

УХОД ИОНОВ ИЗ ЛОВУШКИ С МАГНИТНЫМИ ПРОБКАМИ ВСЛЕДСТВИЕ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ, СВЯЗАННОЙ С «КОНУСОМ ПОТЕРЬ»

А. А. Галеев

Рассмотрена нелинейная стадия развития микронеустойчивости плазмы в ловушках с магнитными пробками, вызванной наличием «конуса потерь» в распределении ионов по скоростям. Развивающиеся в результате неустойчивости колебания приводят к быстрой диффузии ионов в пространстве скоростей в «конус потерь» и к последующему выходу их через магнитные пробки.

1. Желобковая неустойчивость плазмы в ловушках с магнитными пробками, как сейчас считается, может быть подавлена специальным выбором геометрии магнитного поля (так называемые «минимум В-конфигурации») [1]. В связи с этим более пристального внимания заслуживает другой тип неустойчивости плазмы в такого рода устройствах — неустойчивость, связанная с локальной неизотропией функции распределения ионов по скоростям. Было показано [2, 3], что если средняя поперечная энергия частиц существенно превышает их среднюю энергию продольного движения (вдоль магнитного поля H_0), $T_{\perp} > T_{\parallel}$, то в плазме должны самопроизвольно возбуждаться коротковолновые флуктуации электрического и магнитного полей. Неустойчивости такого рода усиливаются, если в распределении ионов по скоростям есть резкие максимумы [4], что обычно имеет место при инжекции ионных пучков.

Однако существовало убеждение, что в реальных условиях по отношению к этому классу неустойчивостей имеется некоторый запас устойчивости. Недавно Розенблют и Пост [3] обратили внимание на то, что в плотной плазме с плотностью $n \geq 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (численная оценка приведена для типичных значений магнитных полей $H_0 \approx 10^4$) наличие «конуса потерь» в распределении ионов по скоростям всегда приводит к развитию сильной неустойчивости. Поэтому представляет интерес исследовать влияние этой неустойчивости на удержание плазмы в ловушках.

Возникает задача отыскания спектра колебаний в неустойчивой плазме и вызванной ими диффузии ионов в «конус потерь», что приводит к выходу ионов из ловушки через магнитные пробки. Строгое математическое описание турбулентных процессов переноса возможно лишь в случае слабой неустойчивости, когда турбулентное состояние плазмы можно представить себе в виде набора слабовзаимодействующих колебаний. Представление турбулентности плазмы в виде набора колебаний разумно, если инкремент неустойчивости мал по сравнению с частотой ($\gamma \ll \omega$) и амплитуда колебания мало меняется за время одного колебания. При принятых Розенблютом и Постом [5] упрощающих предположениях неустойчивость развивается за времена порядка периода одного колебания, так как инкремент $\gamma \sim \omega$. Поэтому непосредственно метод рассмотрения, принятый в нашей работе, к случаю, рассмотренному в [3] неприменим. Однако, как мы увидим ниже, в ряде реальных ситуаций неустойчивость значительно ослабляется, и мы можем воспользоваться для ее строгого описания теорией возмущений.

2. Сваливание ионов в «конус потерь» может быть описано в терминах «квазилинейной диффузии» ионов в пространстве скоростей под действием колебаний. Поскольку величина коэффициента диффузии существенно зависит от уровня энергии колебаний и ее распределения по спектру, то мы сейчас перейдем непосредственно к задаче определения этих величин. Как и в [5], возмущения будем предполагать достаточно мелко-масштабными, так что плазму можно считать однородной и разложить потенциал электрического поля φ в сумму по полям отдельных гармонических колебаний ¹⁾:

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}, \omega} \varphi_{\mathbf{k}\omega} \exp(-i\omega t + ik_z z + i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}), \quad (1)$$

где k_z, \mathbf{k}_\perp — составляющие волнового вектора соответственно вдоль и поперек невозмущенного магнитного поля $\mathbf{H}_0 = \{0, 0, H_z\}$, ω — частота, $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$ — амплитуда колебания.

