

ИЗЛУЧЕНИЕ ДВУХ ФОТОНОВ ПРИ ЭЛЕКТРОННЫХ
СТОЛКНОВЕНИЯХ

В. Н. Байер, В. М. Галицкий

В системе центра инерции вычислено сечение двойного тормозного излучения при столкновении электронов больших энергий, проинтегрированное по всем конечным состояниям, кроме частот фотонов, в предположении, что один из излученных фотонов является мягким, а второй обладает произвольной энергией.

1. Для опытов на встречных пучках значительный интерес представляет процесс двойного тормозного излучения, т. е. процесс, в котором столкновение электронов или электрона и позитрона сопровождается излучением двух фотонов. Этот процесс может быть использован в качестве монитора для регистрации столкновения пучков. По-видимому, наиболее простой является такая схема опыта, в которой регистрируются кванты, разлетающиеся в противоположные стороны. При такой постановке эксперимента процесс двойного тормозного излучения конкурирует с процессом двухквантовой аннигиляции (в случае электрон-позитронных столкновений). В случае больших энергий электронов и при достаточно широком интервале частот регистрируемых фотонов сечение этого процесса может превышать сечение двухквантовой аннигиляции. Это связано с тем, что сечение двойного тормозного излучения, в отличие от сечения двухквантовой аннигиляции, не падает с ростом энергии сталкивающихся частиц.

Использование двойного тормозного излучения в качестве монитора требует знания теоретических формул для сечения этого процесса с достаточной степенью точности. Учитывая, что излучение фотонов происходит в основном в угол порядка $1/\gamma$, что при больших энергиях значительно меньше угловых размеров счетчиков, ясно, что интерес представляет сечение, проинтегрированное по углам вылета фотонов. Поскольку электроны в конечном состоянии не регистрируются, необходимо также выполнить интегрирование по их конечным состояниям. Полученная таким образом величина будет представлять собой дифференциальное по частотам обоих квантов сечение двойного тормозного излучения — $d\sigma_{\omega_1, \omega_2}$, где ω_1 есть частота фотона, излученного в направлении 1, а ω_2 — частота кванта, излученного в направлении 2, противоположном направлению 1.

Расчет этого сечения для случая излучения классических квантов ($\omega_1, \omega_2 \ll \varepsilon$) проведен в предыдущей работе [1]. В настоящей работе вычислено сечение двойного тормозного излучения в системе центра инерции сталкивающихся частиц в предположении, что только один из излучаемых фотонов является мягким, а второй обладает произвольной энергией. Предполагается, что энергия электронов велика, так что может быть проведено разложение по обратным степеням γ . В работе вычислен старший член этого разложения и дана оценка поправочных членов. Получены также формулы, полезные для расчета сечений различных процессов с участием фотонов. В качестве примера в работе с логарифмической точностью найдено сечение однократного тормозного излучения при электрон-электронном и электрон-позитронном столкновениях.

2. Указанная выше постановка вопроса, естественно, определяет выбор диаграмм. Действительно, так как существенны малые углы рассеяния, а каждый электрон излучает в узкий конус с углом порядка $1/\gamma$, наибольший вклад в сечение дают диаграммы, отвечающие излучению квантов разными частицами. Из общего числа 40 диаграмм только 16 принадлежат указанному классу. Из них 8 диаграмм отвечают процессу рассеяния,

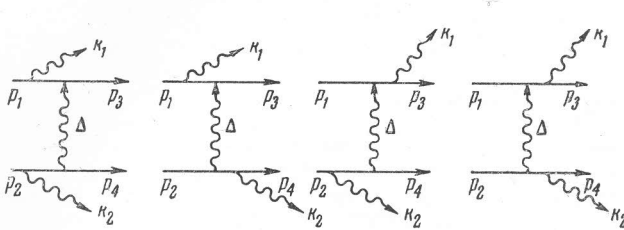


Рис. 1

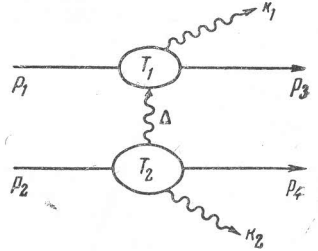


Рис. 2

а 8 диаграмм аннигиляционного типа — в случае рассеяния электрона на позитроне и обменного типа — в случае рассеяния электрона на электроне. При излучении не слишком жестких фотонов передаваемый импульс на аннигиляционных диаграммах имеет порядок квадрата начальной энергии, поэтому вклад этих диаграмм мал. Диаграммы обменного типа дают такой же вклад, как и диаграммы прямого рассеяния. Интерференционные члены между обменными и необменными диаграммами малы. В силу тождественности электронов суммарный вклад прямых и обменных диаграмм следует разделить на 2. Это означает, что можно рассматривать только диаграммы, соответствующие необменному рассеянию, и не учитывать тождественности электронов. Поэтому полученные результаты будут одинаково справедливы для случая электрон-электронного и электрон-позитронного рассеяний.

