

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ

Л. М. Альтишюль, В. И. Карпман

Развита общая теория возмущений для нелинейных колебаний в плазме без столкновений, не ограниченная какими-либо предположениями о хаотичности фаз. Суммирование секулярных членов теории возмущений приводит к уравнениям для «медленных» процессов. В случае достаточно широких волновых пакетов эти уравнения переходят в известные уравнения квазилинейной теории для слаботурбулентной плазмы. Подробно исследован противоположный предельный случай — эволюция периодической волны в квазилинейном приближении.

1. Введение

Нелинейные колебания в плазме без столкновений, описываемые уравнениями ¹⁾

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_j}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_j}{m_j} \mathbf{E} \frac{\partial F_j}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi \sum_j e_j N_j \int F_j d\mathbf{v} \quad (1.2)$$

(j — индекс, указывающий сорт частиц), рассматривались в ряде работ (см. обзоры [1, 2], где приведена подробная библиография, а также более поздние работы [3–10]). Характерной особенностью методов, развиваемых в этих работах, является использование в той или иной форме так называемого приближения «хаотических фаз», так что их результаты применимы лишь к турбулентной плазме, где ширина волнового пакета достаточно велика. Между тем, в ряде случаев (например, в ограниченной плазме) возникает задача исследования динамики нелинейных периодических волн, характеризующихся дискретным набором волновых чисел k ; естественно, что в этом случае приближение хаотических фаз уже неприменимо.

В настоящей работе рассматривается общая теория возмущений для плазменных колебаний, не ограниченная какими-либо предположениями о хаотичности фаз. Формальное разложение проводится по степеням поля колебаний; затем в общих рядах теории возмущений выделяются и суммируются последовательности секулярных членов, аналогично тому, как это делается в работах Ван Хова [11], Пригожина [12], Балеску [13] при получении кинетических уравнений для слабонеидеальных систем. Суммирование «главных» последовательностей секулярных членов приводит к квазилинейным уравнениям, описывающим обратное влияние колебаний на функцию распределения частиц плазмы. Применимость этих уравнений, однако, не ограничена какими-либо условиями относительно ширины волнового пакета. Если эта ширина достаточно велика, то упомянутые уравнения переходят в известные уравнения квазилинейной теории для

¹⁾ Для простоты мы будем рассматривать потенциальные колебания без магнитного поля, хотя все результаты без принципиальных трудностей распространяются на общий случай.

слаботурбулентной плазмы [14, 15]. В противоположном предельном случае получаются уравнения для «монохроматической» волны. Решение этих уравнений, найденное в настоящей работе, описывает эволюцию функции распределения плазмы и поля «монохроматической» волны с учетом обратного влияния волны на функцию распределения.

2. Теория возмущений. Суммирование диаграмм

Следуя работе Ландау [16], будем искать решение уравнений (1.1), (1.2) при начальном условии ²⁾

$$F(0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}^0(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = f(\mathbf{v}) + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2.1)$$

(индекс, указывающий сорт частиц здесь и всюду в дальнейшем, для краткости опускается). Разлагая $F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ в ряд Фурье:

$$F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2.2)$$

и применяя преобразование Лапласа к величинам, зависящим от времени ³⁾:

$$F_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = \int_0^{\infty} F_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{v}) e^{i\omega t} dt, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) = \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\omega t} dt, \quad (2.3)$$

получим вместо (1.1) следующее интегральное уравнение:

$$F_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{e}{im} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}(\omega') \frac{\partial F_{\mathbf{k}''}(\omega - \omega', \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \frac{iF_{\mathbf{k}}^0(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad (2.4)$$

где $F_{\mathbf{k}}^0(\mathbf{v})$ определяется начальными условиями (2.1). При получении (2.4) мы воспользовались соотношением свертки (см. примечание 3).

Разложим решение уравнения (2.4) в ряд по степеням поля \mathbf{E} :

$$F_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}), \quad (2.5)$$

²⁾ Нормировочный объем всюду принят равным единице.

³⁾ Соответствующие величины в лапласовском представлении являются аналитическими в верхней полуплоскости ω , кроме, может быть, некоторой окрестности действительной оси. Обратные преобразования имеют вид

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \delta > 0.$$

Для дальнейшего также полезно иметь в виду соотношение свертки:

$$\int_0^{\infty} F_1(t) F_2(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int d\omega' F_1(\omega') F_2(\omega - \omega') = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int \frac{d\omega' d\omega''}{\omega' + \omega'' - \omega} F_1(\omega') F_2(\omega''),$$

где интегрирование проводится по линиям, лежащим в верхней полуплоскости, удовлетворяющим условию $\text{Im } \omega > \text{Im } \omega' + \text{Im } \omega''$.

где $F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}) \propto E^n$, $E_k \propto g_k(\mathbf{v})$. За нулевое приближение примем $f(\mathbf{v})$ (см. (2.1)). Первое приближение дается соотношением ($\mathbf{k} \neq 0$)

$$F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega, \mathbf{v}) = \frac{e}{im} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{df}{d\mathbf{v}} + \frac{ig_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}. \quad (2.6)$$

Из (2.4) вытекает следующая рекуррентная формула для $F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v})$ при $n \geq 2$:

$$F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}) = \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} \frac{e}{im} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}(\omega') \frac{\partial F_{\mathbf{k}''}^{(n-1)}(\omega - \omega', \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.7)$$

С помощью (2.7), (2.6) получаем выражение для общего члена ряда (2.5):

