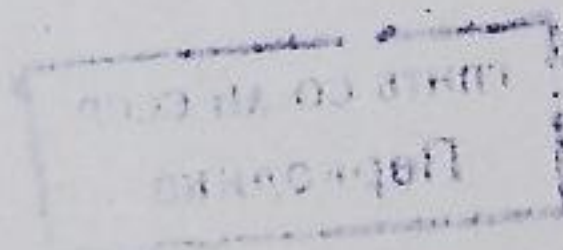


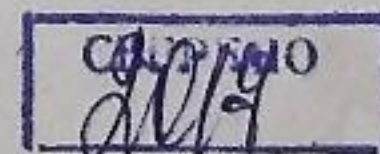
АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР

# МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

1965 • 2



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗИНАТНЕ» • РИГА





ную волну, амплитуда которой не определяется законами сохранения, и может быть найдена только из рассмотрения структуры разрыва [33—36].

Автор приносит благодарность А. И. Ахиезеру за ценные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 1940, 10, 542.
2. J. Neumann. Progr. rep. on the theory of shock waves. NDRC, Division 8, Office of Scientific Research and Development, 1943, No. 1140.
3. W. Doring. Ann. Physik, 1943, 43, 421.
4. J. J. Eggenbeck. Phys. Fluids, 1961, 4, 4, 481.
5. Р. И. Солоухин. УФН, 1959, 68, 3, 513.
6. J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss. J. Chem. Phys., 1958, 28, 1130.
7. B. Linder, C. Curtiss, J. Hirschfelder. J. Chem. Phys., 1958, 28, 1147.
8. W. G. Penney. Proc. Roy. Soc., 1951, A204, 1.
9. G. Ribaud. ARS J., 1959, 29, 11, 876.
10. T. C. Adamson. Phys. Fluids, 1960, 3, 5, 706.
11. Р. В. Половин. ЖЭТФ, 1961, 41, 2, 394.
12. Г. Я. Любарский. ПММ, 1961, 25, 1041.
13. Г. Я. Любарский. ПММ, 1962, 26, 511.
14. У. Д. Хейз. Сб.: Основы газовой динамики. М., ИЛ, 1963, 386.
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1957, 284.
16. В. П. Демуцкий, Р. В. Половин. ЖТФ, 1961, 31, 4, 419.
17. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин. ЖЭТФ, 1958, 35, 731.
18. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин. ДАН СССР, 1959, 128, 684.
19. С. В. Иорданский. ДАН СССР, 1958, 121, 610.
20. Р. В. Половин, Г. Я. Любарский. ЖЭТФ, 1958, 35, 510.
21. Р. В. Половин, Г. Я. Любарский. УФЖ, 1958, 3, 571.
22. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин. УФЖ, 1958, 3, 433.
23. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин. ЖТФ, 1959, 29, 993.
24. А. Г. Куликовский. ДАН СССР, 1958, 121, 6, 987.
25. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин. УФЖ, 1958, 3, 567.
26. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин. ЖЭТФ, 1958, 35, 509.
27. Э. Лариш, И. Шехтман. ЖЭТФ, 1958, 35, 1, 203.
28. R. A. Gross. J. Aerospace Sci., 1958, 25, 12, 788.
29. R. A. Gross, W. Chinitz, T. J. Rivlin. J. Aerospace Sci., 1960, 27, 4, 283.
30. А. А. Бармин. ДАН СССР, 1961, 138, 1, 77.
31. А. А. Бармин. ПММ, 1962, 26, 801.
32. J. V. Helliwell, D. C. Pask. Phys. Fluids, 1962, 5, 6, 738.
33. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. ДАН СССР, 1959, 129, 52.
34. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов. Изв. АН СССР, ОТН, ММ, 1959, 4, 130.
35. Г. А. Любимов. ДАН СССР, 1959, 126, 3, 532.
36. Г. А. Любимов. Изв. АН СССР, ОТН, ММ, 1959, 5, 9.

