

АСИМПТОТИКИ СЕЧЕНИЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ

И. В. ХРИПЛОВИЧ

(Поступила в редакцию 30 ноября 1964 г.)

Рассматривается рассеяние на потенциалах экспоненциального типа, зависящих от энергии. Найден характер зависимости, приводящий к асимптотическому росту полных сечений. Установлен максимально возможный рост потенциала с энергией, совместимый с нормальными аналитическими свойствами амплитуды рассеяния. Близкое ограничение на степень роста потенциала дает требование обычной интерпретации волновой функции. Указан пример амплитуды рассеяния, которая приводит к полному сечению, растущему как квадрат логарифма энергии.

1. Вопрос об асимптотиках сечений рассеяния сильновзаимодействующих частиц является чрезвычайно интересным. Важный результат в этой области был получен Фруассаром [1], показавшим с помощью условия унитарности и представления Мандельштама, что полное сечение не может расти быстрее, чем квадрат логарифма энергии. В той же работе найдено ограничение для амплитуды рассеяния на конечный угол. Последний результат был затем усилен Киношита, Лёффелем и Мартином [2, 3]. Оставалось, однако, неясным, можно ли, не привлекая новых допущений, улучшить результат Фруассара для амплитуды рассеяния вперед [2]. В настоящей работе этот вопрос исследуется на примере потенциального рассеяния.

Будем рассматривать рассеяние на комплексном потенциале, зависящем от энергии. Неупругие процессы, которые играют, очевидно, существенную роль в асимптотической области, имитируются мнимой частью потенциала. Переход в дальнейших рассуждениях к релятивистской кинематике не вызывает затруднений.

Установим прежде всего, какой должна быть зависимость потенциала от энергии, чтобы полное сечение асимптотически росло. Максимальное прицельное расстояние a , на котором еще происходит заметное рассеяние частицы со скоростью v и энергией E , определяется следующим условием: неопределенность в энергии, соответствующая времени пролета $t \sim a/v$, еще сравнима с модулем потенциала $|V(E, a)|$ в этой области. Таким образом, a является положительным корнем уравнения

$$\frac{|V(E, a)|a}{\hbar v} = 1. \quad (1)$$

В случае потенциала Юкава

$$V(E, r) = \frac{g(E)}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$$

находим, что полное сечение равно (по порядку величины)

$$\sigma_t \sim \pi a^2 = \pi r_0^2 \ln^2 \frac{|g(E)|}{\hbar v}. \quad (2)$$

Разумеется, этот результат справедлив лишь при $|g(E)|/\hbar v > 1$. Таким образом, в зависимости от того, остается постоянным или растет с энергией отношение потенциала к импульсу частицы, остается постоянным или рас-

тет с энергией полное сечение рассеяния. Для релятивистской кинематики, когда скорость частицы ограничена, учет лоренцева сокращения приводит к тому же критерию. Отметим, что соответствующие оценки в работе Фруассара [1] являются слишком грубыми. Так, например, они приводят к асимптотически растущему полному сечению при сколь угодно слабом росте потенциала с энергией, что заведомо неверно.

2. Выясним, каков максимальный рост потенциала с энергией, не противоречащий обычным аналитическим свойствам парциальных амплитуд.

Указание на то, что такое ограничение действительно существует, дает исследование точного выражения для амплитуды рассеяния в s -состоянии на экспоненциальном потенциале [4]. Пусть константа связи растет с энергией. Тогда, используя для функций Бесселя, через которые выражается амплитуда, квазиклассические асимптотики [5], можно показать, что если отношение константы связи к энергии асимптотически растет или стремится к достаточно большой постоянной, то парциальная амплитуда при комплексных энергиях растет соответственно сверхэкспоненциально или экспоненциально. Следовательно, такой рост данного потенциала с энергией исключается.