При рассмотрении взаимодействия колебаний между собой и частицами плазмы, определяющего распределение энергии по спектру, мы, как обычно, воспользуемся предположением о хаотичности фаз амплитуд $\varphi_{\mathbf{k}\omega}$, справедливым в случае слабой неустойчивости. В результате получаем уравнение для изменения энергии колебаний со временем [6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega)}{\partial \omega} \frac{k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{8\pi} = & - \frac{k^2}{4\pi} \operatorname{Im} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) - \right. \\ & - \sum_{\mathbf{k}', \omega'} \left[\frac{\varepsilon_{-\mathbf{k}', \mathbf{k}+\mathbf{k}'}^{(2)}(-\omega', \omega + \omega') \varepsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(2)}(\omega, \omega')}{\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}^{(1)}(\omega + \omega')} - \varepsilon_{-\mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{(3)}(-\omega', \omega, \omega') \right] \times \\ & \left. \times |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 \right\} |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{k^2}{4\pi} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{k}=\mathbf{k}''} \frac{|\varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}(\omega', \omega'')|^2}{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega' + \omega'')} |\varphi_{\mathbf{k}'}|^2 |\varphi_{\mathbf{k}''}|^2, \quad (2) \end{aligned}$$

где $\omega, \omega', \omega''$ — частоты собственных колебаний с волновыми векторами $\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''$ и амплитудами $\varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}'}, \varphi_{\mathbf{k}''}$; $\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}, \varepsilon_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(2)}, \varepsilon_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}''}^{(3)}$ — коэффициенты разложения диэлектрической проницаемости в ряд по степеням амплитуд $\varphi_{\mathbf{k}}$.

Коэффициенты $\varepsilon^{(n)}$ просто связаны с соответствующими коэффициентами разложения функции распределения частиц по амплитудам колебаний:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & f_{0j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \sum_{\mathbf{k}, \omega} \mu_{\mathbf{k}\omega}^{j(1)}(\mathbf{v}, t) \varphi_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{r}, t) + \\ & + \sum_{\omega' \mathbf{k}', \mathbf{k}'' \omega''} \mu_{\mathbf{k}' \omega', \mathbf{k}'' \omega''}^{j(2)}(\mathbf{v}, t) \varphi_{\mathbf{k}' \omega'}(\mathbf{r}, t) \varphi_{\mathbf{k}'' \omega''}(\mathbf{r}, t) + \dots \end{aligned}$$

В линейном приближении

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(1)}(\omega) \equiv 1 - \sum_j \frac{4\pi e_j}{k^2} \int \mu_{\mathbf{k}\omega}^{j(1)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (3)$$

Следующие коэффициенты $\varepsilon_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n)$ определяются как

$$\varepsilon_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n) \equiv - \sum_j \frac{4\pi e_j}{(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n)^2} \int \mu_{\mathbf{k}_1 \omega_1, \dots, \mathbf{k}_n \omega_n}^{j(n)}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (4)$$

¹⁾ Объем системы V для простоты выкладок положен равным единице, $V = 1$.

Для нахождения коэффициентов разложения функции распределения $\mu^{(n)}$ мы воспользуемся итерационной формулой

$$\begin{aligned} & \mu_{k_1 \omega_1, \dots, k_n \omega_n}^{j(n)} \Phi_{k_1 \omega_1} \dots \Phi_{k_n \omega_n} = \\ & = \frac{e_j}{m} \int_{-\infty}^t dt' \nabla \Phi_{k_1 \omega_1} \frac{\partial}{\partial V} \mu_{k_2 \omega_2, \dots, k_n \omega_n}^{j(n-1)} \Phi_{k_2 \omega_2} \dots \Phi_{k_n \omega_n}, \end{aligned} \quad (5)$$

вытекающей из уравнения Больцмана, проинтегрированного по траекториям частиц. Нас будет интересовать плотная плазма:

$$\Omega_p \gg \Omega_H; \quad \Omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n / M}, \quad \Omega_H = eH_0 / Mc, \quad (6)$$

когда возможно развитие более сильной неустойчивости [5]. Поэтому, как и в [5], мы пренебрежем влиянием магнитного поля на движение ионов, а для описания электронов ограничимся дрейфовым приближением и будем считать их холодными. Это справедливо в случае

$$\omega_H \gg \omega \gg \Omega_H, \quad kR_H \gg 1 \gg k\rho_H, \quad (7)$$

где $R_H = v_{Ti} / \Omega_H$ — ларморовский радиус ионов с тепловыми скоростями v_{Ti} ; соответствующие величины для электронов обозначены прописными буквами $\omega_p, \omega_H, \rho_H$.