## SUMMARY

It is proved that in a magneto-hydrodynamic detonation the speed of the reaction products is equal to the phase velocity of small disturbances (in normal direction), the frame of reference moving with the detonation front and the duct being closed from one end by a perfectly conducting wall. If the detonation occurs in a fast (or slow) shock wave, the speed of the reaction products is equal to the velocity of fast (or slow) magneto-sonic waves. The conductivity of the medium in front and behind the discontinuity is supposed to be infinite. The direction and magnitude of the magnetic field, the energy of reaction, as well as the equation of state are supposed to be arbitrary.

Поступило 24 ноября 1964 г.

С. С. Мусеев, В. Р. Смилянский

К ВОПРОСУ О ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН  
В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Рассмотрен вопрос о трансформации магнитозвуковых волн в рамках идеальной магнитной гидродинамики. Методом фазовых интегралов получены коэффициенты трансформации для двух случаев. Обсуждены пределы применимости полученного решения.

Известно, что если свойства среды мало меняются на расстояниях порядка длины волны, то задача о распространении волн в среде может быть решена в приближении геометрической оптики. Это приближение, однако, нарушается вблизи точек, где волновой вектор в комплексной плоскости либо обращается в нуль — «точки поворота», либо же волновые векторы, соответствующие различным колебаниям, совпадают — «точки пересечения решений», как, например, в работах [1—4]. В последнем случае при прохождении волной такой области (область «взаимодействия нормальных волн») возникает также волна нового типа с другими дисперсионными свойствами. Вопросу трансформации волн посвящен ряд работ [5—7 и др.]. Если область «взаимодействия» нормальных волн мала по сравнению с длиной волны, задача может быть решена по методу последовательных приближений [5]. В обратном предельном случае применяют метод фазовых интегралов [6] в форме, развитой в работе [1] для дифференциальных уравнений четвертого порядка. Следует при этом иметь в виду, что поскольку коэффициент трансформации оказывается, вообще говоря, экспоненциально малым (с тем большим показателем в экспоненте, чем больше расстояние точки пересечения решений до вещественной оси), то применение метода фазовых интегралов требует известной осторожности, так как при этом возможна потеря решений [8, 9]. В работе [4] для дифференциального уравнения четвертого порядка рассмотрен другой метод обхода точек пересечения решений, по существу эквивалентный представлению вблизи каждой такой особенности дифференциального уравнения четвертого порядка в виде двух дифференциальных уравнений второго порядка со слабой связью. В настоящей работе исследуется вопрос о трансформации волн в рамках идеальной магнитной гидродинамики и обсуждаются различные способы решения данной задачи.

1. Плазма рассматривается в магнитогидродинамическом приближении. В качестве исходных берутся уравнения магнитной гидродинамики в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}); \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu_0}{\rho} [\text{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}]; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0; \quad \text{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$



где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление. (В дальнейшем индексом 0 будем обозначать невозмущенные величины, а обозначениями  $\mathbf{h}$ ,  $\rho'$ ,  $p'$ ,  $\mathbf{v}'$  — возмущения.)

Если считать  $v_0=0$ , то уравнения для малых колебаний имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} &= \text{rot}(\mathbf{v}' \times \mathbf{H}_0); \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\mu_0}{\rho_0} [\text{rot} \mathbf{h} \times \mathbf{H}_0] + \frac{\mu_0}{\rho_0} [\text{rot} \mathbf{H}_0 \times \mathbf{h}]; \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}') + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho_0 &= 0; \quad \text{div} \mathbf{h} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом для невозмущенной плазмы должно выполняться соотношение

$$\nabla p_0 = \mu_0 [\text{rot} \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0]. \quad (3)$$

Будем считать, что  $\mathbf{H}_0$ ,  $\rho_0$ ,  $p_0$  зависят только от координаты  $z$  (берется прямоугольная система координат). Тогда условие (3) допускает, в частности, следующие соотношения:

$$\rho_0(z) + \mu_0 \frac{H_{0y}^2(z)}{2} = \text{const}; \quad H_{0x} = 0; \quad H_{0z} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, полагаем:  $\rho_0(z)$ ;  $p_0(z)$ ;  $\mathbf{H}_0(0, H_{0y}, 0)$ ;  $H_{0y}(z)$ . Обозначим  $H_0 \equiv H_{0y}$ . Будем считать, что все возмущенные величины ( $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $\rho'$ ,  $p'$ ) зависят только от  $y$ ,  $z$ ,  $t$ . Тогда из (2) имеем:

