ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА т. 1, вып. 5, 1965 JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛЕМАНА И МАССА ФОТОНА

А. И. ВАЙНШТЕЙН, В. В. СОКОЛОВ, И. Б. ХРИПЛОВИЧ

(Поступила в редакцию 30 ноября 1964 г.)

Показано, что спектральное представление не дает никаких сведений о физической массе фотона, если затравочная масса равна нулю. Существенным оказывается то обстоятельство, что поперечная часть векторного поля однозначно определена только при ненулевой затравочной массе.

Как известно [1], в псевдоскалярной мезонной теории имеет место следующее соотношение между затравочной μ_0 и физической μ массами мезона:

$$\mu_0^2 = \int \rho(\varkappa^2)\varkappa^2\, d\varkappa^2 = Z\mu^2 + \int\limits_{9\mu^2}^{\infty} \sigma(\varkappa^2)\varkappa^2\, d\varkappa^2. \tag{1}$$

Здесь $\rho(\varkappa^2) = Z\delta(\varkappa^2 - \mu^2) + \sigma(\varkappa^2)$ — спектральная функция, удовлетворяющая правилу сумм

$$\int \rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 = Z + \int\limits_{9\mu^2}^{\infty} \sigma(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 = 1. \tag{2}$$

В силу положительной определенности $\rho(\varkappa^2)$, из (1) и (2) следует, что [1]

$$\mu_0^2 \geqslant \mu^2, \qquad 0 \leqslant Z \leqslant 1.$$

Все это в равной мере относится и к скалярным мезонам.

Из этих соотношений ясно, что в такой теории масса мезона не может иметь чисто динамического происхождения. В самом деле, если $\mu_0 = 0$, то условия (1) и (2) могут быть удовлетворены, либо если $Z = 1$, $\sigma(\varkappa^2) = 0$, $\mu = 0$, либо если $\rho(\varkappa^2)$ не является положительно определенной. Первый случай тривиален и соответствует отсутствию взаимодействия, а второй требует индефинитной метрики в гильбертовом пространстве. Это напоминает ситуацию, имеющую место в квантовой электродинамике, где $\mu_0 = 0$, и существует, по-видимому, известная трудность с полюсом Ландау [2].

В связи с этим интересно получить аналог формулы (1) для электродинамики. Хорошо известно, что правило сумм имеет место и в этом случае. Однако, как показал Джонсон [3], для нейтрального векторного мезона, взаимодействующего с сохраняющимся током, условие (1) заменяется соотношением

$$\frac{1}{\mu_0^2} = \int \frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2}\, d\varkappa^2 = \frac{Z}{\mu^2} + \int\limits_{9\mu^2}^{\infty} \frac{\sigma(\varkappa^2)}{\varkappa^2}\, d\varkappa^2. \tag{3}$$

Переходя здесь к $\mu_0 \to 0$ и учитывая правило сумм и положительную определенность $\rho(\varkappa^2)$, Джонсон пришел к заключению, что в этом случае и $\mu = 0$. Этот вывод не является, однако, удовлетворительным, так как уже исходные перестановочные соотношения, использованные в [3], содержат члены с μ_0^{-2}, не имеющие смысла при нулевой затравочной массе [4].

Ниже будет показано, что при правильном предельном переходе к $\mu_0 = 0$ из (3) нельзя сделать никаких выводов о физической массе фотона.

Следуя работе Огиевецкого и Полубаринова [5], запишем уравнения движения и одновременные перестановочные соотношения в виде

$$(\Box - \mu_0^2) A_\mu = j_\mu, \tag{4}$$

$$[A_\mu(x), \dot{A}_\nu(0)]_{x_0=0} = i g_{\mu\nu} \delta(\mathbf{x}). \tag{5}$$

В квантовой электродинамике ($\mu_0 = 0$) (4) и (5) дополняются условием на физические состояния

$$\partial_\mu A_\mu^- | n \rangle = 0. \tag{6}$$

При $\mu_0 \neq 0$ это условие можно не накладывать [5], однако, имея в виду последующий переход к $\mu_0 = 0$, мы примем его и в этом случае.

Хотя подробная схема квантования свободного векторного поля очень близка к обычному рассмотрению электромагнитного поля [6], мы для полноты вкратце ее наметим. Введем в импульсном представлении операторы $c_\mu(\mathbf{k})$, $c_\mu^+(\mathbf{k})$, удовлетворяющие соотношениям коммутации

$$[c_\mu(\mathbf{k}), c_{\mu'}^+(\mathbf{k})] = -g_{\mu\mu'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{7}$$

На вектор состояния они действуют следующим образом:

$$c_m | n_m \rangle = \sqrt{n_m} | n_m - 1 \rangle, \qquad c_m^+ | n_m \rangle = \sqrt{n_m + 1} | n_m + 1 \rangle, \tag{8}$$

$$c_0 | n_0 \rangle = -\sqrt{n_0} | n_0 - 1 \rangle, \qquad c_0^+ | n_0 \rangle = \sqrt{n_0 + 1} | n_0 + 1 \rangle.$$