3. В предположениях (6), (7) в линейном приближении дисперсионное уравнение (3) для частоты колебаний ω записывается в виде

$$\varepsilon_k^{(4)}(\omega) \equiv 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} + \frac{\Omega_p^2}{k^2 v_{Ti}^2} \left[\psi(0) + F\left(\frac{\omega}{kv_{Ti}}\right) \right] = 0; \quad (8)$$

$$\psi(x) = v_{Ti}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{0j}(v_{\perp}^2, v_z^2) dv_z, \quad F(y) = 2 \int_0^{\infty} dx \frac{d\psi/dx}{(1-x/y^2)} \quad (8')$$

Здесь $\psi(x)$ — функция распределения ионов по безразмерным скоростям $x = v_{\perp}^2 / v_{Ti}^2$, удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int_0^{\infty} dx \psi(x) = 1.$$

В подынтегральном выражении для $F(y)$ нужная ветвь корня на действительной оси $y = y_r + i\varepsilon$ выбирается следующим образом (см. [5]):

$$\begin{aligned} (1 - x/y^2)^{-1/2} &= |y_r| (y_r^2 - x)^{-1/2}, \quad y_r^2 > x; \\ (1 - x/y^2)^{-1/2} &= -iy_r (x - y_r^2)^{-1/2}, \quad y_r^2 < x. \end{aligned} \quad (9)$$

Из этого определения следует, что уравнение (8) имеет решения $\text{Im } \omega > 0$, соответствующие нарастающим возмущениям, если только

$$\int d\psi x^{-1/2} > 0.$$

В работе Розенблюта и Поста [5] предполагалось, что частицы успевают уходить из «конуса потерь» через магнитные пробки и вследствие этого в ловушке отсутствуют частицы с $v_{\perp} = 0$. Тогда $\psi(0) = 0$. Это приводило к тому, что всегда существовали решения с большой длиной волны $k\lambda_D \ll |F_i|$ ($\lambda_D = v_{Ti} / \Omega_p$ — дебаевский радиус, $F_i = \max \text{Im } F(y)$), нара-

стающие с большим инкрементом $\gamma \sim \omega$. В реальных ловушках конечной длины L время выхода ионов через магнитные пробки конечно и равно по порядку величины $T \approx L/v_z$, где v_z — скорость иона вдоль силовой линии магнитного поля. Теперь может оказаться, что при незаполненном «конусе потерь» турбулентная диффузия приводит к заполнению его за времена τ меньшие, чем время выхода частиц через пробки $\tau < T$. Следовательно, предположение $\psi(0) = 0$ уже несправедливо, и мы должны рассмотреть более общий случай $\psi(0) \neq 0$ ²⁾. С поднятием функции распределения $\psi(x)$ в нуле положительный максимум функции $-\text{Im } y_r F(y)$ довольно быстро падает по величине и смещается в область малых y . Наконец, при условии

$$\int_0 dx \frac{d\psi}{dx} x^{-1/2} \leq 0$$

становится невозможной раскачка даже возмущений с очень малой фазовой скоростью $\omega / kv_{Ti} \equiv y_k \rightarrow 0$. Поэтому мы можем считать, что в режиме заполненного конуса этот интеграл мало отличается от нуля, и поэтому $\psi(0) > F$ в области положительных значений функции $-\text{Im } y_r F(y)$.

Из уравнения (8) находим для этого случая, что максимум отношения инкремента γ к частоте ω

$$\gamma / \omega = -F_i / [k^2 \lambda_D^2 (1 + \omega_p / \omega_H^2) + F_r + \psi(0)] \quad (10)$$

достигается при длинах волн

$$k \lambda_D < (F_r + \psi)^{1/2} (1 + \omega_p^2 / \omega_H^2)^{-1/2}$$

и остается меньшим единицы ($\gamma < \omega$). В коротковолновой области спектра

$$k \lambda_D > \psi^{1/2} (1 + \omega_p^2 / \omega_H^2)^{-1/2}$$

отношение γ / ω падает обратно пропорционально $\sim k^2$. Таким образом, заполнение «конуса потерь» под действием диффузии, вызванной развитием неустойчивости, подавляет саму неустойчивость.

Это ослабление неустойчивости легко понять из рассмотрения распределения ионов по одной из компонент скорости, например v_x , поперек магнитного поля \mathbf{H}_0 . Как видно из рис. 1, при $\psi(0) = 0$ распределение имеет вид двух сдвинутых друг относительно друга «пучков» ионов, а по мере заполнения конуса ($\psi(0)$ — растет) разница скоростей в этих двух группах частиц размазывается и неустойчивость ослабляется. Ослабление неустойчивости, а вместе с тем и турбулентной диффузии, происходит до тех пор, пока поток ионов в «конус потерь» за счет турбулентной диффузии не сравняется с потоком ионов, выходящих из ловушки через магнитные пробки. Для целей управляемого термоядерного синтеза практически интересны лишь времена удержания плазмы большие, чем время выхода электронов из ловушки за счет кулоновских соударений. Поэтому можно считать, что электроны покидают ловушку быстрее, чем ионы, и благодаря этому плазма оказывается положительно заряженной. Это в свою очередь приводит к выталкиванию очень медленных ионов вдоль силовых линий на торцы системы. Поэтому мы можем считать, что время выхода плазмы из «конуса потерь» на торцы определяется временем пролета T между

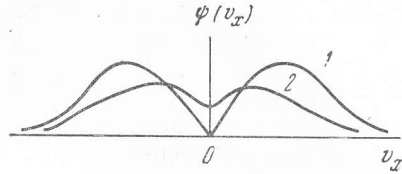


Рис. 1. Распределение ионов по скоростям v_x в случаях пустого (1) и заполненного (2) «конуса потерь»

²⁾ Автор признателен Р. Э. Сагдееву за это замечание.