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} = \frac{\mu_0 H_0}{\rho_0} \frac{\partial h_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial h_x}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v_x}{\partial y}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{\mu_0}{\rho_0} h_z \frac{dH_0}{dz}; \\ \frac{\partial v'_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \left( H_0 \frac{\partial h_z}{\partial y} - H_0 \frac{\partial h_y}{\partial z} - h_y \frac{dH_0}{dz} \right); \\ \frac{\partial h_y}{\partial t} &= -H_0 \frac{\partial v'_z}{\partial z} - v'_z \frac{dH_0}{dz}; \quad \frac{\partial h_z}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v'_y}{\partial y}; \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} \right) + v'_z \frac{d\rho_0}{dz} &= 0; \quad \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Система уравнений (5) при переходе к однородной плазме дает известное уравнение для волн Альфвена. Уравнения (6) являются уравнениями для магнитозвуковых волн в неоднородной плазме. В изотермическом случае имеем:

$$\rho_0 = c^2 \rho_0; \quad p' = c^2 \rho', \quad (7)$$

где  $c = \text{const}$ .

Будем искать решение системы (6) в виде

$$v'_z = v'_{z,0}(z) e^{i(k_y y - \omega t)}; \quad \rho' = \rho'_{,0}(z) e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad (8)$$

причем  $k_y = \text{const}$ , и аналогично для других возмущенных величин. Тогда, подставляя (8) в (6) и используя (4) и (7), получим систему уравнений для  $v'_{,0y}(z)$ ,  $v'_{,0z}(z)$ ,  $h^0_y(z)$ ,  $h^0_z(z)$ ,  $\rho'_{,0}(z)$ . Сводя эту систему к одному уравнению более высокого порядка, имеем:

$$A \frac{d^2 v'_{,0z}}{dz^2} + B \frac{d v'_{,0z}}{dz} + D v'_{,0z} = 0, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_A^2}{\omega^2} - \frac{c^2}{c^2 k_y^2 - \omega^2}; \quad B = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{(5\omega^2 - 4k_y^2 c^2)}{(k_y^2 c^2 - \omega^2)}; \\ D &= 1 - V_A^2 \frac{k_y^2}{\omega^2}; \quad V_A^2 = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Величины  $v'_{,0y}$ ,  $h^0_y$  и др. могут быть непосредственно выражены через  $v'_{,0z}$  и производные от  $v'_{,0z}$ . Таким образом, в рассматриваемом случае система (6) свелась к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка. Это означает, что здесь может быть только эффект отражения волн, но не трансформации в собственном смысле (переход одной ветви в другую). Подчеркнем, что в рассмотренном случае направление внешнего магнитного поля перпендикулярно направлению градиента плотности.

В связи с этим рассмотрим случай, когда направления внешнего магнитного поля и градиента плотности совпадают. Будем считать:  $\rho_0 = \rho_0(z)$ ;  $H_0 = H_{0z} = \text{const}$ . Как и в предыдущем случае, полагаем все возмущенные величины зависящими только от  $y$ ,  $z$ ,  $t$ . Это снова дает из (2) уравнения для волн Альфвена

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} = \frac{\mu_0 H_0}{\rho_0} \frac{\partial h_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial h_x}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v'_x}{\partial z} \quad (10)$$

и систему уравнений для магнитозвуковых волн. Решение этой системы также ищем в форме (8). Выкладки, аналогичные предыдущим, приводят к следующей системе линейных дифференциальных уравнений второго порядка для магнитозвуковых волн:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho'_{,0}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \rho'_{,0} &= k_y \frac{\omega}{c^2} \rho_0 v'_{,0y}; \quad \frac{d^2 v'_{,0y}}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0^2} \rho_0 - k_y^2 \right) v'_{,0y} = \\ &= \frac{\omega c^2 k_y}{\mu_0 H_0^2} \rho'_{,0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) видно, что связь осуществляется через параметр  $k_y$ . При распространении волн вдоль магнитного поля, когда  $k_y = 0$ , система (11) строго разделяется на два независимых уравнения второго порядка. Система (11) может быть заменена следующим дифференциальным уравнением четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 v'_{,0y}}{dz^4} + \left[ \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0^2} \rho_0 + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) \right] \frac{d^2 v'_{,0y}}{dz^2} + 2 \left( \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \right) \frac{d v'_{,0y}}{dz} + \\ + \left[ \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0^2} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} + \rho_0 \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0^2} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) - \frac{\omega^2 k_y^2}{c^2} \right] v'_{,0y} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$