Из оставшихся 8 диаграмм мы можем рассматривать только 4, изображенные на рис. 1. Действительно, 4 других диаграммы получаются из диаграмм рис. 1 перестановкой фотонов. Вклады диаграмм первого и второго типов равны, а в силу тождественности фотонов их сумму следует разделить на 2. Так как конусы, в которые излучаются фотоны, практически не перекрываются, то интерференционный член между диаграммами первого и второго типов мал. Роль отброшенных диаграмм в качестве поправочных членов будет обсуждена дальше.

Таким образом, в дальнейшем будут рассматриваться четыре диаграммы, совокупность которых нам будет удобно изобразить в виде рис. 2. Матричный элемент, соответствующий этим четырем диаграммам, имеет вид

$$M = \frac{ie^4}{(2\pi)^5} (2\omega_1 2\omega_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)^{-1/2} \frac{1}{\Delta^2} (\bar{u}(p_3) T_{1\mu} u(p_1) (\bar{u}(p_4) T_2^\mu u(p_2)), \quad (1)$$

$$T_{1\mu} = \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_1) - 1}{2\kappa_1} \hat{e}_1 - \hat{e}_1 \frac{i(\hat{p}_3 + \hat{k}_1) - 1}{2\kappa_3} \gamma_\mu, \quad (2)$$

$$T_{2\mu} = \gamma_\mu \frac{i(\hat{p}_2 - \hat{k}_2) - 1}{2\kappa_2} \hat{e}_2 - \hat{e}_2 \frac{i(\hat{p}_4 + \hat{k}_2) - 1}{2\kappa_4} \gamma_\mu,$$

$$\kappa_1 = -(k_1 p_1), \quad \kappa_2 = -(k_2 p_2), \quad \kappa_3 = -(k_1 p_3), \quad \kappa_4 = -(k_2 p_4), \quad (3)$$

$$\Delta = p_3 + k_1 - p_1 = p_2 - k_2 - p_4.$$

Здесь и в дальнейшем используется метрика $(ab) = ab - a_0b_0$ и система единиц $\hbar = c = m = 1$.

Усредняя по спинам начальных электронов и суммируя по спинам конечных электронов и поляризациям фотонов, получаем

$$d\sigma = \frac{e^8}{4(2\pi)^8 [(p_1 p_2)^2 - 1]^{1/2}} \int \frac{N_{1\mu\nu} N_{2}^{\mu\nu}}{\Delta^4} \delta(p_3 + p_4 + k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \times \\ \times \frac{d^3 p_3}{\varepsilon_3} \frac{d^3 p_4}{\varepsilon_4} \frac{d^3 k_1}{\omega_1} \frac{d^3 k_2}{\omega_2} \quad (4)$$

Здесь

$$N_{1\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\kappa_3^2} Q_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa_1^2} R_{\mu\nu} - \frac{1}{\kappa_1 \kappa_3} S_{\mu\nu} \right], \quad (5)$$

$$Q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} [1 + \kappa_3 - \kappa_1 + (p_1 p_3) + \kappa_1 \kappa_3] - (p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{1\nu} p_{3\mu}) + \\ + (\kappa_3 - 1) (k_{1\mu} p_{1\nu} + k_{1\nu} p_{1\mu}), \quad (6)$$

$$R_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu} (k_1 \leftrightarrow -k_1, p_1 \leftrightarrow p_3), \quad (7)$$

$$S_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu} (p_1 p_3) [\kappa_1 - \kappa_3 - (p_1 p_3) - 1] + 2\kappa_3 p_{1\mu} p_{1\nu} - \\ - 2\kappa_1 p_{3\mu} p_{3\nu} + 2k_{1\mu} k_{1\nu} + (p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{1\nu} p_{3\mu}) [2(p_1 p_3) + \kappa_3 - \kappa_1] + \\ + (p_{1\mu} k_{1\nu} + p_{1\nu} k_{1\mu}) (p_1 p_3) - (p_{3\mu} k_{1\nu} + p_{3\nu} k_{1\mu}) (p_1 p_3), \quad (8)$$

а величина $N_{2\mu\nu}$ получается из $N_{1\mu\nu}$ заменой

$$p_1 \rightarrow p_2, \quad p_3 \rightarrow p_4, \quad k_1 \rightarrow k_2, \quad \kappa_1 \rightarrow \kappa_2, \quad \kappa_3 \rightarrow \kappa_4.$$

Как уже отмечалось, нас будет интересовать сечение двойного тормозного излучения, проинтегрированное по конечным электронным состояниям и углам вылета квантов. При этом интегрирование непосредственно выражения (4) является неудобным, так как законы сохранения (3) связывают переменные, от которых зависят величины $N_{1\mu\nu}$, $N_{2\mu\nu}$. Поэтому целесообразно разделить интегрирование по конечным состояниям каждого электрона и излученного им фотона, введя дополнительную δ -функцию. Тогда сечение (4) представится в виде

$$d\sigma_{\omega_1 \omega_2} = \frac{4\alpha^4}{(2\pi)^4 [(p_1 p_2)^2 - 1]^{1/2}} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \int \frac{d^4 \Delta}{\Delta^4} K_{1\mu\nu} K_2^{\mu\nu}. \quad (9)$$