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}) = & \left(\frac{e}{2\pi im} \right)^n \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\dots+\mathbf{k}_n} \left\{ \int d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1}(\omega_1)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \times \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}_2}(\omega_2)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_1 + \mathbf{k}_1\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \dots \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}_n}(\omega_n)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \\ & \times \frac{f(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \sum_{i=1}^n (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} - \frac{2\pi m}{e} \int d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_n \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}_1}(\omega_1)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}_2}(\omega_2)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_1 + \mathbf{k}_1\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \dots \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{k}_{n-1}}(\omega_{n-1})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n-2} (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} \times \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{g_{\mathbf{k}_n}(\mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} \right\}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Можно дать простое наглядное представление общего члена, введя его диаграммное изображение (рис. 1). Сплошным вертикальным линиям на рис. 1 соответствуют $\mathbf{E}_{\mathbf{k}_s}(\omega_s)$, горизонтальным — «пропэгаторы»

$$\left[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \sum_{i=1}^s (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v}) \right]^{-1} \quad (0 \leq s \leq n);$$

s -й вершине отвечает интегродифференциальный оператор

$$\frac{e}{im} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \frac{d\omega_s}{2\pi};$$

кружок в первом члене рис. 1 изображает функцию $f(\mathbf{v})$, а вертикальная пунктирная линия во втором члене — функцию $ig_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})$. Порядок диаграммы определяется числом вертикальных линий (включая пунктирную). Из рис. 1 видно, что член каждого порядка теории возмущений в функции распределения состоит из двух отдельных частей: части, зависящей от $f(\mathbf{v})$ (с кружком в правом конце на рис. 1), и части, зависящей от $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})$ (с одной пунктирной линией в правом конце диаграммы).

Рассмотрим теперь уравнение (1.2) для поля волны. Учитывая (2.2), (2.3), (2.5), перепишем (1.2) в виде

$$\mathbf{k} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) = -4\pi i e N \sum_{n=1}^{\infty} \int F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.9)$$

(здесь и в дальнейшем для сокращения записи формул мы опускаем символ суммирования по сортам частиц; восстановление соответствующего

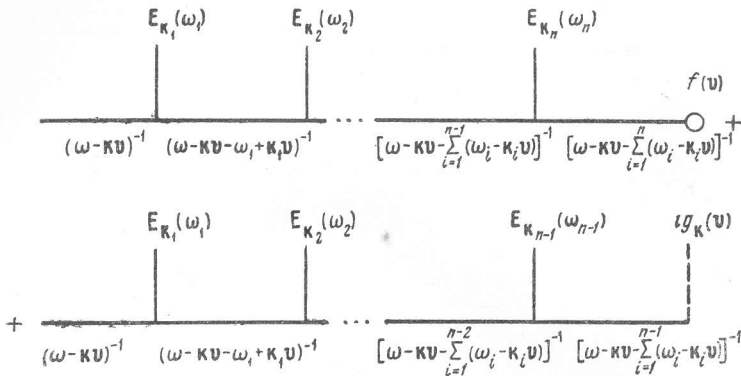


Рис. 1

суммирования в окончательных формулах не представляет затруднения). Подставляя в член первого приближения в правой части (2.9) $F_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega, \mathbf{v})$ из (2.6) и объединяя члены, линейные по E , мы можем переписать (2.9) в виде

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega) \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{4\pi e N}{k^2} \mathbf{k} \int \frac{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} - \frac{4\pi i e N}{k^2} \mathbf{k} \sum_{n=2}^{\infty} \int F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad (2.10)$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega) = 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \int \frac{d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \frac{df}{d\mathbf{v}}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}. \quad (2.11)$$

Второй член в правой части (2.10) описывает нелинейные эффекты. Если им пренебречь, то получается известное уравнение для поля колебаний в линейном приближении, полученное Ландау [16],

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = \int \frac{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}(\omega)}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \approx \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^0 e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{4\pi e N}{k^2} \mathbf{k} \int \frac{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}, \quad \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^0 = \frac{\mathbf{r}_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}})}{\varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}})}, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}'(\omega_{\mathbf{k}}) = \left. \frac{d\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{\mathbf{k}}}; \quad (2.13)$$

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}^0 + i\gamma_{\mathbf{k}}, \quad \gamma_{\mathbf{k}} = \pi \left. \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}}' k^2} \frac{df}{d\mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}=\omega_{\mathbf{k}}^0/k}, \quad (2.14)$$

где $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^0$ — амплитуда колебаний, которая, как отмечалось выше, имеет тот же порядок величины, что и начальное возмущение $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})$, а $\omega_{\mathbf{k}}$ — комплексная частота колебаний, являющаяся корнем дисперсионного уравнения $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega) = 0$ с наибольшей мнимой частью. В правой части (2.12) опу-

щены члены, соответствующие другим корням дисперсионного уравнения; эти члены экспоненциально малы при $t \rightarrow \infty$. В дальнейшем предполагается, что выполнено условие

$$\gamma_k / \omega_k \ll 1, \tag{2.15}$$

без которого излагаемые ниже результаты неприменимы.