Считая  $\rho_0(z)$  медленно изменяющейся функцией  $z$  и пренебрегая членами, содержащими  $\frac{d\rho_0}{dz}$  и  $\frac{d^2\rho_0}{dz^2}$ , можно записать уравнение (12) в виде

$$\frac{d^4 v'^0_y}{dz^4} + \left[ \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0^2} \rho_0 + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) \right] \frac{d^2 v'^0_y}{dz^2} + \left[ \frac{\rho_0 \omega^2}{\mu_0 H_0^2} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2 \right) - \frac{\omega^2 k_y^2}{c^2} \right] v'^0_y = 0. \quad (13)$$

2. Рассмотрим взаимную трансформацию медленной и быстрой магнитозвуковых волн методом фазовых интегралов [1, 6]. Полагаем в интересующей нас области ход плотности линейным:  $\rho_0 = \alpha z$ , где  $\alpha \ll 1$ . Вводя новую переменную  $\xi = \alpha z - b$ , уравнение (12) можно записать в виде:

$$\frac{d^4 v'^0_y}{d\xi^4} + \beta^2 (\xi + 2b) \frac{d^2 v'^0_y}{d\xi^2} + 2\beta^2 \frac{dv'^0_y}{d\xi} + \beta^4 [b(b + \xi) - l^2] v'^0_y = 0, \quad (14)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega^2}{\mu_0 H_0^2}; \quad b = \frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2; \quad l^2 = \frac{\omega^2 k_y^2}{c^2}; \quad \beta = \frac{1}{\alpha} \gg 1.$$

В соответствии с методом фазовых интегралов ищем решение уравнения (14) в приближении геометрической оптики:

$$v'^0_y = e^{\beta(\varphi_0(\xi) + \frac{1}{\beta}\varphi_1(\xi) + \dots)} \quad (15)$$

Для первых двух членов разложения имеем:

$$\left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} \right)_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ -(\xi + 2b) \pm \sqrt{\xi^2 + 4l^2} \right]; \quad (16)$$

$$\left( \frac{d\varphi_1}{d\xi} \right)_{\pm} = -\frac{1}{2} \frac{\left( \frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} \right)_{\pm}}{\left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} \right)_{\pm}} \pm \frac{1}{2} \frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\sqrt{1+\eta^2}} - \frac{1}{2} \frac{\eta \frac{d\eta}{d\xi}}{1+\eta^2}, \quad (17)$$

где  $\eta = \frac{\xi}{2c}$ . Полагаем:

$$k_{1,2}^2 = -\beta^2 \left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} \right)_{\pm}^2. \quad (18)$$

Из (16) видно, что  $k_1$  соответствует быстрой волне, а  $k_2$  — медленной. Будем считать ход плотности вне интересующей нас области и параметры такими, что коэффициент при второй производной в (12) не обращается в нуль. Как видно из (16), точками пересечения решений ( $k_1 = k_2$ ) являются:

$$\xi_{кр} = \pm 2il. \quad (19)$$

В точке  $\xi_{отр} = \frac{l^2 - b^2}{b}$  волновой вектор  $k_1$  обращается в нуль. Волновой вектор  $k_2$  не обращается в нуль на действительной оси.

