

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В ПРОСТОЙ ЯДЕРНОЙ МОДЕЛИ

С. Т. БЕЛЯЕВ, В. Г. ЗЕЛЕВИНСКИЙ

(Поступила в редакцию 9 апреля 1965 г.)

С целью проверки эффективности метода функций Грина и теории ферми-жидкости для конечных систем с низкоэнергетическими коллективными возбуждениями рассматривается простая модель сферического ядра: нуклоны на одном изолированном уровне с большим моментом $j \gg 1$, взаимодействующие с квадрупольными фононами. Система уравнений для функций Грина приближенно замыкается с помощью соотношений типа Уорда. Найдены функции Грина, вершинные части и вероятности электромагнитных переходов. Полученные результаты несовместимы с обычными предположениями теории ферми-жидкости.

1. Введение

Метод функций Грина все более широко используется в работах по исследованию структуры ядер. Наибольший интерес к этому методу возник в последнее время в связи с применением общей идеологии теории ферми-жидкости [1] к ядерным задачам [2]. Как известно, для макроскопических систем эта теория основывается на следующих принципах:

1) низколежащие возбуждения в ферми-системах могут быть описаны как совокупность квазичастиц, которые характеризуются теми же числами, что и исходные частицы;

2) малым параметром, обеспечивающим справедливость теории, является близость энергии квазичастиц к поверхности Ферми, причем заранее нельзя указать количественный критерий этой близости; во всяком случае, амплитуда рассеяния (эффективный четырехполюсник) должна слабо меняться в этой области.

Насколько оправданными являются эти постулаты для атомных ядер? Такие сомнения могут возникать по крайней мере для ядер с ярко выраженными коллективными свойствами, когда, кроме одночастичного спектра, имеющего в четном ядре энергетическую щель $2E$, существуют коллективные возбуждения с энергией $\omega_0 \ll 2E$. В этом случае природа квазичастиц из-за взаимодействия с коллективной ветвью может принципиально меняться. С другой стороны, становится возможным взаимодействие квазичастиц через коллективную ветвь, которое является запаздывающим, и поэтому соответствующая амплитуда рассеяния у поверхности Ферми не может считаться постоянной. Представляет интерес конструктивное исследование этих вопросов в подходящей модели.

В настоящей работе рассматривается ядерная модель, достаточно простая для нахождения явных решений, но вместе с тем сохраняющая характерные черты реальной ситуации.

Будем рассматривать один достаточно изолированный одночастичный уровень сферического ядра, характеризующийся моментом нуклона $j \gg 1$. Взаимодействие нуклонов на этом уровне осуществляется через обмен коллективными возбуждениями — квадрупольными фононами (спаривание между нуклонами предполагается уже учтенным). Рассматриваемое взаимодействие является основным и в реальных ядрах для низколежащих

возбуждений [3]. Ограничение одним уровнем не является принципиальным, а в ряде случаев может быть оправдано также и количественно. В частности, это справедливо для ядер, где заполняется уровень с четностью, отличной от четности остальных уровней данной оболочки (например, протонный уровень $g^{7/2}$ в районе In^{115}), что практически исключает примесь других одночастичных состояний.

Нуклон-фононное взаимодействие в ядре не является слабым, поэтому необходимо использовать методы, выходящие за рамки теории возмущений. Ранее [4] был проведен анализ высших приближений и сформулированы некоторые новые подходы к решению задачи. В рассматриваемой модели систему уравнений для функций Грина удается замкнуть, используя приближенные соотношения типа Уорда. В связи с этим результаты представляют, по нашему мнению, также методический интерес как пример решения уравнений для функций Грина вне рамок теории возмущений.

Рассматриваемая модель позволяет исследовать вопрос об особенностях электромагнитных переходов в системе с низколежащими коллективными возбуждениями. Хорошо известны рецепты вычисления вероятностей переходов либо чисто коллективных, либо одночастичных. В работе [5] были получены общие формулы для переходов между состояниями произвольной природы. Здесь будут проведены конкретные вычисления вероятностей переходов между сложными коллективно-одночастичными уровнями сферических нечетных ядер.

2. Постановка задачи. Оценки графиков

Модель, сформулированная во Введении, описывается гамильтонианом $H = H_0 + H_1$:

$$H_0 = E \sum_m \alpha_{jm}^+ \alpha_{jm} + \omega_0 \sum_{\mu} \mathfrak{A}_{\mu}^+ \mathfrak{A}_{\mu}, \quad (2.1)$$

$$H_1 = \omega_0 \beta (2j + 1)^{1/2} \sum_{mm'\mu} (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & \mu & m' \end{pmatrix} \times \\ \times \alpha_{jm}^+ \alpha_{jm'} [\mathfrak{A}_{\mu} + (-1)^{\mu} \mathfrak{A}_{-\mu}^+] \equiv \omega_0 \beta \sum_{\mu} b_{2\mu}^+ \mathfrak{A}_{\mu}^{(+)}. \quad (2.2)$$

Первый член в H_0 описывает нуклоны на уровне с моментом j , энергия которых с учетом спаривания (Δ) равна $E = (e^2 + \Delta^2)^{1/2}$; второй член отвечает свободным фононам ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$).

Гамильтониан (2.1), (2.2) получен и исследован в работах [3, 4]¹⁾. Вообще говоря, нуклон-фононное взаимодействие, кроме (2.2), содержит также член, не сохраняющий число квазичастиц (типа $(\alpha\alpha + \alpha^+\alpha^+) \mathfrak{A}^{(+)}$). В случае хорошей адиабатичности ($\omega_0 \ll 2E$) этот член дает лишь поправки к собственной энергии нуклона порядка $(\omega_0/2E)^2$. Вклад его в собственную энергию фонона (замкнутые нуклонные петли) не мал. Однако мы можем не учитывать этих членов явно, считая, что соответствующая перенормировка фононов выполнена.

Основная идея приближения, которое будет использовано ниже, заключается в следующем. При большой величине момента нуклона каждый элементарный акт испускания или поглощения фонона может приводить лишь к малому «повороту» j . Если полностью пренебречь этими поворотами, то задача сводится фактически к нахождению спектра системы нуклона и скалярных фононов. Тогда можно замкнуть систему уравнений для

¹⁾ Эффективная константа связи β зависит от числа нуклонов в рассматриваемой оболочке [4]. В дальнейшем эта зависимость для нас не будет существенной, так как при нахождении одночастичной функции Грина фактически решается задача об одном нечетном нуклоне сверх четного остова.

функций Грина, используя точное соотношение Уорда (см. [4], случай В). Однако это приближение является недостаточным, так как не дает зависимости спектра возбуждений от моментов. Возникает заманчивая идея: используя в качестве нулевого приближения точное решение скалярной задачи, построить регулярный метод нахождения поправок, связанных с квадрупольностью фононов. Точного соотношения Уорда в этом случае не существует. Однако, как будет показано ниже, можно написать аналогичное соотношение в виде ряда по обратным степеням j . Ограничиваясь определенным числом членов в этом разложении, мы получим замкнутую систему уравнений вплоть до желаемого порядка по j^{-1} .