Здесь

$$K_{1\mu\nu} = \int N_{1\mu\nu} \delta(\Delta + p_1 - p_3 - k_1) \frac{d^3 p_3}{\varepsilon_3} \omega_1^2 d\Omega_1, \quad (10)$$

$$K_{2\mu\nu} = \int N_{2\mu\nu} \delta(\Delta + p_4 - p_2 + k_2) \frac{d^3 p_4}{\varepsilon_4} \omega_2^2 d\Omega_2.$$

Хотя элемент объема $\omega^2 d\Omega$ является инвариантом, интегрирование по углам вылета фотона не ковариантно, вследствие неинвариантности объема интегрирования. Поэтому величины $K_{\mu\nu}$ зависят от системы отсчета, в которой фиксирована энергия кванта ω . Для того чтобы записать их в ковариантном виде, введем 4-вектор n_μ , определенный так, что в интересующей нас системе отсчета его компоненты равны $n_\mu = (0, 0, 0, 1)$. Тогда тензор $K_{1\mu\nu}$ может быть выражен через три вектора: $p_{1\mu}$, Δ_μ , n_μ . Наиболее общий вид такого тензора

$$K_{1\mu\nu} = c_1 g_{\mu\nu} + c_2 p_{1\mu} p_{1\nu} + c_3 \Delta_\mu \Delta_\nu + c_4 (p_{1\mu} \Delta_\nu + p_{1\nu} \Delta_\mu) + \\ + c_5 n_\mu n_\nu + c_6 (n_\mu \Delta_\nu + n_\nu \Delta_\mu) + c_7 (n_\mu p_{1\nu} + n_\nu p_{1\mu}). \quad (11)$$

Аналогично записывается и тензор $K_2^{\mu\nu}$.

Эти тензоры являются калибровочно инвариантными, так что должно быть

$$K_{1\mu\nu}\Delta^\mu = K_{1\mu\nu}\Delta^\nu = 0, \quad (12)$$

поэтому только четыре из функций c_i являются независимыми. Для того, чтобы найти эти четыре функции, необходимо вычислить четыре ковариантных интеграла, которые мы определим следующим образом:

$$J_1 = g^{\mu\nu}K_{1\mu\nu}, \quad J_2 = p_1^\mu p_1^\nu K_{1\mu\nu}, \quad J_3 = n^\mu n^\nu K_{1\mu\nu}, \\ J_4 = (n^\mu p_1^\nu + n^\nu p_1^\mu)K_{1\mu\nu}. \quad (13)$$

Величина $K_{1\mu\nu}$ пропорциональна проинтегрированному по всем конечным состояниям, кроме частоты, сечению рассеяния произвольно поляризованного фотона на электроне, причем квадрат массы начального фотона есть $-\Delta^2$. Такая величина может быть использована для расчета сечений ряда процессов: комптон-эффект поляризованного фотона в произвольной системе отсчета, тормозное излучение при рассеянии электрона на заряженной частице и т. д.

3. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда один из фотонов является мягким, т. е. его энергия много меньше энергии начального электрона. Без ограничения общности можно считать, что мягким является фотон с импульсом k_2 , т. е.

$$\omega_2 \ll \varepsilon. \quad (14)$$

Как известно, в этом случае можно пренебречь отдачей электрона при излучении фотона 2, так что кинематика процесса становится такой же, как для однократного тормозного излучения. Запишем некоторые полезные для дальнейшего кинематические равенства:

$$(\Delta p_2) = \Delta^2/2, \quad \kappa_3 = -(\Delta p_1) - \Delta^2/2. \quad (15)$$

Вероятность излучения классического фотона входит в сечение процесса мультипликативно, так что при выполнении условия (14) тензор $N_2^{\mu\nu}$ приобретает вид

$$\frac{\alpha}{2\pi^2} N_2^{\mu\nu} \frac{d^3k_2}{2\omega_2} = \Gamma^{\mu\nu} dW(k_2). \quad (16)$$

Здесь $dW(k_2)$ есть вероятность излучения классического фотона, равная

$$dW(k_2) = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \frac{d\omega_2}{2\omega_2} \left[\frac{p_2}{(p_2 k_2)} - \frac{p_4}{(p_4 k_2)} \right]^2 \omega_2^2 d\Omega_2, \quad (17)$$

а $\Gamma^{\mu\nu}$ — обычный тензор тока при рассеянии электрона:

$$\Gamma^{\mu\nu} = 1/2 \{ g^{\mu\nu} [1 + (p_2 p_4)] - (p^{2\mu} p^{4\nu} + p^{2\nu} p^{4\mu}) \}. \quad (18)$$

Подставляя $N_2^{\mu\nu}$ в (10) и выполняя интегрирование, получаем следующее выражение для $K_2^{\mu\nu}$:

$$K_2^{\mu\nu} = - \left[g^{\mu\nu} \frac{\Delta^2}{2} + 2p_2^\mu p_2^\nu - p_2^\mu \Delta^\nu - p_2^\nu \Delta^\mu \right] 4\pi \Phi \left(\frac{\Delta^2}{4} \right) \frac{\delta(\Delta_0 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_4}, \quad (19)$$

где $\Phi(x^2)$ — функция, часто встречающаяся в теории излучения классических фотонов [1]:

$$\Phi(x^2) = \frac{1 + 2x^2}{x(1 + x^2)^{1/2}} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - 1. \quad (20)$$