Исследуем теперь в квазиклассическом приближении рассеяние на потенциале Юкава, зависящем от энергии. Радиальное волновое уравнение здесь таково:

$$\chi_l'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \kappa^2(k) \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \right] \chi_l = 0. \quad (3)$$

Орбитальный момент l выбираем достаточно большим, так что квазиклассика применима всюду, кроме окрестностей точек поворота. Кроме того, считаем, что $|kr_0| \gg 1$, $|\kappa/k| \gg 1$. Ограничимся случаем, когда $0 \leq \arg k < \pi/2$. Разрез, соединяющий особые точки уравнения (3) 0 и ∞ , проводим по отрицательной вещественной полуоси. Найдем теперь точки поворота в комплексной плоскости r . Пока $|r| \gg (l + 1/2)^2 / |\kappa^2| r_0$, центробежным членом можно пренебречь, и для точки поворота R получаем уравнение

$$k^2 - \kappa^2 \frac{r_0}{R} \exp\left(-\frac{R}{r_0}\right) = 0. \quad (4)$$

Отсюда

$$R \approx r_0 \ln\left(\frac{\kappa^2}{k^2}\right). \quad (5)$$

Здесь так же, как и в дальнейшем, существенно используется то обстоятельство, что $|R| \gg r_0$.

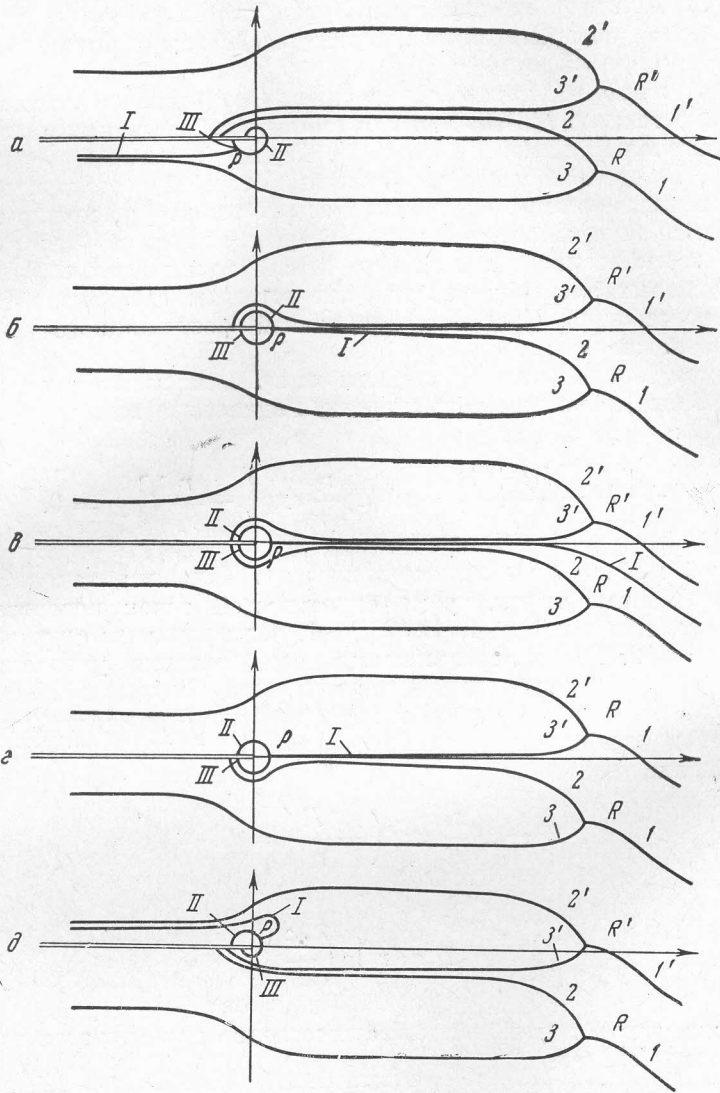
Строго говоря, уравнение (4) определяет бесконечное число точек поворота, расстояние между которыми близко к $2\pi i r_0$. Каждой из них соответствует своя система линий уровня, причем, грубо говоря, все эти системы сдвинуты друг относительно друга также на $2\pi i r_0$. Нетрудно, однако, проверить, что изменение фазы квазиклассической волновой функции при переходе от одной точки поворота к другой равно нулю. Но тогда ясно, что фаза, отсчитываемая, например, от точки R , вещественна на линиях уровня любой системы. А это означает, что все линии уровня, отличающиеся лишь точками поворота, из которых они выходят, смыкаются на бесконечности и что решение на всех таких линиях одно и то же. Благодаря совпадению решений достаточно исследовать лишь одну систему линий уровня. Рассмотренное осложнение является следствием того, что потенциал имеет на бесконечности по r существенную особенность экспоненциального типа.