магнитными пробками тепловых ионов со скоростями $v_z \sim v_{Ti}$. Время пролета для последних по порядку величины равно

$$T \approx L/v_{Ti}. \quad (11)$$

Таким образом, в данных системах распределение плазмы под действием неустойчивости быстро релаксирует к более устойчивому состоянию. Время удержания при этом определяется временем пролета ионов между магнитными пробками, и нам нет необходимости рассматривать детальную картину спектра возникающей турбулентности. Некоторые параметры вновь установившегося распределения ионов мы могли бы определить из условия равенства времени турбулентной диффузии $\tau(F_i, \psi(0))$, выраженного через характеризующие распределение величины $F_i, \psi(0)$, и времени пролета T . Вычисление времени τ в случае подавленной неустойчивости полезно еще и в том отношении, что в пределе пустого «конуса потерь» $\psi(0) \leq F_r$ оно дает оценку по порядку величины времени турбулентной диффузии τ_{min} для случая $T < \tau_{min}$ и величину критической длины $L^* = v_{Ti}\tau_{min}$.

4. Перейдем к рассмотрению спектра турбулентности и турбулентной диффузии ионов в пространстве скоростей. Для этого обратимся сначала к уравнению (2). В предположениях (7) вклад ионов в коэффициенты $\epsilon^{(n)}$, $n \geq 2$, по отношению к вкладу электронов оказывается меньшим в $(\Omega_p/\Omega_H)^{n-1}$ раз, и им всегда можно пренебречь. Вклад электронов в $\epsilon^{(2)}$, $\epsilon^{(3)}$ при условиях (7) вычислен в обзоре [7] путем интегрирования по траекториям частиц:

$$\begin{aligned} \epsilon_{k', k''}^{(2)}(\omega', \omega'') &= i \frac{\omega_p^2 e [k' k'']_z}{(k' + k'')^2 m \omega_H} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv_z df_{0e}/dv_z}{\omega' + \omega'' - (k_z' + k_z'')v_z + i0} \times \\ &\quad \times \left(\frac{k_z''}{\omega'' - k_z''v_z} - \frac{k_z'}{\omega' - k_z'v_z} \right), \\ \epsilon_{-k', k, k'}^{(3)}(-\omega', \omega, \omega') &= - \frac{\omega_p^2 e^2 [k k']^2}{k^2 m^2 \omega_H^2} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{df_{0e}/dv_z}{\omega' + \omega'' - (k_z' + k_z'')v_z + i0} \left(\frac{k_z}{\omega - k_z v_z} - \frac{k_z'}{\omega' - k_z' v_z} \right) \frac{1}{\omega - k_z v_z}. \end{aligned}$$

Наконец, для более компактной записи уравнений (2) введем «число» колебаний n_k с частотой ω :

$$n_k(t) = \left| \frac{\partial \epsilon_k^{(1)}(\omega)}{\partial \omega} \right| \frac{k^2 |\varphi_k|^2}{8\pi}.$$

Тогда уравнение (5) для них примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_k}{\partial t} &= 2\gamma_k n_k + \sum_{k'} R(k, k') n_k n_{k'} + 2\pi \sum_{k'+k''=k} |V_{k, k', k''}|^2 \delta(\omega - \omega' - \omega'') \times \\ &\quad \times (n_{k'} n_{k''} - n_k n_k \theta_{k'} \theta_k - n_{k''} n_k \theta_k \theta_k), \end{aligned} \quad (12)$$

где инкремент неустойчивости

$$\gamma_k = - \left\{ \frac{\Omega_p^2}{k^2 v_{Ti}^2} \operatorname{Im} F \left(\frac{\omega}{k v_{Ti}} \right) - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} k_z \frac{df_{0e}}{dv_z} \delta(\omega - k_z v_z) dv_z \right\} \left| \frac{\partial \epsilon_k(\omega)}{\partial \omega} \right|;$$