Для дальнейшего необходимо фиксировать систему координат. В соответствии с постановкой вопроса нас интересует сечение двойного тормоз-

ного излучения в системе центра инерции сталкивающихся частиц. При этом вектор n_μ определяется равенством

$$n_\mu = (p_{1\mu} + p_{2\mu}) / 2\varepsilon, \quad (21)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ — энергия начальных частиц. Выражая с помощью (21) вектор $p_{2\mu}$ через векторы $p_{1\mu}$ и n_μ и подставляя в (19), получим

$$K_2^{\mu\nu} = - \left[g^{\mu\nu} \frac{\Delta^2}{2} + 2p_1^\mu p_1^\nu + 8\varepsilon^2 n^\mu n^\nu - \right. \\ \left. - 4\varepsilon (n^\mu p_1^\nu + n^\nu p_1^\mu) - (p_2^\mu \Delta^\nu + p_2^\nu \Delta^\mu) \right] 4\pi \Phi \left(\frac{\Delta^2}{4} \right) \frac{\delta(\Delta_0 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_4}. \quad (22)$$

Сворачивая этот тензор с тензором $K_{1\mu\nu}$, находим следующее выражение для сечения:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{4\alpha^4}{(2\pi)^3 p\varepsilon} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \int \frac{d^4\Delta}{\Delta^4} \left[-\frac{\Delta^2}{2} J_1 - 2J_2 - 8\varepsilon^2 J_3 + 4\varepsilon J_4 \right] \times \\ \times \frac{\delta(\Delta_0 + \varepsilon_4 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_4} \Phi \left(\frac{\Delta^2}{4} \right), \quad (23)$$

где J_m — величины, определяемые формулами (13).

Ввиду азимутальной симметрии задачи, величины J_m есть функции Δ^2 , Δ_z , Δ_0 , где ось z направлена по скорости начального электрона p_1 . Мы можем в общем виде выполнить интегрирование по азимутальному углу φ и z -составляющей вектора Δ_μ . В результате имеем

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{\alpha^4}{(2\pi)^2 p^2 \varepsilon^2} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \times \\ \times \int \frac{d\kappa d\Delta^2}{\Delta^4} \left[-\frac{\Delta^2}{2} J_1 - 2J_2 - 8\varepsilon^2 J_3 + 4\varepsilon J_4 \right] \Phi \left(\frac{\Delta^2}{4} \right). \quad (24)$$

Здесь $\kappa = 2\varepsilon\Delta_0$. Нетрудно видеть, что $\kappa = \kappa_3$; действительно,

$$\kappa_3 = -(k_1 p_3) = -(\Delta p_1) - (\Delta p_2) = 2\varepsilon\Delta_0. \quad (25)$$

Определим область интегрирования по переменным κ , Δ^2 . Из первого из соотношений (15) непосредственно следует

$$\Delta^2 + \kappa \leq 2p|\Delta|, \quad p = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|, \quad (26)$$

откуда, возводя в квадрат, находим

$$\Delta^4 + 2(\kappa - 2p^2)\Delta^2 + \kappa^2/\varepsilon^2 \leq 0. \quad (27)$$

Аналогично из второго соотношения (15) получаем

$$\kappa^2 - 2\kappa\omega_1\varepsilon_3 + \omega_1^2 \geq 0. \quad (28)$$

Это означает, что переменная κ изменяется в интервале

$$\kappa_{\text{н}} \leq \kappa \leq \kappa_{\text{в}}, \quad (29)$$

где

$$\kappa_{\text{н}} = \varepsilon^2 \xi \left[1 - (1 - 1/\varepsilon^2(1 - \xi))^{1/2} \right], \\ \kappa_{\text{в}} = \varepsilon^2 \xi \left[1 + (1 - 1/\varepsilon^2(1 - \xi))^{1/2} \right]. \quad (30)$$

Здесь введено часто используемое ниже обозначение $\xi = \omega_1/\varepsilon$.

Область интегрирования изображена на рис. 3. Она ограничена гиперболой (27) и прямыми $\kappa = \kappa_{\text{н}}$ и $\kappa = \kappa_{\text{в}}$. Зависимость пределов $\kappa_{\text{н}}$, $\kappa_{\text{в}}$ от величины ξ приведена на рис. 4. Величина $\xi_{\text{max}} = 1 - 1/\varepsilon^2$ определяет

максимальную энергию кванта k_1 , при этом конечные частицы летят с равными энергиями в одном и том же направлении — противоположном направлению вылета фотона. При значении $\xi = \xi_0 = 2(\epsilon - 1) / (2\epsilon - 1)$ происходит максимальная передача энергии $\Delta_0 (\kappa_B = \kappa_{max} = 2\epsilon(\epsilon - 1))$, так что электрон, излучивший жесткий квант, в конечном состоянии покоится.