В формальном разложении (2.5) не все нелинейные члены являются действительно малыми (в том смысле, что после перехода к t -представлению они могут стать большими при достаточно больших t). Для получе-

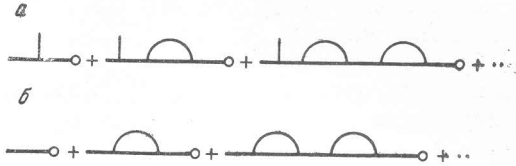


Рис. 2

ния правильной асимптотики при больших t такие члены должны быть выделены и просуммированы. Для выявления «больших» членов подставим сначала в выражение для общего члена (2.8) вместо точных компонент поля $E_{k_s}(\omega_s)$, удовлетворяющих уравнению (2.10), их значения в линейном приближении (2.12), причем пренебрежем мнимыми частями частот ω_{k_s} . В лапласовском представлении соответствующие выражения будут иметь вид:

$$E_{k_s}(\omega_s) = \frac{iE_{k_s}^0}{\omega_s - \omega_{k_s}^0}, \tag{2.16}$$

где $E_{k_s}^0$ — амплитуда колебаний в линейном приближении, определяемая равенством (2.13). Благодаря простому виду $E_{k_s}(\omega_s)$ в (2.16), можно легко выполнить интегрирование по всем ω_s в общем члене (2.8), в результате чего величины ω_s заменяются на $\omega_{k_s}^0$, а $E_{k_s}(\omega_s)$ — на $E_{k_s}^0$.

Заметим теперь, что среди различных диаграмм в сумме по k_s на рис. 1 будут диаграммы, в которых рядом стоящие линии отвечают сопряженным компонентам поля ($k_s = -k_{s+1}$, $\omega_{k_s}^0 = -\omega_{k_{s+1}}^0$). Такие линии мы будем называть спаренными. Спаренные линии на диаграммах замыкаются в петли (см. рис. 2). Пропагаторы, стоящие с двух сторон петли, оказываются одинаковыми, что приводит к появлению в $F_{k_s}^{(n)}(\omega, \mathbf{v})$ кратных полюсов по ω . В t -представлении соответствующие члены будут секулярными, т. е. пропорциональными t^r , где $r + 1$ — кратность полюса в лапласовском представлении.

В качестве типичного примера рассмотрим выражение, изображаемое диаграммой второго порядка на рис. 2, б. После подстановки приближения (2.16) для поля $E_{k_s}(\omega_s)$ и выполнения интегрирования по ω_s , получаем для него

$$\left(\frac{e}{im}\right)^2 \sum_q \frac{E_q^0}{\omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{E_{-q}^0}{\omega - \omega_q^0 + \mathbf{q}\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{f(\mathbf{v})}{\omega}. \tag{2.17}$$

Это выражение, являющееся одним из вкладов в фурье-компоненту функции распределения с $\mathbf{k} = 0$, имеет полюс второго порядка при $\omega = 0$; соответственно в t -представлении оно дает секулярный член, пропорциональный t . Аналогично, для выражения, изображаемого диаграммой третьего

порядка на рис. 2, а (дающего вклад в k -компоненту Фурье функции распределения), получаем

$$\left(\frac{e}{im}\right)^3 \sum_q \frac{E_k^0}{\omega - kv} \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_q^0}{\omega - \omega_k^0} \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_{-q}^0}{\omega - \omega_k^0 - \omega_q^0 + qv} \frac{\partial}{\partial v} \frac{f(v)}{\omega - \omega_k^0}. \quad (2.18)$$

Выражение (2.18) имеет полюс второго порядка при $\omega = \omega_k^0$ (в t -представлении оно пропорционально $t \exp(-i\omega_k^0 t)$).

Выше предполагалось, что вместо $E_k(\omega)$ подставляются выражения (2.16). Если подставлять точные $E_k(\omega)$ или (2.16), но с комплексной частотой $\omega_k = \omega_k^0 + i\gamma_k$, то после перехода к t -представлению секулярные члены не будут появляться, однако если $|E_k(t)|$ медленно зависит от времени, то члены, содержащие спаренные E_k , будут хотя и не секулярными, но большими при достаточно больших t^4 .

Таким образом, нелинейные члены в уравнении для поля (2.9) при достаточно больших временах будут приводить не только к малым поправкам к решению соответствующего линеаризованного уравнения, но могут совершенно изменить это решение. Для получения правильной асимптотики поля при больших t указанные выше «большие» члены должны быть просуммированы. Член n -го порядка в уравнении (2.9) содержит, вообще говоря, несколько секулярных слагаемых, отличающихся показателями секулярности (т. е. степенью t , содержащейся в этом слагаемом после перехода к t -представлению). Члены, имеющие максимальный показатель секулярности при заданном порядке n , будем называть главными. В этой работе мы ограничимся суммированием только главных секулярных членов (учет членов, имеющих меньшую степень секулярности, рассмотрен в [18]). Можно показать [18], что главные секулярные члены в правой части уравнения (2.9) изображаются диаграммами, приведенными на рис. 2, а. Обозначим сумму диаграмм на рис. 2, а через $\Phi_k(\omega, v)$. Легко видеть, что эта величина просто выражается через функцию $\Phi(\omega, v)$, являющуюся суммой всех диаграмм, изображенных на рис. 2, б, а именно

$$\Phi_k(\omega, v) = \frac{e}{im} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{E_k(\omega')}{\omega - kv} \frac{\partial \Phi(\omega - \omega', v)}{\partial v}. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.9) с учетом только главных секулярных членов принимает вид

$$\begin{aligned} kE_k(\omega) &= 4\pi eN \int \frac{g_k(v)}{\omega - kv} dv - 4\pi i eN \int \Phi_k(\omega, v) dv = \\ &= 4\pi eN \int \frac{g_k(v)}{\omega - kv} dv - \omega_0^2 \int \frac{d\omega'}{2\pi} \int \frac{dv E_k(\omega')}{\omega - kv} \frac{\partial \Phi(\omega - \omega', v)}{\partial v}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Отсюда получаем основное уравнение для поля в виде

$$\int \frac{d\omega'}{2\pi} \varepsilon_k(\omega, \omega') E_k(\omega') = 4\pi eN \frac{k}{k^2} \int \frac{g_k(v)}{\omega - kv} dv, \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_k(\omega, \omega') = \frac{i}{\omega - \omega'} + \frac{\omega_0^2}{k^2} \int \frac{dv}{\omega - kv} k \frac{\partial \Phi(\omega - \omega', v)}{\partial v}. \quad (2.22)$$

⁴) Если вместо $E_k(\omega)$ подставлять (2.16) с комплексным ω_k , то, как нетрудно убедиться, вместо секулярного множителя t^r будет стоять $(\omega_k^0/\gamma_k)^r \gg 1$, так что соответствующие члены по-прежнему следует считать большими. Основное отличие результатов настоящей работы от результатов работы Монтомгери [17] связано с тем, что в теории возмущений, развиваемой в [17], указанные большие члены не суммируются.