$\theta_k = \text{sign } \omega \partial \epsilon_k(\omega) / \partial \omega$ — знак энергии колебаний;

$$V_{k, k', k''} = \left| i \frac{\omega_p^2 e [k' k'']}{8 \pi m \omega_H \omega} \left(\frac{k_z'}{\omega'} - \frac{k_z''}{\omega''} \right) \left(\frac{k_z}{\omega} + \frac{k_z'}{\omega'} + \frac{k_z''}{\omega''} \right) \right| \times \\ \times \left[\frac{k k' k''}{(8\pi)^{3/2}} \left| \frac{\partial \epsilon_k(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \epsilon_{k'}(\omega')}{\partial \omega'} \frac{\partial \epsilon_{k''}(\omega'')}{\partial \omega''} \right|^{1/2} \right]^{-1};$$

$$R(k, k') = - \frac{16 \pi \Omega_p^2 e^2 [k k']^2}{M^2 v_{Ti}^2 \Omega_H^2 \omega^2 k^2 k'^2 \left| \partial \epsilon_k(\omega) / \partial \omega \right| \left| \partial \epsilon_{k'}(\omega') / \partial \omega' \right|} \times \\ \times \text{Im } F \left(\frac{\omega + \omega'}{(k + k') v_{Ti}} \right).$$

Физический смысл членов в правой части уравнения (12) очевиден. Так, первый член описывает резонансную раскачку колебаний ионами с инкрементом γ_k , второй — резонансное поглощение ионами энергии вынужденных колебаний с частотой $\omega + \omega'$ и волновым вектором $k + k'$ и, наконец, третий член описывает распады колебаний³⁾. Изменение суммарной энергии колебаний обязано только первым двум членам, тогда как распадные процессы только перераспределяют ее между модами или переносят в устойчивые области фазового пространства (ω, k) , где она поглощается ионами.

Сравнивая в кинетическом уравнении члены прихода энергии в колебания из-за неустойчивости и ухода ее благодаря нелинейному затуханию Ландау и оттока в затухающие области спектра, находим выражение для спектральной плотности энергии колебаний в режиме установившейся турбулентности:

$$\frac{1}{2\pi} k_{\perp}^2 \sum_{k_z} \frac{e^2 |\Phi_k|^2}{M^2 v_{Ti}^4} \approx \frac{0,1 F_i y_k^2}{k_{\perp}^2 R_H^2 \Phi_k}, \quad (13)$$

где

$$\Phi_k = [\psi(0) + F_r + k_{\perp}^2 \lambda_D^2 (1 + \omega_p^2 / \omega_H^2) + \langle \theta^2 F \rangle],$$

$$\langle \theta^2 F \rangle = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\alpha_1} \alpha d\alpha \int_x^{\infty} dx \frac{d\psi}{dx} \frac{\sqrt{x_*} \sin^2 \theta}{(x - x_*)^{1/2}}, \quad (13')$$

$$\sqrt{x_*} = (y_k + y_{\alpha k}) / (1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{1/2}, \quad \alpha_1 \sim 1.$$

Здесь мы перешли к непрерывным переменным θ, k_{\perp} согласно правилу

$$\sum_{k_{\perp}} \approx \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp}. \quad (14)$$

Член $\langle \theta^2 F \rangle$ учитывает процессы поглощения ионами сразу двух колебаний (нелинейное затухание Ландау) с волновыми векторами k, k' . Наиболее интенсивное поглощение наблюдается при

$$\omega + \omega' \sim |k + k'| v_{Ti}.$$

Это возможно, если $|k + k'| \leq \omega / v_{Ti}, \omega \omega' > 0$.

Учтем далее, что раскачиваются колебания с безразмерной фазовой скоростью $\omega / k v_{Ti} = y_m < 1$ вблизи максимума функции $-\text{Im } F(y)$, т. е.

$$F_i = \text{Im } F(y_m). \quad (15)$$

³⁾ Рассеяние волн электронами ($\omega - \omega' \leq |k_z - k_z'| v_{Te}$), которое также, возможно, оказывается меньшим по порядку величины для холодных электронов из-за сокращения второго и третьего членов в (2), описывающих этот процесс.

Тогда максимум величины $\langle \theta^2 F \rangle$ можно приближенно оценить как

$$\langle \theta^2 F \rangle \sim y_m^4 F_r,$$

где F_r — максимальное по абсолютной величине значение функции $-\text{Im} F(y)$ в области, где она отрицательна. И мы приходим к выводу, что в большинстве реальных случаев при $y_m \ll 1$ процессами нелинейного затухания колебаний можно пренебречь по сравнению с процессами распада.

Выражение (13) при $\psi + F_r > \langle \theta^2 F \rangle$ получено из грубого сравнения в кинетическом уравнении (11) линейных членов $2\gamma_k n_k$ с нелинейными членами, описывающими распад колебаний. При противоположном условии $\langle \theta^2 F \rangle > \psi + F_r$ выражение (13) есть разложение точного решения по степеням $y_m \ll 1$.