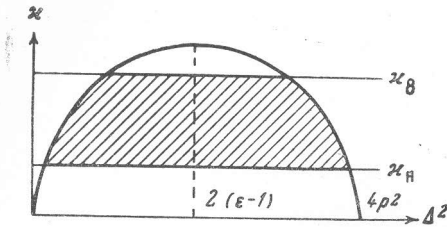


Рис. 3

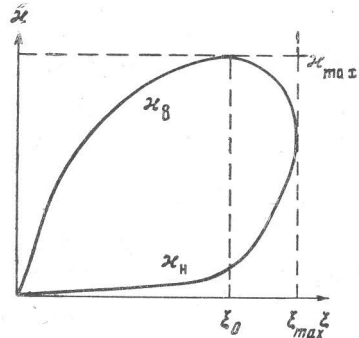


Рис. 4

4. Перейдем к вычислению интегралов J_m (формула (13)). Используя определение тензора $K_{1\mu\nu}$ (10) и находя соответствующие свертки с тензором $N_{1\mu\nu}$, легко видеть, что они зависят только от величин $\kappa_1, \kappa_3, \Delta^2, \omega_1$ и ϵ . Из них при вычислении интегралов по конечным состояниям (10) переменной является только величина κ_1 , входящая степенным образом. Поэтому интегрирование сводится к отысканию следующих четырех интегралов:

$$I_n = \int \kappa_1^n \delta(p_1 + \Delta - p_3 - k_1) \frac{d^3 p_3}{\epsilon_3} \omega_1^2 d\Omega_1, \quad n = 1, 0, -1, -2. \quad (31)$$

Вычисление этих интегралов проще всего провести в системе центра инерции электрона p_3 и фотона k_1 . Указанная система определяется 4-вектором $Q_\mu = p_{1\mu} + \Delta_\mu$, причем все величины, необходимые для преобразования к этой системе, легко выражаются через этот вектор. В результате получаем для I_n следующие выражения:

$$I_1 = 2\pi\xi P Q^{-3/2}, \quad I_0 = 2\pi\xi Q^{-1/2},$$

$$I_{-1} = 2\pi\xi R^{-1/2}, \quad I_{-2} = 2\pi\xi P R^{-3/2}; \quad (32)$$

$$Q = (1 - \kappa/2\epsilon^2)^2 - 1/\epsilon^2, \quad P = f + g\kappa + h\kappa^2, \quad (33)$$

$$R = a + b\kappa + c\kappa^2, \quad (34)$$

$$f = \frac{1}{2} \Delta^2 \xi, \quad g = 1 - \xi - \frac{1}{\epsilon^2} \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \left(1 + \frac{\Delta^2}{2}\right), \quad h = -\frac{1}{2\epsilon^2} (1 - \xi),$$

$$a = \xi^2 \Delta^2 (1 + \Delta^2/4), \quad b = -\Delta^2 \xi (1 - \xi), \quad c = (1 - \xi) (1 - \xi - 1/\epsilon^2).$$

Приведем явно выражения для J_m через интегралы I_n :

$$J_1 = -\frac{1}{\kappa} I_1 - \frac{I_0}{\kappa^2} \left[1 + 2\kappa - \Delta^2 \left(\frac{1}{\epsilon} + \kappa \right) \right] + \frac{I_{-1}}{\kappa} \left[2 + 2\kappa - \kappa^2 - \Delta^2 \left(\kappa + \frac{\Delta^2}{2} \right) \right] - \left(1 - \frac{\Delta^2}{2} \right) I_{-2}; \quad (35)$$

$$J_2 = I_1 \left(1 + \frac{1}{2\kappa} \right) + \frac{I_0}{\kappa^2} \left[1 + 3\kappa + \kappa^2 - \kappa^3 + \frac{\Delta^2}{4} (1 + 2\kappa - 2\kappa^2) \right] - \\ - \frac{I_{-1}}{2\kappa} \left[4 + 8\kappa + 3\kappa^2 + 3\Delta^2(1 + \kappa) + \frac{\Delta^4}{2} \right] + I_{-2} \left(1 + \kappa + \frac{\Delta^2}{4} \right); \quad (36)$$

$$J_3 = \frac{1}{2\kappa} I_1 + \frac{I_0}{2\kappa^2} \left\{ 2\varepsilon^2 + \kappa \left[1 - \kappa(1 - \xi) - \frac{\kappa^2}{2\varepsilon^2} - \Delta^2 \left(\frac{1}{2} + \kappa \right) \right] - \right. \\ - \frac{I_{-1}}{2\kappa} \left\{ 4\varepsilon^2(1 - \xi) + \kappa(2 - \xi) + \Delta^2 \left[\varepsilon^2 + \varepsilon^2(1 - \xi) - 1 - \frac{\kappa\xi}{2} - \frac{\Delta^2}{2} \right] \right\} + \\ \left. + I_{-2} \left[\varepsilon^2(1 - \xi)^2 + \frac{\kappa}{2} (1 - \xi) - \frac{\Delta^2}{4} \right] \right\}; \quad (37)$$

$$J_4 = \varepsilon \left\{ \frac{I_1}{\kappa} \left(1 + \frac{\kappa}{2\varepsilon^2} \right) + \frac{I_0}{\kappa^2} \left[2 + 3\kappa - \kappa^2(1 - \xi) + \frac{\kappa}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} - \kappa^2 \right) - \right. \right. \\ - \frac{\Delta^2\kappa}{2} \left(1 + \xi + \frac{\kappa}{2\varepsilon^2} \right) \left. \right] - \frac{I_{-1}}{\kappa} \left[2(2 - \xi) + \kappa(4 - 3\xi) + \frac{\kappa}{\varepsilon^2} (1 + \kappa) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta^2}{2} \left(4 + \kappa - 3\xi - \kappa\xi + \frac{\kappa}{\varepsilon^2} \right) - \frac{\xi\Delta^4}{4} \right] + \\ \left. + I_{-2} \left[(1 - \xi)(2 + \kappa) + \frac{\kappa}{2\varepsilon^2} - \xi \frac{\Delta^2}{2} \right] \right\}. \quad (38)$$