Уравнение (2.21) отличается от линейного уравнения для поля тем, что вместо диэлектрической проницаемости $\epsilon_k(\omega)$ в нем стоит интегральный оператор с ядром $\epsilon_k(\omega, \omega')$, выражающимся через функцию $\Phi(\omega, \mathbf{v})$. Если заменить $\Phi(\omega, \mathbf{v})$ нулевым приближением функции распределения (первое слагаемое на рис. 2, б), т. е. положить $\Phi(\omega, \mathbf{v}) = if(\mathbf{v})/\omega$, то (2.21) переходит в линейное уравнение для поля.

Чтобы получить полную систему уравнений, описывающих эволюцию колебаний, нам необходимо еще получить уравнение для функции $\Phi(\omega, \mathbf{v})$. Эта величина имеет смысл функции распределения, усредненной по пространственным пульсациям. В дальнейшем мы будем называть ее функцией распределения фона. Из вида диаграмм на рис. 2, б следует, что $\Phi(\omega, \mathbf{v})$ удовлетворяет уравнению

$$-i\omega\Phi(\omega, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + \frac{ie^2}{m^2} \sum_q \int E_{-q}(\omega') \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{E_q(\omega'')}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \omega'} \frac{\partial \Phi(\omega - \omega' - \omega'', \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega''}{2\pi}, \quad (2.23)$$

которое является аналогом уравнения Дайсона в квантовой теории поля.

Уравнения (2.21), (2.23) мы будем называть обобщенными квазилинейными уравнениями⁵⁾. При некоторых дополнительных предположениях они переходят в известные уравнения квазилинейной теории для слаботурбулентной плазмы [14, 15]. Как будет видно из дальнейшего, условия, при которых это имеет место, состоят в том, что ширина спектра колебаний плазмы должна быть достаточно большой. В другом предельном случае, когда спектр является очень узким, например, когда в плазме возбуждается «монокроматическая» (точнее — периодическая) волна, уравнение (2.23), сохраняя тот же смысл, что и для слаботурбулентной плазмы (учет обратного влияния волны на функцию распределения), имеет совершенно другие свойства и, соответственно, решения.

Рассмотрим теперь подробнее, каким образом уравнение (2.23) переходит в квазилинейное уравнение для слаботурбулентной плазмы. Подставим сначала в правую часть $E_q(\omega)$ в виде (2.16) (это означает, что мы пренебрегаем зависимостью амплитуд поля $|E_q(t)| = E_q^0$ от времени) и произведем интегрирование по ω' и ω'' . В результате получим

$$-i\omega\Phi(\omega, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + i\left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_q \frac{|E_q^0|^2}{q^2} \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega + \omega_q - \mathbf{q}\mathbf{v}} \mathbf{q} \frac{\partial \Phi(\omega, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.24)$$

Область значений ω , где $\Phi(\omega, \mathbf{v})$ велика, связана с характерным временем τ изменения функции $\Phi(t, \mathbf{v})$ соотношением $|\omega| \sim \tau^{-1}$. Предположим, что выполнено условие

$$\tau^{-1} \ll |\omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v}|, \quad (2.25)$$

где усреднение проводится по \mathbf{q} . Тогда в знаменателе правой части (2.24) можно пренебречь ω ; однако, поскольку ω лежит в верхней полуплоскости, нужно положить $\omega \rightarrow i0$. После этого в уравнении (2.24) можно сразу перейти к t -представлению, и мы получаем квазилинейное уравнение для слаботурбулентной плазмы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{v})}{\partial t} &= i \frac{e^2}{m^2} \int \frac{d\mathbf{q}}{q^2} |E^0|^2 \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v} + i0} \mathbf{q} \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \\ &= \pi \frac{e^2}{m^2} \int \frac{d\mathbf{q}}{q^2} |E_q^0|^2 \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v}) \mathbf{q} \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁵⁾ Подчеркнем, что при суммировании диаграмм, приводящих к уравнениям (2.21), (2.23), мы не пользовались приближением (2.16) для поля. Последнее нам было необходимо только для выявления «больших» членов.

Выясним смысл условия (2.25). Поскольку правая часть (2.25) будет минимальной, когда v лежит в резонансной области скоростей, положим $v \sim \omega_q / q$. Рассматривая, для простоты, случай ленгмюровских колебаний, для которых $\omega_q \sim \omega_0$, и полагая $v = \omega_0 / q_0$, где q_0 — среднее волновое число, получим вместо (2.25)

$$\tau^{-1} \ll \omega_0 \Delta q / q_0 \quad (2.27)$$

(Δq — ширина волнового пакета). Величина τ здесь имеет смысл характерного времени релаксации функции распределения в резонансной области скоростей и определяется условием

$$\tau \sim D / (\Delta v)^2, \quad D \sim e^2 q^2 \varphi^2 / m^2 \Delta q v, \quad \Delta v = \Delta(\omega_q / q) \sim \omega_0 \Delta q / q^2, \quad (2.28)$$

где D — коэффициент квазилинейной диффузии в пространстве скоростей, а φ — средний потенциал электрического поля волны:

$$|\varphi|^2 = \int |\varphi_q|^2 d\mathbf{q} \sim |\varphi_0|^2 \Delta q.$$

Подставляя (2.28) в (2.27), получаем, что условие, при котором уравнение (2.24) переходит в квазилинейное уравнение, имеет вид

$$\Delta v = \Delta(\omega_q / q) \gg (e\varphi / m)^{1/2}, \quad (2.29)$$

что совпадает с условием применимости квазилинейного уравнения, полученным Веденовым и др. [14] из других соображений.