Взаимное расположение  $\xi_{кр}$  и  $\xi_{отр}$  показано на рис. 1. Волновые векторы  $k_1$  и  $k_2$  можно представить как

$$k_1 = \frac{k_1 + k_2}{2} - \frac{k_2 - k_1}{2}; \quad k_2 = \frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 - k_1}{2}. \quad (20)$$

Как видно из (16) и (18), функция  $\frac{k_1 + k_2}{2}$  является в данном случае однозначной в окрестности точек  $\xi_{кр} = \pm 2il$ , а для  $\frac{k_2 - k_1}{2}$  эти точки являются точками ветвления. Структура выражений (16) — (20) полностью соответствует аналогичным выражениям в работе [6], где также применяется метод фазовых интегралов к дифференциальному уравнению четвертого порядка. Поэтому в дальнейшем мы воспользуемся правилами обхода точек ветвления, полученными в названной работе.

Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть слева на область взаимодействия (рис. 1) падает медленная волна ( $k_2$ ). Справа должны появиться обе волны: медленная ( $k_2$ ) и быстрая ( $k_1$ ). Отношение амплитуды быстрой волны ( $k_1$ ) к амплитуде медленной волны, падающей слева (мы принимаем ее равной единице), и является коэффициентом трансформации. Для расчета удобно первоначальное выражение задать справа:

$$v'^0_y = C_1 e^{i \int_{k_1 d} \xi} + C_2 e^{i \int_{k_2 d} \xi}. \quad (21)$$

(Для краткости мы не выписываем предэкспоненту, так как влияние предэкспоненты уже учтено в правилах обхода.) Производя обход точки ветвления в верхней полуплоскости от  $A$  до  $B$  (см. рис. 1), имеем слева:

$$v'^0_y = e^{i \frac{\pi}{2}} (e^{-\delta_0} C_1 + C_2 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}) e^{i \int_{k_2 d} \xi} + e^{i \frac{\pi}{2}} (C_1 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}} - C_2 e^{-\delta_0}) e^{i \int_{k_1 d} \xi}. \quad (22)$$

Из условий равенства единице амплитуды падающей волны  $k_2$  и отсутствия отраженной волны  $-k_2$  (слева) следует:

$$e^{i \frac{\pi}{2}} (C_1 e^{-\delta_0} + C_2 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}) = 1; \quad C_1 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}} - C_2 e^{-\delta_0} = 0. \quad (23)$$

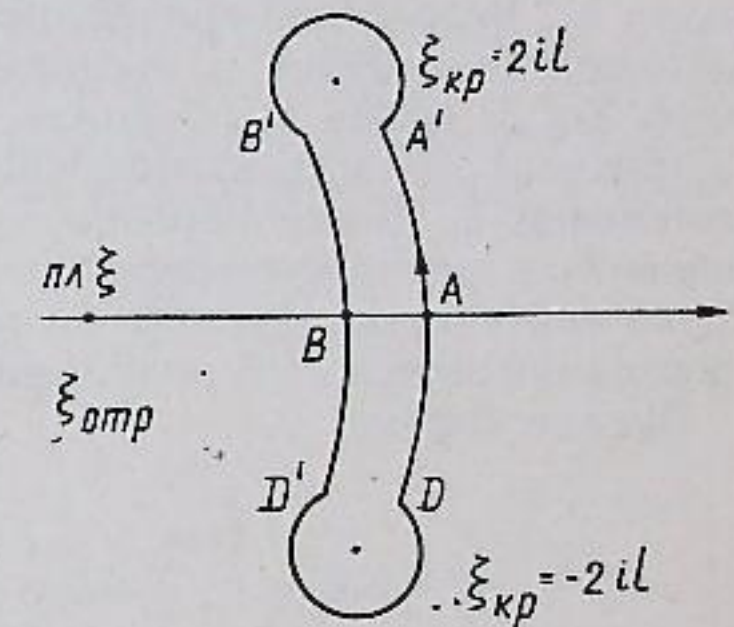


Рис. 1. Точки ветвления.