При малых $(r - R)/r_0$, разлагая импульс по степеням этого отноше-

ния, находим обычным способом уравнение для линий уровня вблизи R :

$$\arg(r - R) = -\frac{2}{3} \arg k + \frac{2\pi}{3} n; \quad n = 0, 1, 2. \quad (6)$$

Рассмотрим линию уровня, уходящую в правую полушарность. Благодаря тому, что $|R| \gg r_0$, можно разбить интеграл, определяющий фазу, на два;



причем в первом аппроксимировать потенциал функцией

$$\kappa^2 \frac{r_0}{R} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right),$$

а во втором вообще пренебречь потенциалом по сравнению с энергией

$$\Phi(r) \approx \int_R^{r'} dr \left[k^2 - \kappa^2 \frac{r_0}{R} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \right]^{1/2} + \int_{r'}^r k dr \approx -kR + kr. \quad (7)$$

Из-за того, что в точке r' допустимы оба приближения, слагаемые, зависящие от r' , сократились. В формуле (7) опущены величины, малые по сравнению с kR , но не малые по сравнению с единицей. Разумеется, такое приближение совершенно непригодно для вычисления волновой функции.

Однако для таких целей, как исследование общего вида линий уровня или характера роста парциальной амплитуды на бесконечности по k , его вполне достаточно, так что в дальнейшем приближения такого типа постоянно используются без специальных оговорок.

Из (7) ясно, что асимптотой линии уровня в правой полуплоскости служит прямая

$$\operatorname{Im} kr = \operatorname{Im} kR. \quad (8)$$

При переходе $\arg k$ через $\pi/2$ асимптота прыгает из четвертого квадранта r -плоскости в первый.

Займемся теперь линиями уровня, уходящими из R влево. Рассмотрим область r -плоскости, достаточно удаленную от R для того, чтобы в ней можно было пренебречь энергией по сравнению с потенциалом. Снова при вычислении фазы интеграл разобьем на два: в первом сохраним зависимость от r лишь в экспоненте, а во втором опустим k^2 под радикалом. Тогда

$$\Phi(r) = \sqrt{2\pi} i \kappa r_0 \left[F \left(\sqrt{\frac{r}{2r_0}} \right) - 1 \right], \quad (9)$$

где $F(z)$ — интеграл ошибок. Это выражение для фазы справедливо всюду, где можно пренебречь энергией по сравнению с потенциалом, за исключением малой окрестности точки $r = 0$, где нужно наряду с потенциалом удерживать центробежный член. При $|r| \gg r_0$ формула (9) значительно упрощается:

$$\Phi(r) = -2i \kappa r_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}} \exp\left(-\frac{r}{2r_0}\right). \quad (10)$$

В этой области уравнение для линии уровня таково:

$$\operatorname{Im} r = r_0 (\arg \kappa^2 \pm \pi - \arg r). \quad (11)$$

При выводе его следует учесть, что если $\arg k = \arg \kappa = 0$, то эти линии должны быть расположены симметрично относительно вещественной оси. Кроме того, при $r \neq \infty$ они не могут пересекаться с линиями уровня, уходящими из аналогичных точек поворота.

Таким образом, на достаточном расстоянии от точки $r = 0$ в правой полуплоскости линии уровня идут параллельно вещественной оси на расстоянии $2\pi r_0$ друг от друга. Когда $\operatorname{Re} r \rightarrow -\infty$, на линии уровня $\arg r \rightarrow \pm\pi$ в зависимости от того, лежит ли эта линия выше или ниже вещественной оси. Если $\arg \kappa^2 = 0$, то отрицательная вещественная полуось служит асимптотой для обеих линий. Если же $\arg \kappa^2 \neq 0$, причем $-\pi < \arg \kappa^2 < \pi$, то одна из линий уровня уходит под разрез. Переход к другим значениям $\arg \kappa^2$ очевиден.

В области, где существен центробежный член, энергией можно пренебречь, а экспоненту в потенциале заменить единицей. Тогда легко найти другую точку поворота

$$\rho = -(l + 1/2)^2 / \kappa^2 r_0. \quad (12)$$

Квазиклассическая фаза, отсчитываемая от точки поворота ρ , при $|r| \ll r_0$, равна

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int_{\rho}^r dr \left[-\frac{(l + 1/2)^2}{r^2} - \kappa^2 \frac{r_0}{r} \right]^{1/2} = \\ &= i \{ 2[(l + 1/2)^2 + \kappa^2 r_0 r]^{1/2} + (l + 1/2) \ln(-\kappa^2 r_0 r) - \\ &\quad - (2l + 1) \ln[(l + 1/2)^2 + \kappa^2 r_0 r]^{1/2} + (l + 1/2) \}. \end{aligned} \quad (13)$$