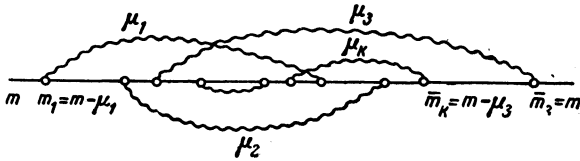
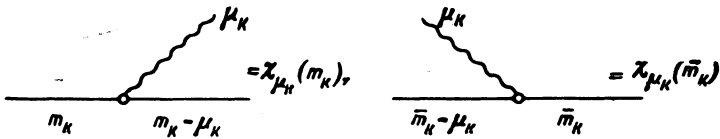


Рис. 1

Полезно сначала провести качественный анализ графиков теории возмущений, который прояснит смысл приближений и позволит установить параметр разложения. Любой фейнмановский график, дающий вклад в одночастичную функцию Грина G , состоит из одной сплошной фермионной линии и некоторого числа испускаемых и поглощаемых фононных линий (рис. 1). Отличие такого графика от случая скалярных фононов состоит лишь в геометрическом факторе, возникающем от сложения моментов. В случае квадрупольных фононов каждой вершине отвечает дополнительный множитель, равный

$$\frac{1}{(2j+1)^{1/2}} (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & \mu & m - \mu \end{pmatrix} \equiv \chi_{\mu}(m). \quad (2.3)$$

Чтобы найти геометрический фактор для произвольного графика, перенумеруем все фононные линии μ_1, \dots, μ_n и введем обозначения левой и правой вершин каждого фонона:



В результате суммирования по проекциям фононных моментов график без внешних фононных концов приобретает множитель

$$w = \sum_{(\mu)} \prod_h \chi_{\mu_h}(m_h) \chi_{\mu_h}(\bar{m}_h). \quad (2.4)$$

Здесь аргументы χ имеют вид

$$m_h = m - s_h, \quad \bar{m}_h = m - \bar{s}_h,$$

где m — проекция внешнего фермионного конца, а s_h, \bar{s}_h — ее изменение до соответствующей вершины (рис. 1). Ограничиваясь вторым порядком по s_h, \bar{s}_h , можно написать

$$\chi_{\mu_h}(m_h) = \chi_{\mu_h}(m) - s_h \chi'_{\mu_h}(m) + 1/2 s_h^2 \chi''_{\mu_h}(m),$$

в результате чего (2.4) принимает вид

$$w = \sum_{(\mu)} \left\{ \prod_k \chi_k^2 - \sum_l (s_l + \bar{s}_l) \chi'_l \chi_l \prod_{k \neq l} \chi_k^2 + \frac{1}{2} \sum_l \left[(s_l^2 + \bar{s}_l^2) \chi''_l \chi_l + 2s_l \bar{s}_l \chi_l'^2 \right] \prod_{k \neq l} \chi_k^2 + \sum_{lp} (s_l + \bar{s}_l) (s_p + \bar{s}_p) \chi_l \chi_p \chi'_l \chi'_p \prod_{k \neq l, p} \chi_k^2 \right\} \quad (2.5)$$

(для сокращения записи положено $\chi_k = \chi_{\mu k}(m)$).

Из (2.3) с очевидностью вытекает

$$\sum_{\mu} \chi_{\mu}^2 = 1, \quad \sum_{\mu} \chi'_{\mu} \chi_{\mu} = 0, \quad \sum_{\mu} \chi''_{\mu} \chi_{\mu} = - \sum_{\mu} \chi_{\mu}'^2, \quad (2.6)$$

а с учетом симметрии $\chi_{\mu}(m) = (-1)^{\mu} \chi_{-\mu}(m + \mu)$ с точностью до членов второго порядка имеем также

$$\sum_{\mu} \mu \chi_{\mu}^2 \approx 0, \quad \sum_{\mu} \mu \chi'_{\mu} \chi_{\mu} \approx 0. \quad (2.6a)$$

Вследствие второго из соотношений (2.6) в (2.5) обращаются в нуль линейные по μ члены, а в силу (2.6a) — перекрестные члены, содержащие $\mu_k, \mu_l, k \neq l$ (следует иметь в виду, что s_k и \bar{s}_k среди своих слагаемых не содержат μ_k). После простого подсчета членов из (2.5) находим

$$w = 1 - N \sum_{\mu} \mu^2 \chi_{\mu}^2 \sum_{\mu'} \chi_{\mu'}'^2, \quad (2.7)$$

где N — полное число пересечений фоновых линий.

С принятой точностью выражение (2.7) эквивалентно

$$w_N = \left(1 - \sum_{\mu} \mu^2 \chi_{\mu}^2 \sum_{\mu'} \chi_{\mu'}'^2 \right)^N = w_1^N, \quad (2.7a)$$

поэтому для оценки достаточно вычислить w_1 . Вместо сумм (2.7a) можно непосредственно рассмотреть соответствующий график (с двумя пересекающимися фоновыми линиями), который пропорционален $6j$ -символу. Поэтому

$$w_1 = -(2j + 1) \left\{ \begin{matrix} j & 2 & j \\ j & 2 & j \end{matrix} \right\} \approx 1 - \frac{9}{j(j + 1)}. \quad (2.8)$$

Таким образом, дополнительный геометрический фактор, возникающий в случае квадрупольных фононов, при больших j мало отличается от единицы. Хотя, согласно (2.7) и (2.8), формальным параметром разложения является N / j^2 ; очевидно, что при графиках с большим N стоит более высокая степень параметра взаимодействия, так что, по существу, разложение идет по $N \beta^2 j^{-2}$. Мы, однако, не будем непосредственно суммировать графики теории возмущений, а используем приближенные соотношения типа Уорда. При этом нам потребуется лишь связь между графиками, отличающимися на одну фоновую линию. Различие такой связи для скалярных и квадрупольных фононов определяется лишь величиной порядка $\beta^2 j^{-2}$.

Аналогичным образом можно оценить графики со свободными фоновыми концами. Легко показать, что в этом случае малым параметром может быть $\beta^2 j^{-1}$.