Вектор состояния нормирован условием

$$\langle n_0, n_1, n_2, n_3 | n_0, n_1, n_2, n_3 \rangle = (-1)^{n_0}, \tag{9}$$

так что и здесь вводится индефинитная метрика в гильбертовом пространстве. Нетрудно видеть, что нормированные состояния, удовлетворяющие условию (6), имеют вид

$$| n_0, n_1, n_2, n_3 \rangle = \frac{1}{(n_3!)^{1/2} \mu_0^{n_3}} (k_0 c_3^+ - |\mathbf{k}| c_0^+)^{n_3} | 0, n_1, n_2, 0 \rangle. \tag{10}$$

Для системы покоя, где $k_0 = \mu_0$, $|\mathbf{k}| = 0$, это выражение очевидно и означает отсутствие временных квантов. В общем случае оно показывает, что в физических состояниях нет скалярных мезонов. В отличие от случая с $\mu_0 = 0$, волновые функции с неравными n_3 физически различимы, так как соответствуют состояниям с разным числом теперь уже наблюдаемых продольных (в трехмерном смысле) квантов.

Необходимо подчеркнуть следующее обстоятельство. Поперечная часть векторного поля, удовлетворяющая условию Лоренца $\partial_\mu A_\mu^\perp = 0$, меняется, вообще говоря, при градиентном преобразовании с функцией Λ, подчиняющейся требованию

$$\Box \Lambda = 0. \tag{11}$$

Вместе с условием градиентной инвариантности [5] уравнения (4) это дает $\mu_0^2 \partial_\mu \Lambda = 0$. Таким образом, при $\mu_0 \neq 0$ поперечная часть A_μ определена однозначно, в то время как при $\mu_0 = 0$ в ее выборе есть произвол, ограниченный соотношением (11).

Из соображений релятивистской инвариантности вакуумное среднее от коммутатора записывается в следующей форме

$$\langle [A_\mu(x), A_\nu(0)] \rangle = i \int d\varkappa^2 \Big\{ \rho_1(\varkappa^2) \Big(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\varkappa^2} \Big) -$$

$$- a \delta(\varkappa^2) \partial_\mu \partial_\nu - \frac{\rho_2(\varkappa^2)}{\varkappa^2} \partial_\mu \partial_\nu \Big\} \Delta(x, \varkappa^2). \tag{12}$$

Первое и второе слагаемые поперечны при произвольном a. Хотя состояние вакуума, по которому производится усреднение, и удовлетворяет условию (6), однако для состояния $A_\nu|0\rangle$ это условие, вообще говоря, не выполняется. Благодаря этому спектральная функция $\rho_2(\varkappa^2)$ отлична от нуля.

Найдем теперь условия, которым должны удовлетворять спектральные функции, если перестановочные соотношения выбраны в виде (5). Из (12) получаем

$$\langle [A_\mu(x), \dot{A}_\nu(0)]_{x_0=0}\rangle = i\Big\{ g_{\mu\nu}\int \rho_1(\varkappa^2)\,d\varkappa^2 - \\ - g_{\mu 0}g_{\nu 0}\int d\varkappa^2[\rho_1(\varkappa^2)-\rho_2(\varkappa^2)] + \\ + (\partial_\mu\partial_\nu + g_{\mu 0}g_{\nu 0}\nabla^2)\int d\varkappa^2\left[\frac{\rho_1(\varkappa^2)-\rho_2(\varkappa^2)}{\varkappa^2} - a\delta(\varkappa^2)\right]\Big\}\,\delta(\mathbf{x}). \qquad (13)$$

Сравнение с (5) приводит к условиям

$$\int \rho_1(\varkappa^2)\,d\varkappa^2 = 1, \qquad (14)$$

$$\int \rho_2(\varkappa^2)\,d\varkappa^2 = 1, \qquad (15)$$

$$\int \frac{\rho_1(\varkappa^2)-\rho_2(\varkappa^2)}{\varkappa^2}\,d\varkappa^2 = a. \qquad (16)$$

Используя уравнения движения (4), получаем соотношение

$$\Box^n(\Box - \mu_0^2)\,\partial_\mu A_\mu = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

которое вместе с (12) и (15) дает

$$\int \rho_2(\varkappa^2)\,\varkappa^{2n}\,d\varkappa^2 = \mu_0^{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (17)$$

Отсюда следует, что

$$\rho_2(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2 - \mu_0^2). \qquad (18)$$