Физический смысл (2.29) состоит в том, что ширина разброса фазовых скоростей волн должна значительно превышать скорость колебаний частиц в потенциальной яме поля волны с амплитудой φ . С другой стороны, (2.29) можно рассматривать как критерий того, что плазма является турбулентной. Уравнение (2.26) не содержит членов, описывающих «адиабатическое» изменение функции распределения в нерезонансной области. Для получения этих членов обратимся к интегралу в правой части (2.23) и учтем эффекты, связанные со слабым изменением амплитуды поля. Поскольку $E_q(\omega)$ становится особенно большим при $\omega = \omega_q^0$, то основной вклад в интеграл в (2.23) вносят области, где $\omega'' \sim \omega_q^0$, $\omega' \sim \omega_q^0 = -\omega_q^0$. Поэтому представим знаменатель подынтегрального выражения в виде $\omega - \omega' - \omega_q^0 + \omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v}$ и разложим $(\omega - \omega' - \omega_q^0)^{-1}$ в ряд по степеням $\omega - \omega' - \omega_q^0$, ограничиваясь двумя членами разложения:

$$\frac{1}{\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \omega'} \approx \frac{1}{\omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v} + i0} - \frac{\omega - \omega' - \omega_q^0}{(\omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v} + i0)^2}. \quad (2.30)$$

Подставляя это выражение в (2.23) и воспользовавшись соотношением свертки (см. примечание 3), получаем в t -представлении

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{v})}{\partial t} = & \pi \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int \frac{d\mathbf{q}}{q^2} |E_q(t)|^2 \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v}) \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \Phi(t, \mathbf{v}) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int \frac{d\mathbf{q}}{q^2} \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \frac{1}{(\omega_q^0 - \mathbf{q}\mathbf{v})^2} \left[\frac{d|E_q(t)|^2}{dt} \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \Phi(t, \mathbf{v}) + 2|E_q(t)|^2 \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{v}) \right] \right\}, \quad (2.31) \end{aligned}$$

где второй интеграл берется в смысле главного значения. Членом с $\partial \Phi / \partial t$ в правой части, очевидно, можно пренебречь. После этого (2.31) будет полностью совпадать с квазилинейным уравнением, учитывающим адиабати-

ческое изменение функции распределения в нерезонансной области. Условия применимости этого уравнения по-прежнему определяются соотношением (2.23).

Аналогичным образом можно показать (подробнее см. [19], стр. 14, 15), что уравнение для поля (2.21) при выполнении условия (2.29) переходит в уравнение квазилинейной теории для слаботурбулентной плазмы:

$$\frac{d\mathbf{E}_k(t)}{dt} = [-i\omega_k^0 + \gamma_k(t)] \mathbf{E}_k(t), \quad (2.32)$$

$$\gamma_k(t) = \pi \frac{\omega_0^2}{\epsilon_k' k^2} \frac{\partial \Phi(t, v)}{\partial v} \Big|_{v=\omega_k^0/k}, \quad (2.33)$$

где ω_k^0 — действительная часть частоты в линейном приближении.

3. Квазилинейная теория «монохроматической» волны

В этом разделе мы подробно рассмотрим применение обобщенных квазилинейных уравнений (2.21), (2.23) к исследованию эволюции нелинейной «монохроматической» волны. Сумма в (2.23) относится теперь к дискретному набору волновых векторов $\mathbf{q} = n\mathbf{k}$, $n = \pm 1, 2, \dots$, где $2\pi/k$ — длина волны, причем амплитуды кратных гармоник будут иметь более высокий порядок малости по сравнению с амплитудой первой гармоники, так что ими можно пренебречь. Пренебрегая также в уравнении (2.23) зависимостью амплитуды волны от времени ⁶⁾, мы приходим к уравнению (2.24), в котором сумма состоит из двух слагаемых, отвечающих $\mathbf{q} = \pm \mathbf{k}$. Введя более удобные для этого случая обозначения

$$\alpha^2 = 2^{1/2} k e E_k^0 / m, \quad u = v - \omega_k / k, \quad x = ku / \alpha \quad (3.1)$$

(величина α имеет порядок частоты колебаний частиц, захваченных потенциальной ямой волны; соответственно α/k — порядок скорости захваченных частиц), получаем основное уравнение в виде

$$\Phi(\omega, x) = \frac{i}{\omega} f(x) - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\omega^2 - \alpha^2 x^2} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\omega, x). \quad (3.2)$$

Для решения этого уравнения введем функцию

$$\Psi(\omega, x) = \frac{\alpha^2}{\omega^2 - \alpha^2 x^2} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\omega, x). \quad (3.3)$$

Дифференцируя обе части уравнения (3.2) по x и подставляя туда (3.3), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\omega, x) + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - x^2 \right) \Psi(\omega, x) = \frac{i}{\omega} \frac{df}{dx}. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) может быть представлено в виде разложения по нормированным функциям параболического цилиндра $\psi_n(x)$:

$$\psi_n(x) = (2^n n! \pi^{1/2})^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x) dx = 1,$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита. Функции $\psi_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + (2n + 1 - x^2) \psi_n(x) = 0. \quad (3.5)$$

⁶⁾ Как будет показано ниже, это законно при выполнении условия (3.28).