5. Написанные выражения являются точными. В дальнейших вычислениях мы будем использовать ультрарелятивизм сталкивающихся частиц, т. е. малость параметра ε^{-2} . Это приближение является последовательным, так как отброшенные диаграммы дают вклад именно такого порядка (см. пункт 2). В дальнейшем анализе мы будем также считать, что величины ξ и $1 - \xi$ не являются малыми по параметру ε^{-1} . Тогда нетрудно видеть, что наибольший вклад в сечение дает величина J_3 . Действительно, она содержит члены порядка ε^2 (37) и входит в выражение (24) с множителем ε^2 . Как мы увидим дальше, интегрирование по переменным Δ^2 и κ не вносит дополнительных степеней ε , поэтому сечение двойного тормозного излучения определяется именно этими членами. Это означает, что наиболее существенны в тензорах $N_{1\mu\nu}$ и $N_2^{\mu\nu}$ слагаемые, содержащие максимальное число векторов n_μ , т. е. «наименее ковариантные» члены. В самом деле, свертки тензора $N_{1\mu\nu}$ с $g^{\mu\nu}$ и вектором $p_{1\mu}$ дают величины порядка единицы, в то время как свертки $N_{1\mu\nu}$ с вектором n_μ могут дать члены вида (np_1) и (nk_1) , порядок которых $-\varepsilon$.

Величины J_3 и J_1 имеют прозрачный физический смысл. Величина J_3 является 00-компонентой тензора $K_{1\mu\nu}$, т. е. компонентой, входящей в сечение тормозного излучения электрона на кулоновском центре. Величина J_1 входит в сечение рассеяния неполяризованного фотона с массой $-\Delta^2$ на электроны. Нетрудно проверить, что между этими величинами существует простая связь:

$$J_3(\Delta^2) = \Delta^2 \frac{\varepsilon^2}{2\kappa^2} J_1(\Delta^2 = 0) + O(\Delta^4, \varepsilon^{-2}), \quad (39)$$

причем $J_1(\Delta^2 = 0)$ определяет сечение комптон-эффекта для реального фотона. Соотношение (39) составляет основу метода Вейцекера — Вильямса, который фактически используется для вычисления проинтегрированного по углам сечения однократного тормозного излучения. Как выяснится в дальнейшем, для расчета сечения двойного тормозного излучения метод Вейцекера — Вильямса неприменим.

6. Полученные выражения позволяют сравнительно просто получить дифференциальное сечение $d\sigma_\omega$ однократного тормозного излучения. Для этого достаточно в правой части формулы (16) опустить множитель $dW(k_2)$. Тогда выражение для сечения $d\sigma_\omega$ принимает вид

$$d\sigma_\omega = \frac{\alpha^3}{8\pi\rho^2\varepsilon^2} \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{d\kappa d\Delta^2}{\Delta^4} \left[-\frac{\Delta^2}{2} J_1 - 2J_2 - 8\varepsilon^2 J_3 + 4\varepsilon J_4 \right]. \quad (40)$$

Здесь мы вычислим сечение $d\sigma_\omega$ с логарифмической точностью. Нижний предел интегрирования по Δ^2 имеет порядок ε^{-4} , и в интеграле в формуле (40) существенны малые Δ^2 . Следовательно, выражения для J_m можно разложить по степеням Δ^2 и ограничиться нулевым и первым членами разложения. Величина в квадратных скобках в интеграле (40) содержит члены порядка ε^4 , ε^2 , 1 и т. д. При $\Delta^2 = 0$ члены порядка ε^4 и ε^2 взаимно уничтожаются. Интегрирование оставшихся членов дает вклад

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \approx \frac{1}{\varepsilon^4 \Delta_{min}^2} \sim 1, \quad (41)$$

т. е. величину, не содержащую большого логарифма. Такой логарифм возникает при интегрировании первого члена разложения по Δ^2 . При этом в интеграле (40) достаточно ограничиться членами порядка ε^4 .