5. Зная спектр турбулентности, мы можем с помощью «квазилинейного» уравнения описать процессы турбулентной диффузии ионов в пространстве скоростей под действием нарастающих в неустойчивой плазме колебаний. Усредняя уравнение Больцмана по времени быстрых колебаний, мы получаем «квазилинейное» уравнение для усредненной функции распределения ионов [8, 9]:

$$\frac{\partial f_{0i}}{\partial t} = \frac{e^2}{M^2} \sum_k \frac{\partial}{\partial v} k |\varphi_k|^2 \frac{\gamma_k}{(\omega_k - kv)^2 + \gamma_k^2} k \frac{\partial}{\partial v} f_{0i}. \quad (16)$$

Процессы поглощения ионами сразу двух колебаний здесь будут учтены, если суммирование в (16) провести не только по собственным колебаниям $\varphi_k(r, t)$, но и по вынужденным, с амплитудой

$$\varphi_{k+k'}^{(2)} = - \frac{\varepsilon_{k, k'}^{(2)}(\omega, \omega') \varphi_k \varphi_{k'}}{\varepsilon_{k+k'}^{(1)}(\omega + \omega')} \approx \frac{ie [kk']_z}{m \Omega_H \omega_k} \varphi_k \varphi_{k'}. \quad (17)$$

Резонансное взаимодействие ионов с колебаниями в (16) может быть описано более наглядно, если проинтегрировать (16) по углам вращения ионов на орбите и по продольным скоростям v_z . В результате получим уравнение диффузии:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum \frac{|\omega| e^2 |\varphi_k|^2}{M^2 v_{Ti}^4 (x/y_k^2 - 1)^{1/2}} + \sum \frac{|\omega + \omega'| e^4 [kk']^2 |\varphi_k \varphi_{k'}|^2}{M^4 \Omega_H^2 \omega_k^2 v_{Ti}^4} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{(k + k')^2 v_{Ti}^2 x}{(\omega + \omega')^2} - 1 \right]^{-1/2} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (18)$$

первая сумма в (18) берется по области $x > y_k^2$, а вторая по $x > (\omega + \omega')^2 / (k + k')^2 v_{Ti}^2$. Отсюда видно, что медленные ионы отдают свою поперечную энергию (8) колебаниям и сваливаются в «конус потерь». В свою очередь колебания отдают свою энергию «тепловым» ионам. Поэтому происходит лишь перераспределение энергии между ионами с различными скоростями, в то время как никакая результирующая сила на ионы не действует и их полная энергия сохраняется в процессе турбулентной диффузии.

Из выражения для спектра турбулентности и уравнения (18) получаем порядок величины коэффициента турбулентной диффузии:

$$D \sim 0,1 \int_{k_{min}}^{\infty} dk_{\perp} \frac{\Omega_H y k^3 |F_i|}{k^2 R_H \Phi_k (x/y_k^2 - 1)^{1/2}}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что к наиболее сильной турбулентной диффузии приводят длинноволновые колебания. При длинах ловушки, не намного превышающих критическую длину L_{c1} , указанную в [5], в плазме не могут, однако, развиваться слишком длинноволновые колебания. Наибольшую длину волны раскачиваемых возмущений k_{min}^{-1} мы найдем, следуя [5], из неравенства

$$\text{Im } k_z L \gtrsim 10.$$

Оно выражает требование, чтобы возмущения нарастали до нелинейных эффектов раньше, чем они достигнут торцов и затухнут там вследствие повышенного затухания Ландау на электронах.

Используя дисперсионное уравнение (8), переписываем это неравенство в виде

$$k\lambda_D \gtrsim 10 \frac{\lambda_D}{y_m |F_i| L} \sqrt{\frac{M}{m}} \left[\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} \right) k^2 \lambda_D^2 + F_r + \psi(0) \right]^{1/2}. \quad (20)$$

При этом, конечно, предполагается, что диаметр ловушки R не очень мал, так что $\text{Im } k_{\perp} R \gg 10$. Это имеет место при $R/L \gg \sqrt{\psi m/M}$. В противном случае длина волны будет ограничена условием $\text{Im } k_{\perp} R \gtrsim 10$.