3. Связь между функциями Грина и вершинными частями

Введем функции Грина, содержащие два фермионных и n фононных операторов:

$$X^{(n)}(\mu_1 t_1, \dots, \mu_n t_n | mt, m't') = -i \langle T \mathfrak{A}_{\mu_1}^{(+)}(t_1) \dots \mathfrak{A}_{\mu_n}^{(+)}(t_n) a_m(t) a_{m'}^+(t') \rangle. \quad (3.1)$$

Нашей задачей является получение приближенного соотношения между $X^{(n)}$ и функциями с меньшим числом фононов (обобщенные соотношения Уорда). Введем, наряду с (3.1), величину, получающуюся, при замене в $X^{(n+1)}$ одного из фононов парным фермионным оператором $b_{k\kappa}$:

$$Y_{k\kappa}^{(n)}(\tau | \mu_1 t_1, \dots, \mu_n t_n | mt, m't') = -i \langle T b_{k\kappa}(\tau) \mathfrak{A}_{\mu_1}^{(+)}(t_1) \dots \mathfrak{A}_{\mu_n}^{(+)}(t_n) a_m(t) a_{m'}^+(t') \rangle, \quad (3.2)$$

$$b_{k\kappa} = (2j+1)^{1/2} \sum_{mm'} (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & k & j \\ -m & \kappa & m' \end{pmatrix} a_{m'}^+ a_m. \quad (3.3)$$

Легко усмотреть, что при двукратном дифференцировании $X^{(n)}$ по времени одного из фононных операторов мы приходим к $Y_{k=2}^{(n-1)}$. Последнюю величину продифференцируем теперь по времени оператора b_2 , воспользовавшись уравнением движения

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} b_{k\kappa}(\tau) = [b_{k\kappa}, H] = 2\omega_0 \beta \sum_{k'\kappa'\mu} (2k'+1) \Delta^{(-)}(2kk') (-1)^{k-\kappa} \times \\ \times \begin{pmatrix} k & 2 & k' \\ -\kappa & \mu & \kappa' \end{pmatrix} b_{k'\kappa'}(\tau) \mathfrak{A}_{\mu}^{(+)}(\tau), \quad (3.4)$$

$$\Delta^{(\pm)}(abc) = \frac{1}{2} [1 \pm (-1)^{a+b+c}] \Delta(abc) = \\ = \frac{1}{2} [1 \pm (-1)^{a+b+c}] (2j+1)^{1/2} (-1)^b \begin{Bmatrix} a & b & c \\ j & j & j \end{Bmatrix}, \quad (3.5)$$

что приводит к величине $Y_k^{(n)}$. Нетрудно убедиться, что $6j$ -символ, входящий в (3.5), при больших j имеет порядок $j^{-1/2}$ для четной суммы $a+b+c$ и $j^{-3/2}$, когда эта сумма нечетна. Поэтому $\Delta^{(+)}$ есть величина порядка единицы, а $\Delta^{(-)}$ мала как j^{-1} .

Таким образом, в цепочке последовательных переходов $X^{(n)} \rightarrow Y^{(n-1)} \rightarrow Y^{(n)}$ на последнем этапе (т. е. при переходе к более высокому порядку) появляется малый множитель. Это дает возможность замкнуть систему уравнений, ограничиваясь определенным порядком по j^{-1} .

Дифференцирование введенных функций дает следующие точные соотношения ($1 \equiv (t_1, \mu_1)$):

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \omega_0^2 \right) X^{(n)}(1, \dots, n | mt, m't') = \\ = 2\omega_0^2 \beta Y_{2\mu_n}^{(n-1)}(t_n | 1, \dots, n-1 | mt, m't') + 2i\omega_0 \sum_{l=1}^{n-1} \delta(t_n - t_l) \times \\ \times (-1)^{\mu_l} \delta_{\mu_l, -\mu_n} X^{(n-2)}(1, \dots, l-1, l+1, \dots, n-1 | mt, m't'). \quad (3.6)$$

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} Y_{k\kappa}^{(n)}(\tau | 1, \dots, n | mt, m't') = -i \delta(\tau - t) (2j+1)^{1/2} \sum (-1)^{j-m''} \times \\ \times \begin{pmatrix} j & k & j \\ -m'' & \kappa & m \end{pmatrix} X^{(n)}(1, \dots, n | m''t, m't') + i \delta(\tau - t') (2j+1)^{1/2} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{m''} (-1)^{j-m'} \begin{pmatrix} j & k & j \\ -m' & \kappa & m'' \end{pmatrix} X^{(n)}(1, \dots, n | mt, m''t') + \\
& + 2\omega_0\beta \sum_{k'\kappa'\mu} (2k'+1) \Delta^{(-)}(2kk') (-1)^{k-\kappa} \begin{pmatrix} k & 2 & k' \\ -\kappa & \mu & \kappa' \end{pmatrix} \times \\
& \times Y_{k'\kappa'}^{(n+1)}(\tau | 1, \dots, n, \mu\tau | mt, m't'). \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Перейдем теперь к фурье-представлению согласно

$$\begin{aligned}
X^{(n)}(t_1, \dots, t_n | t, t') = \int \frac{d\omega_1 \dots d\omega_n d\varepsilon}{(2\pi)^{n+1}} \exp \left\{ -i \left[\sum_{l=1}^n \omega_l t_l + \right. \right. \\
\left. \left. + (\varepsilon - \Omega_n) t - \varepsilon t' \right] \right\} X^{(n)}(\omega_1, \dots, \omega_n | \varepsilon - \Omega_n, \varepsilon), \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y^{(n)}(\tau | t_1, \dots, t_n | t, t') = \int \frac{d\omega_1 \dots d\omega_n d\omega d\varepsilon}{(2\pi)^{n+2}} \exp \left\{ -i \left[\omega\tau + \sum_{l=1}^n \omega_l t_l + \right. \right. \\
\left. \left. + (\varepsilon - \omega - \Omega_n) t - \varepsilon t' \right] \right\} Y^{(n)}(\omega | \omega_1, \dots, \omega_n | \varepsilon - \omega - \Omega_n, \varepsilon), \quad \Omega_n = \sum_{l=1}^n \omega_l.
\end{aligned}$$

Удобно выделить зависимость от проекций моментов фермионных концов, положив

$$X^{(n)}(\dots | mm') = (2j+1)^{1/2} \sum_{L\lambda} (2L+1) (-1)^{j-m'} \begin{pmatrix} j & L & j \\ -m' & \lambda & m \end{pmatrix} X_{L\lambda}^{(n)}, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
Y_{k\kappa}^{(n)}(\dots | \dots | mm') = (2j+1)^{1/2} \sum_{L\lambda L'\lambda'} (2L+1) (2L'+1) (-1)^{j-m'} \times \\
\times \begin{pmatrix} j & L & j \\ -m' & \lambda & m \end{pmatrix} (-1)^{L-\lambda} \begin{pmatrix} L & k & L' \\ -\lambda & \kappa & \lambda' \end{pmatrix} Y_{kLL'\lambda'}^{(n)}.
\end{aligned}$$