Разлагая импульс по степеням $(r - \rho) / \rho$, находим уравнения линий уровня вблизи точки поворота:

$$\arg(r - \rho) = -\arg \kappa^2 - \pi + \frac{2\pi}{3} n; \quad n = 0, 1, 2. \quad (14)$$

В области $|\rho| \ll |r| \ll r_0$ получаем из (13)

$$\varphi(r) = 2i\kappa\sqrt{r_0 r}. \quad (15)$$

Сюда из точки ρ приходит только одна линия уровня, определяемая условием

$$\arg r = -\arg \kappa^2 - \pi. \quad (16)$$

Перейдем к области $|R| \gg |r| \gg r_0$. При вычислении интеграла, определяющего фазу, введем вспомогательную точку r' , удовлетворяющую условию $|\rho| \ll |r'| \ll r_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(r) &\approx \int_{\rho}^{r'} dr \left[-\frac{(l + 1/2)^2}{r^2} - \kappa^2 \frac{r_0}{r} \right]^{1/2} + \int_{r'}^r dr \left[-\kappa^2 \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \right]^{1/2} = \\ &= i\kappa r_0 \left[\sqrt{2\pi} - 2 \sqrt{\frac{r_0}{r}} \exp\left(-\frac{r}{2r_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда ясно, что пока $\arg \kappa$ не слишком близок к $\pm\pi/2$, линия уровня проходит в той части рассматриваемой области, где $\operatorname{Re} r < 0$.

Вернемся теперь в окрестность нуля, где $|r| \ll |\rho|$. Здесь, как нетрудно найти из (13),

$$\varphi(r) = i(l + 1/2) \left(\ln \frac{r}{4\rho} + 2 \right). \quad (18)$$

Таким образом, хотя точка поворота ρ асимптотически приближается к $r = 0$, квазиклассическое приближение в начале координат применимо, так как при $|r| \rightarrow 0$, $|\varphi(r)| \rightarrow \infty$. Фаза, определяемая соотношением (18), вещественна на линии

$$|r| = (2/e)^2 |\rho|. \quad (19)$$

Хотя условие $|r| \ll |\rho|$ выполняется не слишком хорошо на кривой (19), эта окружность, однако, довольно близко передает характер еще двух линий уровня, выходящих из ρ . Эти линии уходят под разрез, огибая с разных сторон точку $r = 0$.

С изменением $\arg \kappa$ общая картина линий уровня меняется следующим образом. Когда $\arg \kappa = 0$, удобно считать точку лежащей на нижнем берегу разреза. Из наглядных соображений ясно, что в этом случае одна линия уровня, выходящая из ρ , уходит вдоль вещественной оси на $-\infty$. Отсюда следует, между прочим, что асимптотой линии уровня, определяемой в общем случае из равенства (17), является

$$\operatorname{Im} r = r_0 \arg \kappa^2. \quad (20)$$

Другая линия уровня уходит под разрез, огибая точку $r = 0$, а третья полностью лежит на другом листе.

При уменьшении $\arg \kappa$ точка ρ , вместе с прилегающими к ней участками линий уровня, вращается против часовой стрелки вокруг нуля. Одновременно асимптоты линии *I* (см. рисунок, *a*), а также линий *2* и *3*, выходящих из точки *R*, опускаются. Когда $\arg \kappa$ приближается к $-\pi/2$, линия *2* сливается с *I* и *II*, а линия *3* — с *I*. Образуется система линий уровня, изображенная на рисунке, *б*. Затем система, связанная с точкой поворота ρ , выходит из области, ограниченной линиями *2* и *3* (рисунок, *в*). При дальнейшем убывании $\arg \kappa$ вступают в игру линии уровня,

связанные с точкой поворота, находящейся на $2\pi r_0$ выше R . Сначала линии II и I сливаются с линиями $3'$ и $1'$ (рисунок, z), а затем возникает ситуация, показанная на рисунке, δ . Точка поворота ρ по определению находится на рассматриваемом листе r -плоскости, поэтому при прохождении $\arg \kappa$ через $-\pi$ она прыгает с верхнего берега разреза на нижний и все начинается сначала.