Отсюда следует, что при

$$L < L_{c1} = 10 \frac{\lambda_D}{y_m |F_i|} \left[\frac{M}{m} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} \right) \right]^{1/2} \quad (21)$$

невозможна раскачка никаких колебаний. При достижении критической длины $L \approx L_{c1}$ наиболее быстро нарастают колебания с длиной волны

$$\sqrt{2} k \lambda_D = (\psi + F_r)^{1/2} (1 + \omega_p^2 / \omega_H^2)^{-1/2}.$$

Время заполнения ионами пустого «конуса потерь» за счет турбулентной диффузии

$$\Omega_H \tau_{c1} \approx \frac{40 \Omega_p \Phi \sqrt{F_r}}{(\Omega_H^2 + m \Omega_p^2 / M)^{1/2} y_m^{3/2} |F_i|} \Big|_{\psi(0)=0}$$

оказывается значительно меньшим времени пролета ионов $T = L_{c1} / v_{Ti}$ при плотностях меньших, чем

$$\frac{\Omega_p}{(\Omega_H^2 + m \Omega_p^2 / M)^{1/2}} < y_m^{3/2} \left(\frac{M}{m F_r \Phi^2} \right)^{1/4} \Big|_{\psi(0)=0} \quad (22)$$

В этих условиях развитие неустойчивости при $L > L_{c1}$ всегда приводит к выходу ионов из ловушки за времена порядка времени пролета ионов между магнитными пробками $T \approx L / v_{Ti}$.

В случае невыполнения условия (22) существует интервал длин $L_* > L > L_{c1}$, в котором время диффузии ионов в «конус потерь» τ больше времени пролета T и определяет нам время удержания ионов в ловушке. Причем, как следует из (20), с увеличением длины ловушки L развиваются все более длинноволновые колебания, которые и приводят к максимальной диффузии. Из (19), (20) для этого случая имеем

$$\Omega_H \tau \approx 40^2 R_H \sqrt{\frac{M}{m} \frac{\Phi \sqrt{F_r}}{y_m^{3/2} F_i^2 L}} \Big|_{\psi(0)=0}, \quad (23)$$

$$L_{c1} < L < L_* = 10 \frac{R_H}{y_m |F_i|} \left(\frac{M \Phi^2 F_r}{m} \right)^{1/4}.$$

При дальнейшем увеличении длины $L > L_*$ мы снова переходим в режим заполненного «конуса потерь» и время $\tau \approx L/v_{Ti}$. (Качественная зависимость $\tau(L)$ изображена на рис. 2.) Отметим, что при росте L от L_{c1} до L_* длина волны раскачиваемых колебаний остается значительно короче ларморовского радиуса ($k(L_*)R_H \approx (MF_r/m\Phi^2)^{1/4}y_m^{3/2} > 1$), инкремент

$$\gamma_* = \Omega_H y_m^{5/2} F_i (M/mF_r^5)^{1/4} \gg \Omega_H,$$

а частота $\omega \gg \Omega_H$. Поэтому мы нигде не выходим за пределы применимости теории.

Чтобы более реально представить себе порядки величин критических длин L_{c1} , L_* и времени удержания, мы воспользуемся для функции распределения ионов аппроксимацией [5]:

$$f_{0i} = (v_{\perp}^2 - v_z^2)^{1/2} \exp(-Mv_{\perp}^2/2T),$$

$$v_{\perp} > |v_z|, \tag{24}$$

$$f_{0i} = 0, \quad v_{\perp} < |v_z|.$$

Функция F может быть записана через хорошо известную функцию [10, 11]

$$F(y) = -y(1 - 2y^2)Z(y) + 2y^2,$$

$$Z(y) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - y} dt.$$

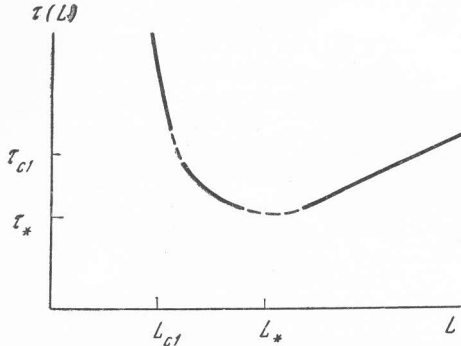


Рис. 2. Зависимость времени жизни τ ионов в ловушке от ее длины L

Максимум $\text{Im } F(y) < 0$ достигается при $y_m = 0,367$ и равен $F_i = -0,31$. Реальная часть $F_r(y_m) \approx 0,44$, а константа $\Phi \approx F_r$. Используя это выражение для $F(y)$, в случае водорода имеем

$$\Omega_H \tau \approx 3 \cdot 10^6 R_H L^{-1}, \tag{25}$$

$$L_{c1} \approx 4 \cdot 10^3 \lambda_D (1 + \omega_p^2/\omega_H^2)^{1/2}, \quad L_* \approx 4,5 \cdot 10^3 R_H.$$