Отсюда

$$C_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-\delta_0}; \quad C_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}},$$

где

$$2\delta_0 = -i \oint_L \frac{k_2 - k_1}{2} d\xi.$$

Таким образом, коэффициент трансформации оказывается равным

$$C_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-\delta_0}. \quad (24)$$

Второй случай. Пусть справа на область взаимодействия падает волна  $k_1$ . Вследствие трансформации слева появляется еще и волна  $k_2$ , распространяющаяся в сторону отрицательных  $\xi$ . Волна  $k_2$  проходит точку  $\xi_{отр}$ , а волна  $k_1$  полностью от нее отражается. Отраженная волна  $k_1$  проходит область взаимодействия, распространяясь в сторону положительных  $\xi$ . Таким образом, справа будут падающая и отраженная волны  $k_1$  и распространяющаяся в сторону положительных  $\xi$  волна  $k_2$ . Слева (на участке  $[\xi_{отр}, 0]$ ) — падающая и отраженная волны  $k_1$  и распространяющаяся в сторону отрицательных  $\xi$  волна  $k_2$ .

Задаем справа

$$v'_{,0} = C_1 e^{i \int_{k_1 d\xi} \xi} + C_2 e^{i \int_{k_2 d\xi} \xi} + D_1 e^{-i \int_{k_1 d\xi} \xi}; \quad (D_1 = 1). \quad (25)$$

Проводя обход точки ветвления в верхней полуплоскости от  $A$  к  $B$ , имеем слева:

$$v'_{,0} = (e^{-\delta_0} e^{-i\frac{\pi}{2}} C_2 + e^{i\frac{\pi}{2}} C_1 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}) e^{i \int_{k_1 d\xi} \xi} + e^{i\frac{\pi}{2}} D_1 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}} e^{-i \int_{k_1 d\xi} \xi} + e^{i\frac{\pi}{2}} (e^{-\delta_0} C_1 + C_2 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}) e^{i \int_{k_2 d\xi} \xi} + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\delta_0} D_1 e^{-i \int_{k_2 d\xi} \xi}. \quad (26)$$

В соответствии со сказанным выше положим

$$e^{i\frac{\pi}{2}} (e^{-\delta_0} C_1 + C_2 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}) = 0. \quad (27)$$

Так как волна  $-k_1$  отражается от точки  $\xi_{отр}$ , то между амплитудами волн  $-k_1$  и  $k_1$  (слева) должно существовать соотношение:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} D_1 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}} = e^{i(\pi/2+2 \int_{\xi_{отр}}^{0} k_1 d\xi)} (e^{-\delta_0 - i\frac{\pi}{2}} C_2 + e^{i\frac{\pi}{2}} C_1 \sqrt{1 - e^{-2\delta_0}}). \quad (28)$$

Из (27) и (28) имеем:

$$C_1 = e^{-i(\pi/2+2 \int_{\xi_{отр}}^{0} k_1 d\xi)} (1 - e^{-2\delta_0}). \quad (29)$$

3. Обсудим теперь пределы применимости полученного решения и его соответствие с методом, развитым в [4], согласно которому предста-

вим  $k_{1,2}$  в виде

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{2} (\omega_2 \pm \omega_1) \quad (30)$$

где

$$\omega_2 = \sqrt{a\rho_0 + b + 2\sqrt{ab\rho_0 - l^2}}; \quad \omega_1 = \sqrt{a\rho_0 + b - 2\sqrt{ab\rho_0 - l^2}}; \quad (\omega_2 > \omega_1). \quad (31)$$

Такое представление, по существу, соответствует возможности приведения дифференциального уравнения (13) к двум уравнениям второго порядка со слабой связью и с точками поворота, где или  $\omega_1 = 0$ , или  $\omega_2 = 0$ .

В связи с представлением (30) обсудим, во-первых, вопрос о возможности возникновения отраженных волн при прохождении области «взаимодействия», ограничиваясь для простоты первым случаем.

Как отмечено в работе [4] и как следует из (31), отраженные волны в области пересечения решений не возникают. Это следует из того, что при линейном ходе плотности  $\omega_2$ , аналитически продолженное с вещественной оси на комплексную плоскость, не обращается в нуль в точках