В $Y_{kLL'\lambda'}$ величина L является моментом двух фермионных концов, а L' — суммарным моментом всех фононов. С учетом (3.8), (3.9) уравнения (3.6) (3.7) приводятся к виду ($1 \equiv (\mu_1 \omega_1)$)

$$\begin{aligned}
D^{-1}(\omega_n) X_{L\lambda}^{(n)}(1, \dots, n | \varepsilon - \Omega_n, \varepsilon) = \omega_0\beta \sum_{L'\lambda'} (2L'+1) (-1)^{L-\lambda} \times \\
\times \begin{pmatrix} L & 2 & L' \\ -\lambda & \mu_n & \lambda' \end{pmatrix} Y_{2LL'\lambda'}^{(n-1)}(\omega_n | 1, \dots, n-1 | \varepsilon - \Omega_n, \varepsilon) + \\
+ 2\pi i \sum_{l=1}^{n-1} \delta(\omega_l + \omega_n) (-1)^{\mu_l} \delta_{\mu_l, -\mu_n} \times \\
\times X_{L\lambda}^{(n-2)}(1, \dots, l-1, l+1, \dots, n-1 | \varepsilon - \Omega_n, \varepsilon), \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega Y_{kLL'\lambda'}^{(n)}(\omega | 1, \dots, n | \varepsilon - \omega - \Omega_n, \varepsilon) = i\Delta(kLL') [X_{L\lambda'}^{(n)}(1, \dots, n | \varepsilon - \Omega_n, \varepsilon) - \\
- (-1)^{k+L+L'} X_{L'\lambda'}^{(n)}(1, \dots, n | \varepsilon - \omega - \Omega_n, \varepsilon - \omega)] + \\
+ 2\omega_0\beta (-1)^{L+L'} \sum_{k'L''\lambda''\mu'} (2k'+1) (2L''+1) \Delta^{(-)}(k2k') (-1)^{L''-\lambda''} \times \\
\times \begin{pmatrix} L'' & 2 & L' \\ -\lambda'' & \mu' & \lambda' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'' & 2 & L' \\ k & L & k' \end{pmatrix} \times \\
\times \int \frac{d\omega'}{2\pi} Y_{k'LL''\lambda''}^{(n+1)}(\omega - \omega' | 1, \dots, n, \mu'\omega' | \varepsilon - \omega - \Omega_n, \varepsilon), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

где мы ввели функцию распространения фонона

$$D(\omega) = 2\omega_0 / (\omega^2 - \omega_0^2). \quad (3.12)$$

Несмотря на кажущуюся громоздкость, эти уравнения имеют весьма простую структуру и позволяют получить явные выражения для многофононных функций через функцию Грина нуклона:

$$X_{L\lambda}^{(0)}(|\epsilon, \epsilon) = \delta_{L0}\delta_{\lambda 0}G(\epsilon). \quad (3.13)$$

Проведем вычисления для некоторых важных частных случаев.

Случай 1:



Эта величина связана с точной фонон-нуклонной вершинной частью $\Gamma(\epsilon - \omega, \epsilon)$ соотношением

$$X_{L\lambda}^{(1)}(\mu\omega | \epsilon - \omega, \epsilon) = 1/5 i\omega_0\beta\delta_{L2}\delta_{\lambda\mu}D(\omega)G(\epsilon - \omega)\Gamma(\epsilon - \omega, \epsilon)G(\epsilon). \quad (3.14)$$

Если полностью пренебречь малыми членами (содержащими $\Delta^{(-)}$ в (3.11)), то получим замкнутую систему уравнений для $X^{(1)}$ и $Y^{(0)}$. Исключая $Y^{(0)}$ и учитывая (3.13) и (3.14), найдем

$$\Gamma(\epsilon - \omega, \epsilon) = \omega^{-1}[G^{-1}(\epsilon) - G^{-1}(\epsilon - \omega)], \quad (3.15)$$

что совпадает с точным разностным соотношением Уорда для скалярных фононов.

При вычислении поправок к соотношению (3.15) мы должны удерживать в уравнениях (3.10), (3.11) члены следующих порядков. Как было отмечено выше, малым параметром служит величина $\Delta^{(-)}$. Она явно входит в последний член (3.11), но, кроме того, содержится и в величине $\Delta = \Delta^{(+)} + \Delta^{(-)}$. Поэтому в ходе вычислений может возникать дополнительная малость. Так, в рассматриваемом случае поправки первого порядка исчезают и необходимо учесть все члены, квадратичные по $\Delta^{(-)}$. Полученную систему уравнений легко свести к одному уравнению относительно $X_{2\lambda}^{(1)}$ (индексы 2λ опускаем):

$$D^{-1}(\omega)X^{(1)}(\omega | \epsilon - \omega, \epsilon) = \frac{i}{5}\beta\frac{\omega_0}{\omega}[G(\epsilon - \omega) - G(\epsilon)] \times \\ \times \left\{ 1 + r2\beta^2\frac{\omega_0^2}{\omega} \frac{id\omega'}{2\pi(\omega - \omega')}D(\omega') \right\} - r\beta^2\frac{\omega_0^2}{\omega} \int \frac{id\omega'}{2\pi(\omega - \omega')} \times \\ \times [X^{(1)}(\omega' | \epsilon - \omega', \epsilon) + X^{(1)}(\omega' | \epsilon - \omega, \epsilon - \omega + \omega')], \quad (3.16)$$

где введено обозначение для малого параметра, получающегося при суммировании $6j$ -символов (см. (3.5) и (2.8)):

$$r = 2 \sum_k (2k + 1)[\Delta^{(-)}(22k)]^2 = 1 - w_1. \quad (3.17)$$

При интегрировании по ω' в последнем члене (3.16) используем аналитические свойства функций Грина. Полюса входящих в (3.14) функций $G(\epsilon - \omega)$ и $\Gamma(\epsilon - \omega, \epsilon)$ лежат в верхней полуплоскости переменной ω . Поэтому интегрирование можно провести в общем виде. Особенность при $\omega' = \omega$ удобно понимать в смысле главного значения. Тогда каждый из членов (3.16) в отдельности конечен при $\omega \rightarrow 0$ (другой способ обхода приводит, естественно, к тому же окончательному результату, так как при $\omega \rightarrow 0$ особенности в разных членах (3.16) компенсируются). Используя

соотношения (3.12), (3.14) и производя интегрирование, получим для последнего члена в (3.16) выражение

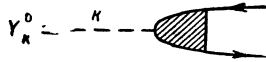
$$-\frac{1}{5} r \beta^2 \frac{\omega_0^2}{\omega} \left[\frac{1}{\omega - \omega_0} G(\varepsilon) G(\varepsilon - \omega_0) \Gamma(\varepsilon - \omega_0, \varepsilon) + \frac{1}{\omega + \omega_0} G(\varepsilon - \omega) G(\varepsilon - \omega - \omega_0) \Gamma(\varepsilon - \omega, \varepsilon - \omega - \omega_0) \right].$$

Сюда мы можем подставить для Γ нулевое приближение (3.15). После простых преобразований окончательно получаем

$$\Gamma(\varepsilon - \omega, \varepsilon) = \frac{1}{\omega} [G^{-1}(\varepsilon) - G^{-1}(\varepsilon - \omega)] - r \beta^2 \frac{\omega_0}{\omega} G^{-1}(\varepsilon) G^{-1}(\varepsilon - \omega) \times \times \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0} [G(\varepsilon - \omega_0) - G(\varepsilon - \omega)] - \frac{1}{\omega + \omega_0} [G(\varepsilon) - G(\varepsilon - \omega - \omega_0)] \right\}. \quad (3.18)$$

Приближенное соотношение (3.18) является обобщением тождества Уорда для квадрупольных фононов. Ниже приводятся результаты для других функций Грина (вычисления приводятся аналогичным образом).