Полагая

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \psi_n(x), \quad \beta_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \frac{df}{dx} dx, \quad (3.6)$$

из (3.3), (3.4) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\omega, x)}{\partial x} &= i \frac{\omega^2 - \alpha^2 x^2}{\omega} \sum_n \frac{\beta_n \psi_n(x)}{\omega^2 - (2n+1)\alpha^2} = \\ &= \frac{i}{\omega} \frac{df}{dx} + \frac{i\alpha^2}{\omega} \sum_n \frac{2n+1-x^2}{\omega^2 - (2n+1)\alpha^2} \beta_n \psi_n(x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Переходя к t -представлению, получаем

$$\frac{\partial \Phi(t, x)}{\partial x} = \frac{df}{dx} - \sum_n \frac{2n+1-x^2}{2n+1} \beta_n \psi_n(x) [1 - \cos at \sqrt{2n+1}]. \quad (3.8)$$

Для вычисления функции распределения $\Phi(t, x)$ заменим в (3.8) $(x^2 - 2n - 1)\psi_n(x)$ на $d^2\psi_n(x)/dx^2$, после чего интегрирование проводится элементарно. Возвращаясь к переменной u , согласно (3.1), получаем

$$\Phi(t, u) = f(u) + \frac{\alpha}{k} \sum_n \frac{\beta_n}{2n+1} \frac{d}{du} \psi_n\left(\frac{ku}{\alpha}\right) (1 - \cos at \sqrt{2n+1}). \quad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что $\Phi(t, u)$ мало отличается от своего начального значения $f(u)$ при $t \ll \alpha^{-1} \sim (keE_0/m)^{-1/2}$, где E_0 — амплитуда волны. При $t > \alpha^{-1}$ второй член в (3.9) осциллирует с изменением t , причем он быстро убывает при

$$u = v - \omega_k/k \gg \alpha/k \sim (eE_0/km)^{1/2},$$

т. е. квазилинейная функция распределения искажается только вблизи резонансной скорости $v = \omega_k/k$ в интервале скоростей порядка скорости колебаний частиц, «захваченных» волной. Частота осцилляций функции распределения вблизи фазовой скорости, как видно из (3.9), порядка α , что совпадает с частотой колебаний частиц в потенциальной яме волны.

Подставляя теперь (3.7) в выражение (2.22) для $\epsilon_k(\omega, \omega')$, получим

$$\begin{aligned} \epsilon_k(\omega, \omega') &= \frac{i}{\omega - \omega'} \left[1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \int \frac{dv}{\omega - kv} k \frac{df}{dv} + \right. \\ &+ \left. \frac{\omega_0^2}{\alpha} \sum_n \frac{\beta_n}{(\omega - \omega')^2 - (2n+1)\alpha^2} \int du \frac{(2n+1)\alpha^2 - k^2u^2}{\omega - \omega_k - ku} \psi_n\left(\frac{ku}{\alpha}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

Используя (3.10) и (2.21) и производя элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} E_k(\omega) &= \frac{4\pi eN}{k\epsilon_k(\omega)} \int \frac{g_k(v)}{\omega - kv} dv - \frac{i\omega_0^2}{2\pi\alpha\epsilon_k(\omega)} \sum_n \beta_n \times \\ &\times \int du \psi_n\left(\frac{ku}{\alpha}\right) \frac{(2n+1)\alpha^2 - k^2u^2}{\omega - \omega_k - ku} \int \frac{d\omega' E_k(\omega')}{(\omega - \omega')[(\omega - \omega')^2 - (2n+1)\alpha^2]}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\varepsilon_k(\omega)$ определяется формулой (2.11). Умножая обе части (3.11) на $i(\omega - \omega_k)$ (ω_k — частота колебаний в линейном приближении, см. (2.14)) и переходя к t -представлению, получим

$$\begin{aligned} \frac{dE_k(t)}{dt} = & -i\omega_k E_k(t) - \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' \alpha^3} \sum_n \frac{\beta_n}{2n+1} \int du \psi_n\left(\frac{ku}{\alpha}\right) \times \\ & \times [(2n+1)\alpha^2 - k^2 u^2] \int_0^t dt' (1 - \cos at' \sqrt{2n+1}) \times \\ & \times E_k(t') \exp[i(ku + \omega_k)(t' - t)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

При получении (3.12) мы пренебрегли всеми особенностями правой части (3.11), которые расположены ниже точки ω_k , так как они дают экспоненциально малый вклад при достаточно больших t . Кроме того, мы опустили член $\int dv g_k(v) e^{-ikvt}$, который быстро убывает с ростом t , благодаря осциллирующему при больших t множителю e^{-ikvt} . Характерное время этого убывания равно $(kv_g)^{-1}$, где v_g — эффективная «ширина» функции $g_k(v)$. Мы предполагаем, что это время мало по сравнению с другими характерными временами, определяющими изменение амплитуды поля. Используя (3.5) и соотношение (см. [20])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(y) e^{iyz} dy = (2\pi)^{1/2} i^n \psi_n(z), \quad (3.13)$$