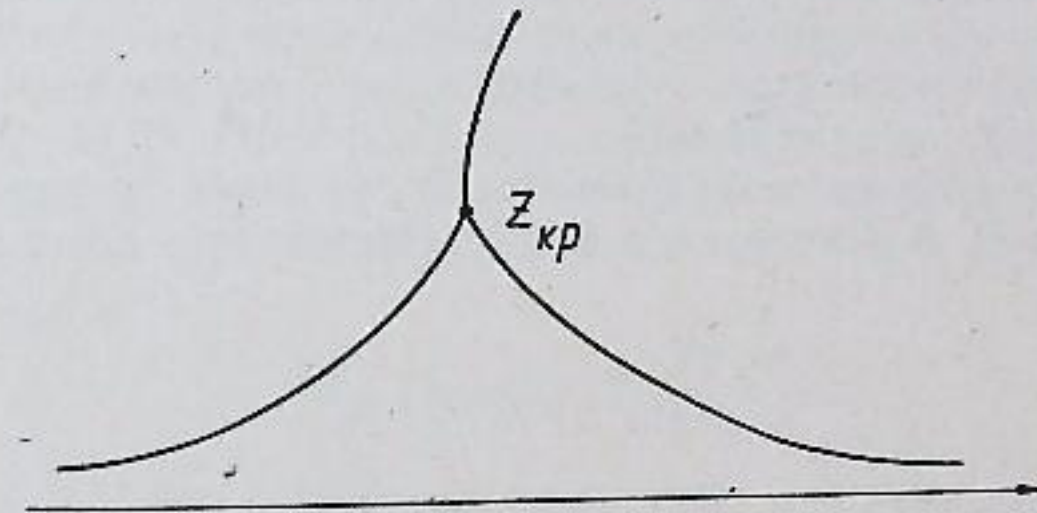


Рис. 2. Линии уровня.

пересечения решений (т. е.  $k_1 + k_2$  не имеет ветвления в этих точках). Если при этом особенности  $\omega_2$  расположены дальше от вещественной оси, чем точки пересечения решений, то отраженные волны могут возникнуть лишь с экспоненциально меньшим коэффициентом. Следует, однако, подчеркнуть, что в общем случае, например, когда коэффициент при второй производной в (13) меняет знак, особенности  $\omega_2$  могут быть расположены вблизи нулей  $\omega_1$  и тогда пренебречь отраженными волнами нельзя.

Остановимся теперь на вопросе о выборе контура при обходе точек пересечения решений. Для простоты будем считать, что особенности  $\omega_2$  расположены дальше от действительной оси, чем особенности  $\omega_1$ , а также по-прежнему ограничимся первым случаем. Как известно, квазиклассическое приближение справедливо лишь с точностью до членов  $\sim 1/kR$  ( $R$  — характерный размер изменения коэффициентов уравнения) и лишь с этой степенью точности имеет смысл говорить о разделении волн на различные типы. Точный смысл коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  приобретают лишь при  $z \rightarrow \pm \infty$ , где уравнение (13) имеет точные экспоненциальные решения (мы предполагаем, что плотность либо стремится к нулю, либо является постоянной на бесконечности). Вместе с тем рассмотрение, которое было проведено выше в соответствии с [6], приводит к необходимости учитывать волны с экспоненциально малыми коэффициентами в конечной части плоскости, что в указанном смысле некорректно. Ситуация здесь напоминает задачу о надбарьерном отражении



частиц в квантовой механике, описанную в работе [9]. Воспользуемся поэтому здесь методом, развитым в ней для нахождения коэффициента надбарьерного отражения. Для этого необходимо продолжить решение  $e^{\int k_2 dz}$  при  $\Re z \rightarrow \infty$  с вещественной оси на верхнюю полуплоскость, пока не дойдем до линии уровня  $\Im \int_{z_{кр}}^z \omega_1 dz = 0$ , проходящей через точку поворота  $\omega_1$  (рис. 2)  $z_{кр}$ . Такое продолжение возможно, так как  $e^{\int k_2 dz}$  ведет себя при этом как  $e^{-|z|}$  ( $k_{2-} = \lim_{z \rightarrow -\infty} k_2(z)$ ). Затем, двигаясь по указанной линии уровня к нулю  $\omega_1$  и используя правила обхода точек поворота [10], получим в результате на  $+\infty$   $C_1$  и  $C_2$ . При этом, как нетрудно видеть, коэффициент трансформации выражается формулой

$$C_1 \sim e^{-i \int_C \omega_1 dz}, \quad (32)$$

где контур  $C$  охватывает линию уровня от  $\Re z \rightarrow +\infty$  до  $\Re z \rightarrow -\infty$ . Если при стягивании контура  $C$  в контур  $AA'B'B$ , как показано на рис. 1, не пересекается каких-либо других особенностей  $\omega_1$ , то формула (32) совпадает с коэффициентом трансформации, полученным нами по методу, развитому в работах [1 и 6].