Рассмотрим поведение парциальной амплитуды на бесконечности, когда $\arg \kappa$ далек от $-\pi/2$. Выбрав соответствующее направление в k -плоскости, можно всегда свести задачу к этому случаю. Введем следующие обозначения:

$$p(r) = \left[k^2 - \frac{(l + 1/2)^2}{r^2} - \kappa^2 \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \right]^{1/2},$$

$$\psi_{\pm} = [p(r)]^{-1/2} \exp[\pm i\varphi(r)], \quad \Psi_{\pm} = [p(r)]^{-1/2} \exp[\pm i\Phi(r)]. \quad (21)$$

Первый разрез функции $p(r)$ проведем по линии I , а лист римановой поверхности выберем так, чтобы между линиями II и III $|\psi_+| \gg |\psi_-|$, а в двух других секторах $|\psi_+| \ll |\psi_-|$. Тогда «коэффициент прохождения» $D = \exp[i\varphi(R)]$ удовлетворяет условию

$$|D| \ll 1. \quad (22)$$

С другой стороны, $D = \exp[-i\Phi(\rho)]$. Поэтому для выполнения условия (22) нужно, чтобы в области между линиями 2 и 3 имело место неравенство $|\Psi_-| \ll |\Psi_+|$. Этого можно достичь, проводя второй разрез по линии I и выбирая для него лист так же, как в первом случае. При этом на верхнем берегу разреза и на положительной вещественной оси при $\text{Re } r \rightarrow \infty$ $p(r) \rightarrow k$. Можно было бы, конечно, провести этот разрез по линии 2 или 3 , но тогда для него необходимо выбрать другой лист римановой поверхности.

Согласно граничному условию, при $r \rightarrow 0$ волновая функция стремится к нулю. Поэтому в области между линиями II и III , в которой находится нуль, волновая функция мала и совпадает с ψ_- . Следовательно, она равна ψ_- и на линиях II и III . Теперь нетрудно найти, что на верхнем (нижнем) берегу I волновая функция равна $\psi_- - i\psi_+$ ($\psi_- + i\psi_+$). Так как в области между I и II $|\psi_-| \gg |\psi_+|$, то решение на линиях 2 и 3 также равно $\psi_- = D^{-1}\Psi_-$. Строго говоря, на этих линиях уровня есть еще слагаемые, содержащие Ψ_{\pm} , но они содержат коэффициент D и поэтому экспоненциально малы. Поскольку в областях, заключенных между 2 и 1 и между 3 и I , $|\Psi_-| \gg |\Psi_+|$, то упомянутые члены малы и в этих областях, так что их можно опустить. Теперь волновая функция на верхнем берегу I находится без труда:

$$\chi_l = D^{-1}(\Psi_- - i\Psi_+) = 2D^{-1}e^{-i\pi/4}p^{-1/2} \sin(\Phi + \pi/4). \quad (23)$$

Используя соотношение (7) для $\Phi(r)$ при $\text{Re } r \rightarrow \infty$, получаем следующее выражение для фазы рассеяния:

$$\delta_l = \Phi(r) - kr + 1/2\pi(l + 1/2) \approx -kR. \quad (24)$$

Для системы линий уровня, изображенной на рисунке, δ , получается точкой такой же результат.

Стоит еще обсудить случай, показанный на рисунке, z . Здесь удобно провести разрез по линии уровня, соединяющей ρ с R , а листы снова выбрать так, чтобы между линиями II и III $|\psi_+| \gg |\psi_-|$, а между $2'$ и $1'$ $|\Psi_+| \gg |\Psi_-|$. Задав на линиях II и III ψ_- , теперь получаем на $2'$ и $1'$ решения соответственно в виде

$$\exp[-i\varphi(R)]\Psi_- - 2i \cos \varphi(R)\Psi_+$$

и

$$-\exp[i\varphi(R)]\Psi_- - 2i \cos \varphi(R)\Psi_+.$$

При условии $\varphi(R) = \pi(n + 1/2)$ решением на обеих линиях и в области между ними служит $(-1)^{n+1} \Psi_-$. Таким образом, на вещественной оси при $r \rightarrow \infty$ волновая функция представляется затухающей экспонентой. А это означает, что при комплексных, вообще говоря, значениях k , удовлетворяющих указанному условию, возникает «связанное состояние» с заданным l , точнее, полюс в парциальной амплитуде. В случае, когда $\pi/2 < \arg k \leq \pi$ и правые линии уровня загибаются не вниз, а вверх, полюса амплитуды рассеяния возникают при том же условии, но уже в ситуации рисунка, б.