Случай 2:



Это — величина, определяющая взаимодействие системы с внешним полем мультипольности k . Уравнение для $Y_k^{(0)}$ получается одновременно с (3.18):

$$Y_k^{(0)}(\omega \parallel \varepsilon - \omega, \varepsilon) = \frac{1}{\omega} [G(\varepsilon) - G(\varepsilon - \omega)] + r_k \beta^2 \frac{\omega_0^2}{\omega} \times \times \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0} [G(\varepsilon - \omega_0) - G(\varepsilon - \omega)] - \frac{1}{\omega + \omega_0} [G(\varepsilon) - G(\varepsilon - \omega_0 - \omega)] \right\}. \quad (3.19)$$

Здесь малый параметр r_k является обобщением (3.17):

$$r_k = 1 + (-1)^k (2j + 1) \begin{Bmatrix} j & k & j \\ j & 2 & j \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} \frac{k(k+1)}{j(j+1)} + O\left(\frac{k^4}{j^4}\right). \quad (3.20)$$

При $k = 2$ величина $Y^{(0)}$ связана с фонон-нуклонной вершинной частью (3.18) соотношением

$$Y^{(0)}(\omega \parallel \varepsilon - \omega, \varepsilon) = -G(\varepsilon - \omega) \Gamma(\varepsilon - \omega, \varepsilon) G(\varepsilon), \quad (3.21)$$

которое справедливо и в общем случае, если под Γ понимать вершину взаимодействия с внешним полем (при единичном затравочном взаимодействии).

Случай 3:

$$Y_{\kappa L L' \lambda}^{(1)} = \delta_{L' 2} \delta_{2 \mu_1} Y_{\kappa L}^{(1)} =$$

Здесь отличны от нуля поправки первого порядка, ограничиваясь которыми, находим

$$Y_{kL}^{(4)}(\omega | \omega_1 | \varepsilon - \omega - \omega_1, \varepsilon) = \frac{1}{5} \beta \Delta^{(+)}(kL \cdot 2) \frac{\omega_0 D(\omega_1)}{\omega \omega_1} [G(\varepsilon) - G(\varepsilon - \omega_1) - G(\varepsilon - \omega) + G(\varepsilon - \omega - \omega_1)] + \frac{1}{5} \beta \Delta^{(-)}(kL \cdot 2) \frac{\omega_0 D(\omega_1)}{\omega \omega_1} \times \left\{ \frac{\omega - \omega_1}{\omega + \omega_1} [G(\varepsilon) - G(\varepsilon - \omega - \omega_1)] + G(\varepsilon - \omega) - G(\varepsilon - \omega_1) \right\}. \quad (3.22)$$

Используя (3.22), можно найти аналогичную величину, где фиксирован полный момент не в аннигиляционном канале (L), а в канале нуклон — фотон (J):

$$Y_{kJ}^{(1)}(\omega, \varepsilon - \omega | \omega, \varepsilon - \omega_1) = \begin{array}{c} \leftarrow \omega \quad k \\ \leftarrow \varepsilon - \omega \quad \leftarrow \varepsilon - \omega_1 \end{array} \leftarrow J = \\ = 5 \sum_L (2L+1)(-1)^{j+J+L} \left\{ \begin{array}{c} \kappa \quad 2 \quad L \\ j \quad j \quad j \end{array} \right\} Y_{kL}^{(1)}(\omega | -\omega, \varepsilon - \omega, \varepsilon - \omega_1). \quad (3.23)$$

Значение $J = j$ в (3.23) оказывается выделенным, что естественно, так как в $Y_{kj}^{(1)}$ дают вклад чисто нуклонные (бесфотонные) состояния. Поправки первого порядка тогда обращаются в нуль, поэтому необходимо учитывать в $Y_{kL}^{(1)}$ члены второго порядка. Мы ограничимся случаем $J \neq j$, для которого находим

$$Y_{kJ}^{(1)}(\omega, \varepsilon - \omega | \omega_1, \varepsilon - \omega_1) = -\beta r_k(J) \frac{\omega_0 D(\omega_1)}{\omega \omega_1} \times \left[\frac{\omega}{\omega - \omega_1} G(\varepsilon - \omega) - \frac{\omega_1}{\omega - \omega_1} G(\varepsilon - \omega_1) - G(\varepsilon - \omega - \omega_1) \right]. \quad (3.24)$$

Здесь введено обозначение

$$r_k(J) = (-1)^k (2j+1) \left\{ \begin{array}{c} k \quad j \quad J \\ 2 \quad j \quad j \end{array} \right\}. \quad (3.25)$$

Эта величина при $J \neq j$ является малой, причем $r = O(j^{-1})$ для $J = j \pm 1$ и $r = O(j^{-2})$ для $J = j \pm 2$.

Случай 4:

$$X_{L\lambda}^{(\varepsilon)} = 5(-1)^{L-\lambda} \left(\begin{array}{c} L \quad 2 \quad 2 \\ -\lambda \quad \mu_2 \quad \mu_1 \end{array} \right) X_L^{(2)} = \begin{array}{c} \leftarrow \omega_1 \mu_1 \\ \leftarrow \omega_2 \mu_2 \end{array} \left[\text{Diagram} \right] \begin{array}{c} \leftarrow \varepsilon \\ \leftarrow L \\ \leftarrow \varepsilon - \omega_1 - \omega_2 \end{array} \quad (3.26)$$

Не зависящая от проекций величина $X_L^{(2)}$ может быть выражена через $Y_{2L}^{(1)}$ (см. (3.22)):

$$X_L^{(2)}(\omega_1 \omega_2 | \varepsilon - \omega_1 - \omega_2, \varepsilon) = 2\pi i \delta(\omega_1 + \omega_2) \delta_{L0} \frac{1}{\sqrt{5}} D(\omega_2) G(\varepsilon) + \beta \omega_0 D(\omega_2) Y_{2L}^{(1)}(\omega_2 | \omega_1 | \varepsilon - \omega_1 - \omega_2, \varepsilon). \quad (3.27)$$