В противном случае необходимо учесть влияние других особенностей.

Благодарим Р. З. Сагдеева и В. Л. Покровского за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. C. G. Stuekelberg. Helv. Phys. Acta, 1932, 5, 369.
2. А. А. Галеев. ДАН СССР, 1963, 150, 503.
3. В. Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. ФМ, М., 1960.
4. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. ПМТФ, 1964, 5, 44.
5. В. В. Железняков, Е. А. Злотник. Изв. ВУЗ. Радиофизика, 1962, 5, 644.
6. Н. Г. Денисов. Тр. Горьк. иссл. физ.-техн. ин-та и радиофиз. ф-та ГГУ. Уч. зап. (сер. физ.), 1957, 35, 3.
7. D. A. Tidman. Phys. Rev., 1960, 117, 366.
8. E. C. Kemble. Phys. Rev., 1935, 48, 549.
9. В. Л. Покровский, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 1961, 40, 1713.
10. W. H. Furry. Phys. Rev., 1947, 71, 360.

#### SUMMARY

The problem of the transformation of waves in ideal magneto-hydrodynamics is investigated and various ways to solve the problem are discussed. Plasma has been treated in a magneto-hydrodynamic approximation.

Поступило 31 января 1965 г.

Э. П. Кругляков, В. К. Малиновский, Ю. Е. Нестерихин

### О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЫ МЕТОДАМИ ОПТИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

Сообщается о применении оптического интерферометра Майкельсона для диагностики нестационарной плазмы. Приводятся результаты по определению электронной плотности, степени ионизации и температуры плазменных потоков.

Оптическая интерферометрия давно используется в аэродинамике для определения параметров газовых потоков. В последние годы появился ряд работ [1—5], где сообщается об экспериментальных результатах по определению плотности плазмы с помощью интерферометров Маха—Цендера. Возможность применения оптических интерферометров для определения плотности плазмы основана на хорошо известной зависимости показателя преломления плазмы от электронной концентрации  $N_e$ :

$$n - 1 = -9 \cdot 10^9 \frac{2\pi N_e e^2}{m\omega^2}, \quad (1)$$

где  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона,  $\omega$  — круговая частота света. Оптическая разность хода, вносимая плазмой длиной  $l$ , есть

$$\delta m = -\frac{n-1}{\lambda} l = -4,46 \cdot 10^{-16} N_e l, \quad (2)$$

где  $N_e$  — плотность электронов плазмы,  $\lambda$  — длина световой волны.

Использование интерферометра Майкельсона для диагностики плазмы [6] дает возможность повысить чувствительность метода вдвое при хорошем пространственном разрешении. Достигнутая точность определения смещения полос  $\delta m = \delta \lambda / \lambda \cong 0,01$  позволяет регистрировать на интерферометре Майкельсона  $N_e l \cong 2 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-2}$  при просвечивании плазмы светом длины волны  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . При одновременной регистрации интерферограмм в двух длинах волн становится возможным определение степени ионизации в различных участках плазменного сгустка.

Интерферометрия позволяет также определить температуру плазмы. В работе приведены первые результаты, достигнутые в этом направлении.

**Определение профиля плотности плазменного сгустка во времени.** Для нахождения распределения плотности плазмы во времени целесообразно использовать щелевую развертку интерференционных полос. Развертка производилась скоростным фоторегистратором (СФР) при полосах, выставленных перпендикулярно щели. Источником света служила импульсная лампа-вспышка. При значении разрядной емкости  $C = 300 \text{ мкФ}$  и напряжении  $U_c = 3 \text{ кВ}$  монохроматизированные ( $\delta \lambda = 10^{-8} \text{ м}$ ) интерференционные полосы хорошо регистрируются на пленке РФ-3 в