выполним интегрирование по u во втором члене правой части (3.12). В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE_k(t)}{dt} = & -i\omega_k E_k(t) - (2\pi)^{1/2} \frac{\omega_0^2 \alpha^2}{\varepsilon_k' k} \sum_n \frac{i^n \beta_n}{2n+1} \int_0^t dt' (t' - t)^2 \times \\ & \times \psi_n[\alpha(t' - t)] (1 - \cos at' \sqrt{2n+1}) E_k(t') \exp[i\omega_k(t' - t)]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Подынтегральное выражение в (3.14) содержит произведение быстро меняющегося при изменении t' выражения

$$\psi_n[\alpha(t' - t)] (1 - \cos at' \sqrt{2n+1})$$

(характерное время изменения $\tau \lesssim \alpha^{-1}$) на величину $E_k(t') \exp(i\omega_k t')$, которая, очевидно, равна медленно меняющейся амплитуде поля $E_k^0(t')$. Пренебрегая изменением $E_k^0(t')$ за время α^{-1} , мы можем вынести $E_k^0(t')$ из-под интеграла. Выполняя после этого несложные преобразования, получаем

$$\frac{dE_k(t)}{dt} = [-i\omega_k + \theta_k(t)] E_k(t), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \theta_k(t) = & -(2\pi)^{1/2} \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' k \alpha} \sum_n (-1)^n \int_0^{\alpha t} d\tau \{ \beta_{2n} [\psi_{2n}(\tau) - \psi_{2n}(0) \cos \tau \sqrt{4n+1}] - \\ & - i\beta_{2n+1} [\psi_{2n+1}(\tau) - (4n+3)^{-1/2} \psi'_{2n+1}(0) \sin \tau \sqrt{4n+3}] \}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Интегрируя уравнение, будем иметь

$$E_k(t) = E_k(0) \exp \left\{ -it \left[\omega_k^0 + i\gamma_k + it^{-1} \int_0^t dt' \theta_k(t') \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Из (3.17) видно, что $t^{-1} \operatorname{Re} \int_0^t dt' \theta_k(t')$ представляет собой изменение

инкремента, а $t^{-1} \operatorname{Im} \int_0^t dt' \theta_k(t')$ — действительной части частоты, обус-

ловленное искажением функции распределения вследствие обратного влияния волны. Исследуя ряд (3.16), нетрудно убедиться, что он достаточно быстро сходится, так что порядок величины $\theta_k(t)$ не превышает порядка первого члена ряда. Вычисляя величины β_n из (3.6) в предположении, что $f(v)$ — распределение Максвелла, нетрудно получить

$$t^{-1} \int_0^t \theta_k(t') dt' \lesssim \gamma_k, \quad (3.18)$$

где γ_k — инкремент линейной теории. Поскольку $\gamma_k \ll \omega_k^0$, то нелинейной поправкой к действительной части частоты можно пренебречь. С другой стороны, поправка к линейному инкременту весьма существенна. Поэтому рассмотрим подробнее величину

$$\Gamma_k(t) = \gamma_k + t^{-1} \operatorname{Re} \int_0^t \theta_k(t') dt', \quad (3.19)$$

имеющую смысл инкремента, зависящего от времени.

Исследуем сначала $\Gamma_k(t)$ при малых t ($at \ll 1$). Мы воспользуемся тем обстоятельством, что при достаточно малых аргументах и больших порядках функции параболического цилиндра имеют следующее асимптотическое представление [20]:

$$\psi_{2n}(z) = \psi_{2n}(0) \{ \cos z \sqrt{4n+1} + O[z^{5/2}(4n+1)^{-1/4}] \}. \quad (3.20)$$

Учитывая (3.20), находим

$$t^{-1} \int_0^t dt' \int_0^{\alpha t'} d\tau [\psi_{2n}(\tau) - \psi_{2n}(0) \cos \tau \sqrt{4n+1}] < \psi_{2n}(0) (\alpha t)^{1/2} (4n+1)^{-1/4}, \quad (3.21)$$

откуда видно, что при $at \ll 1$ разница между $\Gamma_k(t)$ и линейным инкрементом есть малая величина порядка $(at)^{1/2}$. Отметим, что при $at \sim 1$ левая часть соотношения (3.21) достаточно быстро убывает с ростом n , благодаря чему в выражении (3.19) для $\Gamma_k(t)$ при $t \sim \alpha^{-1}$ можно ограничиться несколькими первыми членами ряда. Поскольку последние имеют порядок линейного инкремента γ_k , то отличие $\Gamma_k(t)$ от γ_k становится существенным при

$$t \sim \alpha^{-1} \sim (keE_k^0 / m)^{1/2}.$$

Исследуем теперь $\Gamma_k(t)$ при $t \gtrsim \alpha^{-1}$. Перепишем формулу (3.19) в виде

$$\Gamma_k(t) = \gamma_k - (2\pi)^{1/2} t^{-1} \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' k \alpha} \int_0^t dt' \left\{ \sum_n (-1)^n \beta_{2n} \int_0^{\alpha t'} d\tau \psi_{2n}(\tau) - \right. \\ \left. - \sum_n (-1)^n \beta_{2n} \int_{\alpha t'}^{\alpha t} d\tau \psi_{2n}(\tau) \right\} + (2\pi)^{1/2} t^{-1} \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' k \alpha^2} \times$$

$$\times \sum_n \frac{(-1)^n \beta_{2n}}{4n+1} \psi_{2n}(0) (1 - \cos at \sqrt{4n+1}). \quad (3.22)$$