Нетрудно видеть, что такие члены возникают только при разложении J_3 . Используя формулу (39), получаем

$$d\sigma_\omega = \alpha^3 \frac{d\omega}{\omega} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^2} \frac{d\kappa}{\kappa^2} \xi \left[1 - \xi + \frac{1}{1 - \xi} - \frac{2\xi}{\kappa(1 - \xi)} + \frac{\xi^2}{\kappa^2(1 - \xi)^2} \right]. \quad (42)$$

Нижние пределы интегрирования по Δ^2 и κ определяются соотношениями (27), (29) и приближенно равны

$$\Delta_{min}^2 = \kappa^2 / 4\varepsilon^4, \quad \kappa_H = \xi / 2(1 - \xi). \quad (43)$$

Здесь отброшены члены более высокого порядка по ε^{-2} . Верхний предел интегрирования по Δ^2 определяется условием применимости разложения, что дает $\Delta_{max}^2 \sim 1$. Поскольку интегралы по κ сходятся, верхний предел интегрирования по κ вообще несуществен. По этой же причине при интегрировании с логарифмической точностью в выражении для Δ_{min}^2 величину κ можно заменить на κ_H .

Выполняя интегрирование, получаем главный (логарифмический) вклад в сечение однократного тормозного излучения:

$$d\sigma_\omega = 4r_0^2 \alpha \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon - \omega}{\omega} \left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} + \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \right] \ln \frac{4\varepsilon^2(\varepsilon - \omega)}{\omega}. \quad (44)$$

Следует иметь в виду, что полученное выражение дает сечение излучения одной из частиц. Именно это сечение измеряется, если в опытах на встречных пучках изучать однократное тормозное излучение в одну сторону. Ввиду указанной выше малости интерференционных членов, полное сечение однократного тормозного излучения равняется удвоенному выражению (44). Этот результат совпадает с логарифмической частью сечения однократного тормозного излучения, полученного в работе Альтарелли и Бучелли [2].

Заметим, что сечение (44) по форме совпадает с вычисленным с помощью метода Вейцекера — Вильямса сечением однократного тормозного излучения на покоящемся электроны, за исключением аргумента логарифма, который получается путем элементарного релятивистского пересчета.

Для получения нелогарифмических членов проведенное выше разложение не годится и интегрирование по Δ^2 должно быть проведено точно. При этом, как видно из оценки (41), необходимо учитывать часть опущенных здесь членов, что делает расчет более громоздким.

7. Перейдем к вычислению дифференциального сечения $d\sigma_{\omega_1, \omega_2}$ двойного тормозного излучения (24). По сравнению со случаем однократного тормозного излучения подынтегральная функция содержит дополнительный множитель $\Phi(\Delta^2/4)$. Эта функция ведет себя при малых и больших значениях аргумента следующим образом:

$$\Phi(x^2) \approx \frac{4}{3}x^2, \quad x^2 \ll 1, \quad (45)$$

$$\Phi(x^2) \approx \ln x^2, \quad x^2 \gg 1.$$

Это означает, что в интеграле (24) не существенны малые Δ^2 . Действительно, при $\Delta^2 \rightarrow 0$ квадратная скобка в этом интеграле обращается в независящую от Δ^2 величину порядка единицы (см. предыдущий пункт), поэтому интеграл по области малых Δ^2 есть

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \Delta^2 \approx \frac{1}{\varepsilon^4} \ln \frac{1}{\Delta_{min}^2} \quad (46)$$

и, следовательно, дает пренебрежимо малый вклад (ср. (41)).

Учет следующего члена разложения по Δ^2 приводит к интегралу типа

$$\int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} \Delta^2 \Phi\left(\frac{\Delta^2}{2}\right). \quad (47)$$

Этот интеграл сходится при малых Δ^2 , а при больших Δ^2 ведет себя как $\ln^2 \Delta$. Таким образом, в отличие от случая однократного тормозного излучения, нижний предел интегрирования по Δ^2 здесь несуществен и при вычислении интеграла (24) нельзя пользоваться разложением по Δ^2 . Эта ситуация возникает всегда при излучении двух фотонов. Значит, метод Вейцекера — Вильямса неприменим к таким задачам.

Согласно сказанному выше, интегрирование по Δ^2 должно быть проведено точно. Выделяя в формулах (24) и (37) старшие по ε^2 члены, получаем

$$d\sigma_{\omega_1, \omega_2} = \frac{4\alpha^4}{(2\pi)^2} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \times \\ \times \int \frac{d\kappa d\Delta^2}{\Delta^4} \left[-\frac{2I_0}{\kappa^2} + \frac{4(1-\xi) + \Delta^2[1 + (1-\xi)^2]}{\kappa} I_{-1} - 2(1-\xi)^2 I_{-2} \right], \quad (48)$$

причем в этом приближении

$$I_0 = 2\pi\xi; \quad (49)$$

$$I_{-1} = 2\pi\xi[\kappa^2(1-\xi)^2 - \kappa\Delta^2\xi(1-\xi) + \xi^2\Delta^2(1 + \Delta^2/4)]^{-1/2}, \quad (50)$$

$$I_{-2} = 2\pi\xi[\xi\Delta^2/2 + (1-\xi)\kappa][\kappa^2(1-\xi)^2 - \kappa\Delta^2\xi(1-\xi) + \xi^2\Delta^2(1 + \Delta^2/4)]^{-3/2}. \quad (51)$$

Проведем интегрирование по κ . Нижний предел в этом интегрировании определяется формулой (43). Верхний предел (см. рис. 3) по разному зависит от Δ^2 в разных областях. Однако, как показывает проведенный строгий анализ, верхний предел интегрирования по κ оказывается вообще не существенным, и интегрирование может быть распространено до бесконеч-