Для получения функции Грина системы нуклон — фотон с суммарным моментом J следует перейти к другому каналу посредством соотношения,

аналогичного (3.23). В результате при $J \neq j$ для указанной функции находим

$$\begin{aligned}
 X_J^{(2)}(\omega_2, \varepsilon - \omega_2 | \omega_1, \varepsilon - \omega_1) &= \begin{array}{c} \xrightarrow{\omega_2} \text{---} \text{---} \text{---} \xrightarrow{\omega_1} \\ \xleftarrow{\varepsilon - \omega_2} \text{---} \text{---} \text{---} \xleftarrow{\varepsilon - \omega_1} \end{array} \leftarrow J = \\
 (J \neq j) & \\
 &= 2\pi i \delta(\omega_1 - \omega_2) D(\omega_1) G(\varepsilon - \omega_1) + \beta \omega_0 D(\omega_2) Y_{2J}^{(1)}(\omega_2, \varepsilon - \omega_2 | \omega_1, \varepsilon - \omega_1).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

4. Система основных уравнений

Определяя собственно энергетическую часть $M(\varepsilon)$, имеем два соотношения:

$$G = G^0 + G^0 M G, \tag{4.1}$$

$$M = \beta^2 \omega_0^2 G \Gamma D. \tag{4.2}$$

Функция Грина $G_J(\varepsilon)$ в принципе описывает состояния системы с произвольным моментом J . Между тем, если понимать гамильтониан (2.1) буквально, то нулевая функция Грина $G_J^0(\varepsilon)$ существует только для $J = j$. Мы можем, однако, воспользоваться искусственным приемом [4], который позволит найти из уравнений (4.1), (4.2) состояния с произвольным моментом J . Будем считать, что кроме основного уровня с $J = j$ существует уровень с другим моментом, куда возможен переход нуклона с основного уровня при поглощении фонана. Соответствующая затравочная вершина $\Gamma^0(j, J)$ аналогична (2.2). Энергию E_J^0 этого уровня можно считать сколь угодно большой, поэтому переходы на этот уровень не будут давать вклада в физические величины. Тогда из уравнения (4.1) можно заключить, что низколежащие полюса G_J близки к полюсам M_J . В окрестности близких полюсов G_J и M_J имеют вид

$$G_J \approx \frac{a(J)}{\varepsilon - E(J)}, \quad M_J \approx \omega_0^2 \frac{m(J)}{\varepsilon - \mathcal{E}(J)}. \tag{4.3}$$

Используя $G_J^0 = (\varepsilon - E_J^0)^{-1}$ и подставляя (4.3) в (4.1), найдем соотношения между полюсами и вычетами G_J и M_J при $E_J^0 \rightarrow \infty$:

$$E(J) = \mathcal{E}(J) - \omega_0^2 m(J) E_J^{0-1}, \quad a(J) = \omega_0^2 m(J) E_J^{0-2}. \tag{4.4}$$

Таким образом, энергетический спектр уровней с моментом $J \neq j$ можно находить из полюсов собственно энергетической части M_J . Эта величина определяется совокупностью графиков типа рис. 1, где все внутренние фермионные линии отвечают состоянию с моментом j и лишь на выходе фонов и нуклон связываются в момент J . Поэтому уравнение (4.2) запишется как

$$M_J(\varepsilon) = \beta^2 \omega_0^2 i \int \frac{d\omega}{2\pi} G_j(\varepsilon - \omega) \Gamma(j, \varepsilon - \omega; J, \varepsilon) D(\omega). \tag{4.5}$$

Здесь $\Gamma(j, J) \equiv \Gamma_J$ — точная вершина, связывающая нуклон и фонов в полный момент J .

Интегрирование в (4.5) можно провести явно, замыкая контур в нижнюю полуплоскость и пользуясь тем, что полюса G и Γ лежат в верхней полуплоскости переменной ω . Операция интегрирования при этом сводится к замене ω на ω_0 в аргументах $G_j \equiv G$ и Γ :

$$M_J(\varepsilon) = \beta^2 \omega_0 G(\varepsilon - \omega_0) \Gamma_J(\varepsilon - \omega_0, \varepsilon). \tag{4.6}$$

Это соотношение, естественно, справедливо и при $J = j$. Уравнение для

$\Gamma_{J \neq j}$ имеет вид

т. е. Γ_J выражается через фонон-нуклонную функцию Грина $X_J^{(2)}$ (см. (3.28)):

$$\Gamma_J(\varepsilon - \omega, \varepsilon) = -D^{-1}(\omega)G^{-1}(\varepsilon - \omega) \int \frac{id\omega'}{2\pi} X_J^{(2)}(\omega, \varepsilon - \omega | \omega', \varepsilon - \omega'). \quad (4.7)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений, используем теперь приближенные соотношения, полученные в предыдущем разделе. Используя (3.24) и (3.28), находим

$$\Gamma_J(\varepsilon - \omega, \varepsilon) = 1 + \beta^2 \frac{\omega_0^2}{\omega} r_2(J) \left\{ \frac{1}{\omega_0} [1 - G^{-1}(\varepsilon - \omega)G(\varepsilon - \omega - \omega_0)] + \frac{1}{\omega - \omega_0} [1 - G^{-1}(\varepsilon - \omega)G^{-1}(\varepsilon - \omega_0)] \right\}. \quad (4.8)$$

Таким образом, характеристики уровней с моментами $J \neq j$ выражаются через функции Грина для момента $J = j$. Ниже все величины без явно выписанного момента относятся к состоянию $J = j$.

Прежде чем переходить к решению уравнений, сделаем одно существенное замечание. Правые части (3.18), (4.8) получены формальным разложением по малому параметру. Для функций с полюсными особенностями такие разложения неправомерны вблизи полюсов. Между тем в функциях Грина и вершинных частях нас интересуют именно окрестности полюсов. Важно, однако, что кроме разложений (3.18), (4.8) нам известна из общих принципов аналитическая структура G , M и Γ , что позволяет найти эти функции также и вблизи полюсов. (Для пояснения рассмотрим уравнение (4.1) при формальном разложении G по взаимодействию: $G = G^0 + G^0 M G^0$. Понимаемое буквально, это равенство не имеет смысла. Но, если мы знаем, что G имеет только простые полюса и, следовательно, двойной полюс в члене $G^0 M G^0$ происходит от разложения полюсного члена, то мы однозначно найдем поправку к G .)