Действительно, пусть

$$f(\varkappa^2) = \sum_n a_n \varkappa^{2n}$$

— любая гладкая функция. Тогда

$$\int \rho_2(\varkappa^2) f(\varkappa^2)\,d\varkappa^2 = \sum_n a_n \int \rho_2(\varkappa^2)\,\varkappa^{2n}\,d\varkappa^2 = \sum_n a_n \mu_0^{2n} = f(\mu_0^2).$$

Выясним теперь смысл величины a. Предварительно заметим, что функция Грина векторного поля имеет вид

$$D_{\mu\nu}(x) = i\int d\varkappa^2\Big\{\rho_1(\varkappa^2)\left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\varkappa^2}\right) - \\ - a\delta(\varkappa^2)\,\partial_\mu\partial_\nu - \frac{\rho_2(\varkappa^2)}{\varkappa^2}\,\partial_\mu\partial_\nu\Big\}\,\Delta_c(x, \varkappa^2). \qquad (19)$$

Благодаря соотношению (16), члены, возникающие при вычислении $D_{\mu\nu}(x)$ от действия $\partial_\mu\partial_\nu$ на $\varepsilon(x_0)$, сокращаются. Ясно, что ни второй, ни третий члены в (19) не принимают участия во взаимодействии с сохраняющимся током. Если взаимодействие отсутствует, то $\rho_1(\varkappa^2) =$

$= \delta(\varkappa^2 - \mu_0^2)$, и из (16) следует, что $a = 0$. Включение взаимодействия не меняет a само по себе. В случае $\mu_0 \neq 0$ поперечная часть векторного поля определяется однозначно, так что a нельзя изменить и градиентным преобразованием. Следовательно, $a = 0$, если только затравочная масса отлична от нуля. В этом случае соотношения (16) и (18) эквивалентны формуле (4).

Пусть теперь $\mu_0 = 0$. Тогда

$$\int \frac{\rho_2(\varkappa^2)}{\varkappa^2} d\varkappa^2 = \int \frac{\delta(\varkappa^2)}{\varkappa^2} d\varkappa^2 = 0,$$

а отнюдь не $\lim\limits_{\mu_0 \to 0} \mu_0^{-2} = \infty$, и из (16) получаем

$$\int \frac{\rho_1(\varkappa^2)}{\varkappa^2} d\varkappa^2 = a. \tag{20}$$

Хотя в отсутствие взаимодействия по-прежнему $a = 0$, оно теперь меняется при калибровочных преобразованиях, допустимых только при $\mu_0 = 0$. Таким образом, для сохранения перестановочных соотношений в виде (5) при включении взаимодействия мы должны перейти в калибровку, удовлетворяющую условию (20). Это равенство, которое было впервые получено Эвансом, Фельдманом и Метьюсом [7], не налагает, очевидно, никаких ограничений на массу фотона.

Тем не менее, как было показано в [4], из градиентной инвариантности действительно следует, что в отсутствие затравочной массы равна нулю и физическая масса фотона. Однако для доказательства необходимы дополнительные предположения относительно взаимодействия, имеющие, впрочем, достаточно общий характер.

В заключение заметим следующее. Как видно из формул (2) и (3), $\delta\mu^2 < 0$, если только $\mu_0 \neq 0$ и $\sigma(\varkappa^2) \neq 0$. Таким образом, условия $Z = 0$, $\delta\mu^2 = 0$, предлагаемые Саламом [8] в качестве уравнений для определения заряда и массы составной частицы, несовместимы, так же как в спинорной и скалярной теории [9]. Если же $\mu_0 = 0$, то, как уже отмечалось, условие $\delta\mu^2 = 0$ при весьма широких допущениях выполняется автоматически. Здесь предполагается, что спектр не простирается ниже μ^2.

Авторы искренне благодарят В. И. Огиевецкого, обратившего их внимание на существенную роль условия (6) при нулевой затравочной массе.

Литература

[1] H. Lehmann. Nuovo Cim., **11**, 342, 1954.
[2] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, **95**, 1177, 1954.
[3] K. Johnson. Nucl. Phys., **25**, 435, 1961.
[4] А. И. Вайнштейн, В. В. Соколов, И. Б. Хриплович. ЖЭТФ, **47**, 1003, 1964.
[5] В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов. ЖЭТФ, 41, 247, 1961.
[6] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, Физматгиз, 1959, стр. 144.
[7] L. Evans, G. Feldman, P. T. Matthews. Ann. of Phys., **13**, 268, 1961.
[8] A. Salam. Nuovo Cim., **25**, 224, 1962.
[9] P. Olesen. Phys. Lett., **9**, 277, 1964.

THE LEHMANN REPRESENTATION AND PHOTON MASS

A. I. VEINSTEIN, V. V. SOKOLOV, I. B. KHRIPLOVICH

It is shown that the spectral representation gives no information on the photon mass, if the bare mass is equal to zero. It proves to be significant that the transversal part of a vector field is determined uniquely only for non-zero bare masses.