Итак, если отношение «константы связи» потенциала Юкава к энергии велико, то парциальная амплитуда имеет на бесконечности существенную особенность сверхэкспоненциального или экспоненциального типа в зависимости от того, растет ли это отношение с энергией или остается постоянным. Кроме того, в этом случае у амплитуды рассеяния могут возникать полюса при комплексных энергиях. Следовательно, и для потенциала Юкава такая возможность исключается.

3. Очевидно, полное решение задачи о рассеянии в квазиклассическом приближении требует весьма детального изучения свойств потенциала, а поэтому оно едва ли возможно, скажем, для суперпозиции потенциалов Юкава с весовой функцией достаточно общего вида. Тем не менее для потенциалов экспоненциального типа можно привести соображения, которые делают весьма сомнительной возможность асимптотического роста отношения потенциала к энергии.

Действительно, естественно считать, что по мере роста этого отношения дальняя точка поворота R уходит все дальше вправо. Если потенциал не носит преимущественно притягивающего характера, т. е. если фаза эффективной константы связи не слишком близка к $\pm\pi$, то ясно, что рассеивающаяся частица не может проникнуть на расстояния, существенно меньшие, чем $\text{Re } R$. Поэтому все остальные точки поворота и сингулярности потенциала не могут заметно повлиять на процесс рассеяния, так что при вычислении фазы δ_l достаточно учесть только точку поворота R . Таким образом, вычитая из квазиклассической фазы фазу свободного движения, получим

$$\begin{aligned} \delta_l &= - \int_{(l+1/2)k^{-1}}^R dr \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}} - \int_R^\infty dr [k - \sqrt{k^2 - V(k, r)}] = \\ &= -kR + \frac{\pi}{2}(l+1/2) - \int_R^\infty dr V(k, r) [k + \sqrt{k^2 - V(k, r)}]^{-1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Правее точки R центробежный член всюду опущен. Учитывая, что вдоль пути интегрирования от R $V(k, r)$ монотонно убывает и что $V(k, R) = k^2$, нетрудно представить оставшийся интеграл в виде βkr_0 , где β — коэффициент, близкий к единице, появившийся из-за пренебрежения радикалом в знаменателе, а r_0 — характерная длина убывания потенциала в окрестности R . Окончательно,

$$\delta_l = -kR + \frac{\pi}{2}(l+1/2) - \beta kr_0. \quad (26)$$

Этот результат, видимо, справедлив при всех $\arg k$, для которых потенциал далек от притягивающего. Он показывает, что парциальная амплитуда имеет существенную особенность по энергии на бесконечности.

4. Можно показать, что потенциал, у которого степень роста с энергией превышает единицу, приводит к трудностям и во временном уравнении Шредингера. Как известно [6], потенциал, зависящий от энергии,

соответствует запаздывающему взаимодействию в таком уравнении:

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\mu} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t V(\mathbf{r}, t-t') \psi(\mathbf{r}, t') dt'. \quad (27)$$

Заметим, что в силу условия причинности, $V(\mathbf{r}, t) = 0$ при $t < 0$, а это обеспечивает аналитичность $V(\mathbf{r}, E)$ во всей комплексной плоскости энергии с разрезом по вещественной оси.

Поведение потенциала стационарного уравнения Шредингера $V(\mathbf{r}, E)$ при больших энергиях определяет характер особенности $V(\mathbf{r}, t)$ при $t \rightarrow 0$. Исследуем эту зависимость для случая степенной асимптотики $V(\mathbf{r}, E)$ по энергии. Итак, пусть $V(E) = vE^\alpha$ при $E \rightarrow \infty$. Рассмотрим сначала случай $-1 < \alpha < 0$. Тогда

$$V(t) = \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-iEt} E^\alpha = v e^{i\pi\alpha/2} \frac{\theta(t) t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}. \quad (28)$$

Линия интегрирования лежит чуть выше вещественной оси, поэтому при $t < 0$ контур можно замкнуть в верхней полуплоскости, и интеграл в этом случае обращается в нуль. Если $\alpha = 0$, то, очевидно, $V(t) = v\delta(t)$ и запаздывание отсутствует. Пусть теперь α — нецелое положительное число, а n — целое число, такое, что $-1 < \alpha - n < 0$. Тогда

$$V(t) = \frac{v i^n e^{i\pi\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha + n)} \frac{d^n}{dt^n} [\theta(t) t^{-\alpha+n-1}], \quad (29)$$

