 4-вектора, фиксирующего систему отсчета, в которой выбрана энергия фотона  $\omega$ . Таким вектором является  $n_\mu(1, 0, 0, 0) = = \Lambda_\mu / \sqrt{\Lambda^2}$ . Учитывая калибровочную инвариантность, имеем

$$R_{vv'} = \frac{d\omega}{\omega} \left[ g_{vv'} - \frac{\Lambda_\nu \Lambda_{\nu'}}{\Lambda^2} \right] f. \quad (П.3)$$

Величина  $f$  вычисляется, как обычно, с помощью свертки с тензором  $g^{vv'}$  и равна

$$f = \frac{16\pi^2}{3} \left( \frac{\Delta^2 - 4\mu^2}{\Delta^2} \right)^{1/2} E^2 \left\{ [(\Delta^2 - 2\mu^2)L_1 - \Delta^2] \left( 1 - \frac{\mu^2}{E^2} \right) + 4\omega^2 \right\}. \quad (П.4)$$

Подставляя выражение (П.3) в (П.1), получаем формулу (2.22).

Новосибирский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
41 января 1965 г.

#### Литература

- [1] В. Н. Байер, В. А. Хозе. ЖЭТФ, 48, 946, 1965.
- [2] В. Н. Байер, В. С. Фадин. ДАН СССР, 161, 74, 1965.
- [3] F. Low. Phys. Rev., 110, 974, 1958.
- [4] V. Bayer, V. Galitsky. Phys. Lett., 13, 355, 1964.
- [5] С. М. Биленький, Р. М. Рындин. ЖЭТФ, 40, 819, 1961.
- [6] F. Low. Phys. Rev., 96, 1428, 1954.
- [7] M. Gell-Mann, M. Goldberger. Phys. Rev., 96, 1433, 1954.

#### RADIATION EMISSION IN TWO-PARTICLE ELECTRON-POSITRON ANNIHILATION

V. N. Bayer, V. A. Khoze

The integral cross section for photon emission in electron-positron pair annihilation into a pair of scalar particles is calculated by a method previously proposed by the authors. An analysis of the photon emission cross section for annihilation of an electron — positron pair into a pair of any two particles is carried out by taking into account the form factors. The cross section for emission by electrons is calculated exactly whereas the emission cross section by final particles is expressed through the first two terms of the expansion in powers of  $\omega/E$ . For evaluation of the second expansion term the Low method is employed. The interference term vanishes in all cross section considered.