Используя (3.13), (3.6), первый член в фигурных скобках можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_n (-1)^n \beta_{2n} \int_0^\infty \psi_{2n}(\tau) d\tau &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum \beta_{2n} \psi_{2n}(0) = \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{k}{\alpha} \frac{df}{dv} \Big|_{v=\omega_k/k}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Подстановка (3.23) в (3.22) приводит к точной компенсации первого члена γ_k в (3.22). Вторую сумму в фигурных скобках (3.22) представим в виде

$$\begin{aligned} \sum_n (-1)^n \beta_{2n} \int_{at'}^\infty d\tau \psi_{2n}(\tau) &= (2\pi)^{-1/2} \sum \beta_{2n} \int_{at'}^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty dx \psi_{2n}(x) e^{itx} = \\ &= \alpha (2\pi)^{-1/2} \int_{t'}^\infty dt'' \int_{-\infty}^\infty du \frac{df}{du} \cos(kut''). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Это выражение исчезает при $t \rightarrow \infty$ (учитывая, что $u = v - \omega_k/k$, $f(v) \propto \exp(-v^2/v_T^2)$, нетрудно убедиться, что член (3.24) начинает быстро убывать при $t > (kv_T)^{-1}$. Таким образом, при достаточно больших t величина $\Gamma_k(t)$ принимает вид

$$\Gamma_k(t) = \frac{2(2\pi)^{1/2} \omega_0^2}{\varepsilon_k' k \alpha^2 t} \sum_n \frac{(-1)^n \beta_{2n}}{4n+1} \psi_{2n}(0) \sin^2 at \sqrt{n+1/4}. \quad (3.25)$$

Итак, нелинейный инкремент $\Gamma_k(t)$ при временах, малых по сравнению с периодом колебаний частиц в потенциальной яме волны ($at \ll 1$), близок к линейному инкременту γ_k . При больших t величина $\Gamma_k(t)$, осциллируя, затухает как t^{-1} . Однако амплитуда волны, определяемая выражением

$$E_k^0(t) = E_k^0(0) \exp [t\Gamma_k(t)], \quad (3.26)$$

не стремится к стационарному значению при $t \rightarrow \infty$, так как осцилляции величины $t\Gamma_k(t)$ не затухают. Характерный период этих осцилляций по порядку величины равен α^{-1} — периоду колебаний частиц в потенциальной яме волны. Амплитуда осцилляций величины $t\Gamma_k(t)$ имеет порядок

$$\overline{t\Gamma_k(t)} = \frac{(2\pi)^{1/2} \omega_0^2}{\varepsilon_k' k \alpha^2} \sum_n (-1)^n \frac{\beta_{2n} \psi_{2n}(0)}{4n+1} \sim \frac{\gamma_k}{\alpha}. \quad (3.27)$$

Выше постоянно предполагалось, что амплитуда поля изменяется достаточно мало за время нелинейной эволюции волны. Из (3.26), (3.27) следует, что это имеет место при условии

$$\gamma_k / \alpha \ll 1. \quad (3.28)$$

При этом условии экспоненту в (3.26) можно разложить в ряд, и средняя

амплитуда волны равна

$$\overline{E_k^0(t)} \approx E_k^0(0) \left[1 + \frac{(2\pi)^{1/2} \omega_0^2}{\varepsilon_k' k \alpha} \sum_n \frac{(-1)^n \beta_{2n}}{4n+1} \Psi_{2n}(0) \right]. \quad (3.29)$$

В заключение авторы выражают благодарность Р. З. Сагдееву за стимулирующие дискуссии, а также А. А. Веденову, Б. Б. Кадомцеву и Л. П. Питаевскому за полезное обсуждение результатов.

Новосибирский государственный
университет

Поступила в редакцию
9 января 1965 г.

Литература

- [1] А. А. Веденов. Вопросы теории плазмы, **3**, 203, 1963.
- [2] Б. Б. Кадомцев. Вопросы теории плазмы, **4**, 188, 1964.
- [3] E. Frieman, P. Rutherford. Ann. of Phys., **28**, 134, 1964.
- [4] W. Drummond, D. Pines. Ann. of Phys., **28**, 478, 1964.
- [5] А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. ДАН СССР, **157**, 1088, 1964.
- [6] Л. М. Горбунов, В. П. Силин. ЖЭТФ, **47**, 200, 1964. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин. ЖЭТФ, **47**, 1435, 1964.
- [7] Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман. ЖЭТФ, **47**, 1553, 1964.
- [8] Ю. Л. Климонтович. ДАН СССР, **157**, 563, 1964.
- [9] Л. М. Коврижных, В. Н. Цытович. ЖЭТФ, **46**, 2212; **47**, 1454, 1964.
- [10] Р. Мазитов. ПМТФ, **1**, 27, 1965.
- [11] L. Van Hove. Physica, **21**, 517, 1955; **23**, 441, 1957.
- [12] I. Prigogine. Non. Equilibrium Statistical Mechanics, Interscience, 1962.
- [13] R. Balescu. Statistical Mechanics of Charged Particles Interscience, 1963.
- [14] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, **1**, 82, 1961.
- [15] W. Drummond, D. Pines. Nucl. Fus., Suppl. **3**, 1049, 1962.
- [16] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, **16**, 574, 1946.
- [17] D. Montgomery. Phys. Fluids, **6**, 1109, 1963.
- [18] В. И. Карпман. Материалы симпозиума по проблеме многих тел, Новосибирск, 1965.
- [19] Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман. К теории нелинейных колебаний в плазме, Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1965.
- [20] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

THEORY OF NONLINEAR OSCILLATIONS IN A NON-COLLISIONAL PLASMA

L. M. Altshul', V. I. Karpman

A general perturbation theory for nonlinear oscillations in a non-collisional plasma is developed which is not restricted by any assumptions regarding randomness of the phases. Summation of the secular terms of perturbation theory yields equations for «slow» processes. In the case of sufficiently broad wave packets the equations go over to the familiar equations of the quasilinear theory for a weakly turbulent plasma. The converse limiting case, the evolution of a periodic wave in the quasilinear approximation is investigated in detail.