а уравнение Шредингера сводится к уравнению вида

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\mu} \Delta \psi(t) + \frac{v i^n e^{i\pi\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha + n)} \int_{-\infty}^t (t-t')^{-\alpha+n-1} \frac{\partial^n \psi(t')}{\partial t'^n} dt'. \quad (30)$$

Это линейное интегро-дифференциальное уравнение со слабо сингулярным ядром. Для нахождения его решения необходимо задать в качестве начального условия не только волновую функцию, но и $n-1$ ее производную по времени [7]. Если же α равно целому числу n , то $V(t) = v i^n \delta^{(n)}(t)$, уравнение становится дифференциальным n -го порядка по времени, так что в этом случае необходимость задания $n-1$ производной очевидна.

Таким образом, если степень роста потенциала с энергией $\alpha > 1$, то в качестве начального условия необходимо задавать, кроме волновой функции, хотя бы ее первую производную по времени. А это означает, что для таких потенциалов либо $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ не является плотностью вероятности, либо распределение плотности вероятности в данный момент уже не определяет само по себе ее изменение во времени.

5. Теперь естественно рассмотреть рассеяние на потенциале, отношение которого к энергии асимптотически мало. При выполнении условий

$$|V(r, E)| \ll E, \quad kr_0 \gg 1 \quad (31)$$

для нахождения амплитуды рассеяния удобно использовать так называемое приближение прицельного параметра [8]. В случае экспоненциального потенциала

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$$

при соответствующей зависимости κ^2 от k первое из условий (31) выполняется при всех физических r и применимость приближения прицельного

параметра при $k \rightarrow \infty$ не вызывает сомнений. Используя результаты работы [8], получаем следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$f(k, \theta) = -ik \int_0^{\infty} J_0(k\theta b) \{ \exp[i\chi(b)] - 1 \} b db, \quad (32)$$

$$\chi(b) = -\frac{\kappa^2}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{\sqrt{b^2 + z^2}}{r_0}\right) = -\frac{\kappa^2 r_0}{k} \frac{b}{r_0} K_1\left(\frac{b}{r_0}\right). \quad (33)$$

Здесь J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, а K_1 — функция Макдональда первого порядка.

В силу существенной роли неупругих процессов в асимптотической области естественно считать $-\pi < \arg \kappa^2 < 0$. Если отношение $\kappa^2 r_0 / k$ велико, то, используя экспоненциальную асимптотику функции Макдональда, нетрудно оценить амплитуду рассеяния вперед. Действительно, при $b \lesssim r_0 \ln |\kappa^2 r_0 / k|$ можно опустить экспоненту в фигурных скобках (32), а при $b \gtrsim r_0 \ln |\kappa^2 r_0 / k|$ разложить ее в ряд, сохраняя два члена разложения. С помощью оптической теоремы теперь легко найти полное сечение рассеяния

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(k, 0) \approx 2\pi r_0^2 \ln^2 \left| \frac{\kappa^2 r_0}{k} \right|. \quad (34)$$

С помощью соотношения ортогональности для функций Бесселя нетрудно аналогичным образом оценить упругое сечение:

$$\sigma_e = 2\pi \int_0^{\pi} |f(k, \theta)|^2 \sin \theta d\theta \approx 2\pi \int_0^{\infty} |f(k, \theta)|^2 \theta d\theta \approx \pi r_0^2 \ln^2 \left| \frac{\kappa^2 r_0}{k} \right|. \quad (35)$$

Таким образом, даже в случае чисто мнимого потенциала, когда неупругие процессы определяют рассеяние, упругое сечение составляет половину полного. Амплитуда рассеяния вперед является чисто мнимой.

Поскольку $f(k, \theta)$ не может расти экспоненциально в верхней полуплоскости k , то, как видно из соотношений (32), (33), линейный рост потенциала с энергией $\kappa^2 = \gamma k^2$ ($|\gamma| \ll 1$) допустим лишь при условии $\arg \gamma = -\pi$, т. е. когда взаимодействие чисто притягивающее.