ности. В результате получаем

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{8r_0^2\alpha^2}{\pi} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \times \\ \times \int \frac{dx}{x^3} \Phi(x^2) \left[\Phi(x^2) \left(1 - \frac{\omega_1}{\varepsilon} \right) + \frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2} \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \quad (52)$$

При $\omega_1 \ll \varepsilon$ формула (52) принимает вид

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{8r_0^2\alpha^2}{\pi} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \int \frac{dx}{x^3} \Phi^2(x^2). \quad (53)$$

Это выражение совпадает с полученной ранее авторами [1] формулой для сечения тормозного излучения двух классических фотонов в приближении классических токов. Мы видим, что выражение в квадратных скобках в формуле (52) с точностью до коэффициента можно рассматривать как обобщение вероятности излучения фотона при столкновении с передачей импульса Δ^2 на случай излучения жестких фотонов.

В интервале (52) существенна область $x \sim 1$, поэтому верхний предел интегрирования по x можно устремить к бесконечности. Теперь видно, что интегрирование по x дает только число и тем самым не меняет порядка величины членов по ε^2 (см. пункт 5). Выполняя интегрирование, получаем следующее окончательное выражение для сечения двойного тормозного излучения:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{8r_0^2\alpha^2}{\pi} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \left[\left(1 - \frac{\omega_1}{\varepsilon} \right) \left(\frac{5}{4} + \frac{7}{8} \zeta(3) \right) + \frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{8} \zeta(3) \right) \right]. \quad (54)$$

Здесь $\zeta(m)$ — дзета-функция Римана, $7\zeta(3)/8 = 1,052$. При $\omega_1 \ll \varepsilon$ это выражение переходит в формулу (22) из [1], в которой численный коэффициент является неправильным и должен быть уменьшен в четыре раза.

8. Определим порядок величины отброшенных членов в формуле (54). Эти поправочные члены возникают от учета следующих по ε^{-2} членов в исходной формуле (24) и от вкладов отброшенных диаграмм. Наиболее простой является оценка отброшенных членов для случая мягких квантов ($\omega \ll \varepsilon$). В этом случае можно использовать приближение классических токов, и выражение для сечения принимает вид

$$d\sigma = \int \sigma_{e0} \frac{1}{2!} dW_e(k_1) dW_e(k_2) d\Omega, \quad (55)$$

где σ_{e0} — сечение рассеяния электронов, определяемое формулой Меллера. Формула (55) учитывает вклад всех диаграмм.

Пользуясь явным выражением для $dW_e(k)$ (см. [1]), легко показать, что максимальные поправочные члены даются областью больших Δ^2 ($\Delta^2 \sim \varepsilon^2$). При таких Δ^2 вклад различных диаграмм становится одного порядка. Вероятность излучения фотона при больших Δ^2 равна

$$\frac{4\alpha}{\pi} \ln \Delta \frac{d\omega}{\omega}. \quad (56)$$

Главный член в формуле Меллера $d\Delta^2/\Delta^4$ дал наш основной результат, наибольший из оставшихся членов $d\Delta^2/\varepsilon^2\Delta^2$ приводит к следующей поправке к сечению:

$$\delta\sigma \sim r_0^2\alpha^2 \int \frac{d\Delta^2}{\varepsilon^2\Delta^2} \ln^2 \Delta \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \sim r_0^2\alpha^2 \frac{\ln^3 \varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2}. \quad (57)$$

Другие члены дают выражения, отличающиеся от (57) меньшей степенью $\ln \varepsilon$. Что касается малых Δ^2 , то эта область дает поправку $\sim \varepsilon^{-2}$, что связано с тем, что вероятность излучения при рассеянии на малый угол не содержит логарифмов, а вероятность излучения в направлении, противоположном движению частиц, $\sim \varepsilon^{-2}$.

Поправка, аналогичная (57), возникает также и в случае излучения жестких фотонов. При энергии электронов 50 Мэв она составляет 2—3% и быстро падает с ростом энергии.

Проведенное выше рассмотрение не касалось самой жесткой части спектра, где $\varepsilon - \omega \sim 1$. Эта область требует специального рассмотрения. Поправки к формуле (54) для такого случая, по-видимому, отличаются от (57) множителем $\varepsilon / (\varepsilon - \omega)$, который велик для самой жесткой части спектра. Ввиду узости этой области, интегральный вклад, вносимый ею, видимо, мал. Более подробное рассмотрение этого вопроса будет проведено в дальнейшем.

Новосибирский государственный
университет

Поступила в редакцию
11 марта 1965 г.

Литература

- [1] V. N. Bayer, V. M. Galitsky. Phys. Lett., **13**, 355, 1964.
[2] G. Altarelli, F. Buccella. Nuovo Cim., **34**, 1337, 1964.

TWO-PHOTON EMISSION IN ELECTRON COLLISIONS

V. N. Bayer, V. M. Galitsky

The cross section for double bremsstrahlung radiation emitted as a result of collision of two high energy electrons, integrated over all finite states except the photon frequencies, is calculated in the center of inertia system under the assumption that one of the emitted photons is soft and the other possesses an arbitrary energy.