Функция Грина, собственно энергетическая часть и вершина представляются в виде

$$G(\varepsilon) = \sum_{n=0} \frac{a_n}{\varepsilon - E_n}, \quad (4.9)$$

$$M(\varepsilon) = \omega_0^2 \sum_{n=1} \frac{m_n}{\varepsilon - \mathcal{E}_n}, \quad (4.10)$$

$$\Gamma(\varepsilon - \omega, \varepsilon) = 1 + \sum_{n=1} \left\{ \frac{\gamma_n(\omega)}{\varepsilon - \omega - \mathcal{E}_n} + \frac{\gamma_n(-\omega)}{\varepsilon - \mathcal{E}_n} \right\}, \quad (4.11)$$

где для определенности будем считать, что полюса E_n и \mathcal{E}_n возрастают с номером n . Из уравнения Дайсона (4.1) можно получить ряд общих соотношений для полюсов и вычетов G и M , в частности,

$$\sum_{n=0} a_n = 1, \quad \sum_{n=0} a_n E_n = E, \quad \omega_0^2 \sum_{n'=1} m_{n'} = \sum_{n=0} a_n E_n^2 - E^2, \quad (4.12)$$

$$E_n = E - \omega_0^2 \sum_{n'=1} \frac{m_{n'}}{\mathcal{E}_{n'} - E_n}, \quad \sum_{n=0} \frac{a_n}{\mathcal{E}_{n'} - E_n} = 0.$$

Для иллюстрации метода решения рассмотрим уравнения нулевого приближения для состояний с $J = j$. Исключая M и Γ из (4.1), (4.6) и (3.18) (при $r = 0$), получим уравнение, определяющее одночастичную функцию Грина:

$$(\varepsilon - E + \beta^2 \omega_0) G(\varepsilon) = 1 + \beta^2 \omega_0 G(\varepsilon - \omega_0). \quad (4.13)$$

Легко получить [4] решение этого функционального уравнения. После подстановки (4.9) в уравнение (4.13) правая и левая части представляются в виде постоянных слагаемых и полюсных членов:

$$\sum_{n=0} a_n + \sum_{n=0} \frac{a_n (E_n - E + \beta^2 \omega_0)}{\varepsilon - E_n} = 1 + \beta^2 \omega_0 \sum_{n=0} \frac{a_n}{\varepsilon - E_n - \omega_0}. \quad (4.14)$$

Полюс при $\varepsilon = E_n$ в левой части (4.14) не может быть скомпенсирован, поэтому его вычет должен обращаться в нуль. Все остальные полюса при $\varepsilon = E_{n>0}$ компенсируются полюсами правой части при $\varepsilon = E_{n-1} + \omega_0$. Приравнявая вычеты в этих полюсах и неполюсные слагаемые, получаем

$$E_0 = E - \beta^2 \omega_0, \quad E_n = E_{n-1} + \omega_0 = E_0 + n \omega_0 = E + (n - \beta^2) \omega_0, \quad (4.15)$$

$$\sum_{n=0} a_n = 1, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\beta^2 \omega_0}{E_n - E + \beta^2 \omega_0} = \frac{\beta^2}{n}. \quad (4.16)$$

Из (4.16) находим значения вычетов

$$a_n = e^{-\beta^2} \beta^{2n} / n!. \quad (4.17)$$

Знание аналитической структуры неизвестных функций позволяет и в общем случае свести функциональные уравнения к простым рекуррентным соотношениям для параметров (положение полюсов и вычеты). Ниже мы найдем характеристики спектра с учетом первых поправок по малому параметру r .

5. Энергетический спектр нечетного ядра

Уровни с моментом $J = j$. Как видно из (4.6), для нахождения функции Грина достаточно знать лишь величину вершинной части Γ при $\omega = \omega_0$. В правой части (3.18) при $\omega \rightarrow \omega_0$ следует раскрыть неопределенность. Исключая затем Γ и M из (4.1) и (4.6), найдем

$$\begin{aligned} & (\varepsilon - E + \beta^2 \omega_0) G(\varepsilon) = 1 + \beta^2 \omega_0 G(\varepsilon - \omega_0) - \\ & - \frac{1}{2} \beta^4 \omega_0 r [G(\varepsilon - \omega_0) - G(\varepsilon)] + \frac{1}{2} \beta^2 r [(\varepsilon - E - \omega_0) G(\varepsilon - \omega_0) - 1] + \\ & + \beta^4 r \omega_0^2 \left[\frac{d}{d\omega} G(\varepsilon - \omega) \right]_{\omega=\omega_0}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Решение этого уравнения ищем в виде (4.9), где полюса E_n и вычеты a_n отличаются от (4.15) и (4.16) на малые величины порядка r , после чего производим формальное разложение всех членов уравнения, ограничиваясь первой степенью r . В результате уравнение будет содержать неполюсные слагаемые, а также суммы по однократным и двукратным полюсам. Приравнявая соответствующие члены (ср. (4.14)), найдем поправки порядка r к полюсам и вычетам функции Грина $G(\varepsilon)$:

$$E_n = E - \beta^2 \omega_0 \left(1 - \frac{r}{2} \beta^2 \right) + n \omega_0 (1 + r \beta^2), \quad (5.2)$$

$$a_n = e^{-\beta^2} \frac{\beta^{2n}}{n!} \left[1 + \frac{5}{4} r \beta^4 - r n \beta^2 - \frac{r}{4} n(n-1) \right]. \quad (5.3)$$

Как видно из (5.2), спектр уровней с моментом $J = j$ остается эквидистантным также и в этом порядке, однако теперь расстояния между уровнями отличаются от энергии фонона ω_0 . Поправки к вычетам определяются тремя различными членами. Для полюсов в области максимальных вычетов ($n \sim \bar{n} = \beta^2$) все три члена имеют один и тот же порядок. Для далеких полюсов ($n \gg \bar{n}$) последний член в (5.3) значительно больше остальных. Когда этот член становится порядка единицы ($rn^2 \sim 1$), формула (5.3) становится неприменимой. Этот факт, однако, не является существенным, так как далекие полюса имеют пренебрежимо малые вычеты. Как следует из (5.2) и (5.3), малым параметром фактически является $r\beta^4$. Однако в расстояние между уровнями входит параметр $r\beta^2$.

Уровни с другими моментами ($J \neq j$). Для их нахождения следует рассматривать соотношения (4.6) и (4.8), из которых, аналогично (5.1), выразим $M_J(\varepsilon)$ через известную функцию Грина $G_j(\varepsilon)$:

$$M_J(\varepsilon) = \beta^2 \omega_0 G(\varepsilon - \omega_0) [1 + \beta^2 r_2(J)] - \beta^4 \omega_0^3 r_2(J) \left\{ \frac{1}{\omega_0} G(\varepsilon - 2\omega_0) - \left[\frac{dG(\varepsilon - \omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_0} \right\}. \quad (5.4)$$

В правой части (5.4) стоит известное выражение. Кроме явно входящего малого параметра $r_2(J)$ полюса и вычеты G содержат также малые члены порядка r (см. (5.2), (5.3)). Подставляя в (5.4) разложение (4.9), (4.10), разлагая формально по малым параметрам и приравнивая члены одинаковой структуры, найдем для полюсов и вычетов M_J ($n \geq 1$):

$$E_n(J) = E_{n-1} + \omega_0 + \beta^2 \omega_0 r_2(J), \quad (5.5)$$

$$m_n(J) = \beta^2 a_{n-1} - \beta^4 r_2(J) (a_{n-2} - a_{n-1}), \quad (5.6)$$

где E_n и a_n — полюса и вычеты функции Грина G_j — даются формулами (5.2), (5.3).