Хотя для потенциала Юкава

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu} \frac{r_0}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right)$$

первое из условий (34) не выполняется в достаточно малой окрестности $r = 0$, тем не менее приближение прицельного параметра, видимо, пригодно и здесь. В этом случае

$$\chi(b) = -\frac{\kappa^2 r_0}{k} K_0\left(\frac{b}{r_0}\right), \quad (36)$$

а все остальные соотношения с принятой точностью такие же, как для экспоненциального потенциала. В частности, подтверждается оценка (2).

6. Приведенные выше соображения подсказывают возможный пример амплитуды, насыщающей ограничение Фруассара для полного сечения. В случае взаимодействия двух тождественных частиц с массой μ фаза рассеяния могла бы, скажем, следующим образом зависеть от l и инвариантной энергетической переменной s :

$$\delta_l(s) = -\gamma \left(\frac{s}{4\mu^2}\right)^{\nu} K\left(\frac{2\mu(2l+1)}{s^{1/2}}\right). \quad (37)$$

Здесь $K(z)$ — некоторая функция, аналитическая в правой полуплоскости z , причем когда $z \rightarrow \infty$, $K(z) \sim e^{-z}$. Благодаря этим условиям, парциальная амплитуда аналитична в правой полуплоскости l и при $l \rightarrow \infty$ ведет себя, как $\exp(-4\mu l / s^{1/2})$. Используя указанные свойства, можно показать с помощью преобразования Зоммерфельда — Ватсона, что полная амплитуда рассеяния является аналитической функцией передаваемого импульса t во всей комплексной плоскости с разрезом по вещественной оси от $4\mu^2$ и что при $|t| \rightarrow \infty$ она ограничена по модулю фиксированной степенью $|t|$ [9].

В силу условия унитарности, при вещественных $s > 4\mu^2$ $\text{Im } \delta_l(s) \geq 0$, так что $-\pi \leq \arg \gamma \leq 0$. Во избежание экспоненциального роста амплитуды рассеяния на физическом листе s -плоскости, ν должно быть меньше, чем $-\arg \gamma / 2\pi$. А чтобы обеспечить рост полного сечения, ν нужно сделать положительным. Итак,

$$0 < \nu < -\arg \gamma / 2\pi. \quad (38)$$

Построенная указанным образом амплитуда рассеяния удовлетворяет всем условиям теоремы Фруассара и приводит к полному сечению, растущему как квадрат логарифма энергии.

В заключение автор благодарит А. И. Вайнштейна и В. В. Соколова за постоянное внимание к работе, ценную помощь и критику, В. Н. Байера, В. М. Галицкого, Г. М. Заславского и С. С. Моисеева за полезные советы и обсуждения.

Примечание к корректуре (17 апреля 1965 г.). После того как работа была направлена в печать, автору стала известна статья Киношита, Лёффеля и Мартина Phys. Rev., 135B, 1464, 1964), в которой с помощью аппарата теории аналитических функций показано, что результат Фруассара для амплитуды рассеяния вперед не может быть усилен в рамках прежних допущений.

Литература

- [1] M. Froissart. Phys. Rev., 123, 1053, 1961.
- [2] T. Kinoshita. Acta Phys. Austriaca, 17, 56, 1963.
- [3] T. Kinoshita, J. J. Loeffel, A. Martin. Phys. Rev. Lett., 10, 460, 1963.
- [4] И. И. Гольдман, В. Д. Кривченков. «Сборник задач по квантовой механике», Физматгиз, 1957, стр. 241.
- [5] А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 44, 2062, 1961.
- [6] J. M. Cornwall, M. A. Ruderman. Phys. Rev., 128, 1474, 1962.
- [7] М. М. Розовский. УМН, 12, 369, 1957.
- [8] R. J. Glauber. Lectures in Theoretical Physics, 4, New York, 1958, стр. 315.
- [9] A. Bottino, A. M. Longoni, T. Regge. Nuovo Cim., 23, 954, 1962.

CROSS-SECTION ASYMPTOTICS AND POTENTIAL SCATTERING

И. В. КИРИЛОВИЧ

Scattering on energy dependent exponential type potentials is considered. The character of this dependence, leading to the asymptotical growth of the total cross-sections is found. The maximal increase of the potential with the energy, compatible with the usual analytical properties of the scattering amplitude, is found. A similar limit on the increase of the potential is obtained by requiring the usual interpretation of the wave function. An example is given of a scattering amplitude, leading to a total cross-section, increasing as the squared logarithm of the energy.