Обратимся, наконец, к рассмотрению эволюции спектра турбулентности в зависимости от длины ловушки L . Как мы уже отмечали, в случае больших плотностей

$$\Omega_p / \Omega_H \gg (M/mF_r\Phi^2)^{1/4}$$

существует интервал длин $L_{c1} < L < L_*$, в котором спектр турбулентности приближенно описывается выражением (13) при условии $\psi(0) = 0$, $\langle \theta^2 F \rangle \ll F_r$:

$$\sum_k \frac{e^2 |\varphi_k|^2}{M^2 v_{Ti}^4} \approx - \frac{0,1 F_i y k^2}{[k^2 \lambda_D^2 (1 + \omega_p^2/\omega_H^2) + F_r] k^2 R_H^2},$$

$$kL > \sqrt{MF_r/m} y_m^{-1} F_i^{-1/2}, \tag{26}$$

где нижняя граница спектра волновых чисел получена из условия (21). Эта оценка остается справедливой по порядку величины и для $L > L_*$ вплоть до длин

$$L_{c2} = R_H \sqrt{M/m\psi},$$

при которых становится возможной раскачка колебаний с длинами волн порядка ларморовского радиуса $kR_H \sim 1$. Только тогда нужно учесть эффект заполнения конуса $\psi(0) \neq 0$.

Для рассмотрения спектра длинноволновых колебаний $kR_H \leq 1$ нужно было бы учесть влияние магнитного поля на движения ионов в таких колебаниях и получить таким образом новое кинетическое уравнение для волн. Однако уже рассмотрение линейного приближения показывает, что очень длинноволновые колебания, $kR_H \ll 1$, с частотами $\omega \approx \Omega_H$ не могут возбуждаться. Действительно, в дисперсионном уравнении (8) теперь следует заменить функцию $F(y)$ на следующую:

$$F(\omega, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \int_0^{\infty} v_{Ti}^2 dx \frac{\partial f_{0i}(v_z^2, x)}{\partial x} \frac{\omega J^2(k_{\perp} R_H \sqrt{x})}{\omega - \Omega_H - k_z + i0}.$$

Область малых скоростей x , где $\partial f_{0i} / \partial x > 0$, при $kR_H \ll 1$ входит с меньшим весом. Поэтому

$$\int df_{0i} J^2 < 0,$$

и распределение плазмы даже при наличии «конуса потерь» устойчиво по отношению к таким длинноволновым колебаниям. По этой причине для описания спектра турбулентности нам достаточно оценки (26), где всегда следует полагать $kR_H \geq 1$.

Резюмируя в заключение результаты работы, мы можем сказать, что при достаточно длинной ловушке с магнитными пробками $L > L_{cl}$ плазма выходит из нее практически за время пролета ионов между магнитными пробками.

Автор пользуется приятной возможностью поблагодарить Б. Б. Кадомцева и Р. З. Сагдеева за ряд ценных советов и замечаний.

Поступила в редакцию
13 марта 1965 г.

Литература

- [1] Л. А. Арцимович. Доклад на 3 Женевской конференции по мирному использованию атомной энергии, 1964 г.; Атомн. энерг., 17, 269, 1964.
- [2] А. А. Веденов, Р. З. Сагдеев. Сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 3, Изд. АН СССР, 1958, стр. 278.
- [3] E. G. Harris. Phys. Rev. Lett., 2, 34, 1959.
- [4] В. Б. Красовицкий, К. Н. Степанов. ЖТФ, 34, 1013, 1964. В. И. Пистуневич. Атомн. энерг., 14, 72, 1963.
- [5] M. N. Rosenbluth, R. F. Post. High frequency electrostatic plasma instability inherent to «loss-cone» particle distributions, preprint, San-Diego, 1964; Phys. Fluids, 8, 3, 1965.
- [6] Б. Б. Кадомцев. Вопросы теории плазмы, 4, Атомиздат, 1964, стр. 188.
- [7] А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 5, 20, 1965.
- [8] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 1962, стр. 82.
- [9] W. B. Drummond, D. Pines. Nuclear Fusion, Suppl., part 3, 1049, 1962.
- [10] В. Н. Фадеева, Н. М. Тереньев. Таблицы функций от комплексного аргумента, Гостехиздат, 1954.
- [11] B. D. Fried, S. D. Conte. The plasma Dispersion Function, Acad. Press, 1961.

ION ESCAPE FROM A MAGNETIC MIRROR TRAP DUE TO DEVELOPMENT OF INSTABILITY CONNECTED WITH THE «LOSS CONE»

A. A. Galeev

The nonlinear stage of development of microinstability in a plasma in magnetic mirror traps caused by the «loss cone» in the ion velocity distribution is considered. The oscillations which arise as result of the instability leads to fast diffusion of the ions in velocity space to the «loss cone» and to their subsequent escape from the trap.