Таким образом, в отличие от скалярных фононов, появляются дополнительные серии одинаково эквидистантных (см. (5.5)) уровней с моментами $J = j \pm 1, j \pm 2$, сдвинутых относительно друг друга. Найденный спектр не исчерпывает всего многообразия уровней системы. В частности, у нас отсутствуют состояния, для которых $|J - j| > 2$. В такие уровни не дают вклада бесфононные и однофононные состояния, поэтому они могут быть найдены только из полюсов более высоких функций Грина (например, функции для нуклона и двух фононов $X^{(4)}$). Спектр этих состояний начинается вблизи $2\omega_0$.

6. Средние значения одночастичных операторов и вероятности переходов

Рассмотрим процессы, происходящие в системе под действием внешнего поля. Пусть взаимодействие с внешним полем (мультипольности k) имеет вид

$$H^{(k)} = \sum_{\kappa} \varphi_{k\kappa}^* b_{k\kappa} (jj'), \quad (6.1)$$

где $\varphi_{k\kappa}$ характеризует внешнее поле, а $b_{k\kappa}$ — парный оператор, где в отличие от (3.3), моменты α^+ и α могут быть различными. Приведенная вероятность перехода между состояниями i, f определяется через соответствующую (нормированную на единицу) вершину \mathcal{J}^k [5]:

$$W_{i \rightarrow f}^{(k)} = \sum_{\kappa} |\varphi_{k\kappa}|^2 a_i a_f |\mathcal{J}^k(E_f, E_i)|^2, \quad (6.2)$$

где a_i, f — вычеты в полюсах $\varepsilon = E_i, f$ соответствующих одночастичных функций Грина.

Для переходов между состояниями с одинаковыми моментами $J_i = J_f = j$ вершина $\mathcal{F}^{(k)}$ выражается через $Y_k^{(j)}$ (ср. (3.21)):

$$\mathcal{F}^{(k)}(\varepsilon - \omega, \varepsilon) = -G^{-1}(\varepsilon - \omega) Y_k^{(j)}(\omega | \varepsilon - \omega, \varepsilon) G^{-1}(\varepsilon). \quad (6.3)$$

Для переходов с изменением момента ($J_i = J \neq j, J_f = j$) вершину можно связать с $Y_{kj}^{(1)}$ (см. аналогичный вывод для $\Gamma_j(4.7)$):

$$\mathcal{F}_J^{(k)}(\varepsilon - \omega, \varepsilon) = 1 - \beta \omega_0 G^{-1}(\varepsilon - \omega) \int \frac{id\omega'}{2\pi} Y_{kJ}^{(1)}(\omega, \varepsilon - \omega | \omega', \varepsilon - \omega').$$

Используя выражение (3.24) для $Y_{kJ}^{(1)}$ и производя интегрирование, найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J^{(k)}(\varepsilon - \omega, \varepsilon) &= 1 + \beta^2 r_k(J) \frac{\omega_0}{\omega} G^{-1}(\varepsilon - \omega) \times \\ &\times \left[\frac{\omega}{\omega - \omega_0} G(\varepsilon - \omega) - \frac{\omega_0}{\omega - \omega_0} G(\varepsilon - \omega_0) - G(\varepsilon - \omega - \omega_0) \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Переходы между состояниями $J_i = J_f = j$. В формулу (6.2) для вероятности входит значение $\mathcal{F}^{(k)}$ при физических значениях аргументов. Правая часть (6.3) с учетом (3.19) при этом содержит неопределенность. Удобно сначала зафиксировать значение переменной $\varepsilon = E_i$, оставив ω произвольным. Принимая во внимание, что $G^{-1}(E_i) \rightarrow 0$, а в малых членах, содержащих r_k , следует считать

$$G^{-1}(E_i) G(E_i - \omega_0) \rightarrow a_{i-1} / a_i,$$

получим ²⁾

$$\mathcal{F}^{(k)}(E_i - \omega, E_i) = - \frac{G^{-1}(E_i - \omega)}{\omega} \left[1 - \beta^2 r_k \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{1}{\omega + \omega_0} - \frac{1}{\omega - \omega_0} \frac{a_{i-1}}{a_i} \right) \right]. \quad (6.5)$$

Теперь мы должны положить ω равной энергии перехода $\omega_{if} = E_i - E_f$. При этом $G^{-1}(E_i - \omega) \rightarrow 0$, и конечный результат может получиться только от комбинации

$$r_k(\omega - \omega_0)^{-1} G^{-1}(E_i - \omega) \rightarrow -r_k / a_{i-1},$$

откуда следует, что в рассматриваемом порядке отличные от нуля переходы будут только между соседними состояниями. Для этих переходов

$$\mathcal{F}^{(k)}(E_{n-1}, E_n) = \beta^2 \frac{r_k}{a_n}, \quad (6.6)$$

и для приведенной вероятности находим (см. (4.17))

$$W_{n, j \rightarrow n-1, j}^{(k)} = \sum_x |\varphi_{kx}|^2 \frac{a_{n-1}}{a_n} \beta^4 r_k^2 = n \sum_x |\varphi_{kx}|^2 \beta^2 r_k^2. \quad (6.7)$$

Выражение (6.5) позволяет найти также средние значения одночастичных операторов. Положим в (6.5) $\omega = 0$. Учитывая, что при этом $\omega G(E_i - \omega) \rightarrow -a_i$, найдем

$$\mathcal{F}^{(k)}(E_n, E_n) = \frac{1}{a_n} \left[1 - \beta^2 r_k \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \right]. \quad (6.8)$$

Второй член в квадратных скобках (6.8) связан с изменением матрицы плотности во внешнем поле. Для среднего значения одночастичного опе-

²⁾ Формально $G(\varepsilon - \omega_0)$ при $\varepsilon \rightarrow E_i$ не обращается в бесконечность, так как $E_i - \omega_0$ не совпадает с точным полюсом G . Однако в членах, содержащих малый параметр r , необходимо пренебрегать разностью $E_i - E_{i-1} - \omega_0$. Строго полученный результат можно обосновать, приводя обе части (6.3) к одинаковой аналитической структуре.

ратора Q_k получаем [5]

$$\langle Q_k \rangle_{jn} = \langle Q_k \rangle + \langle Q_k \rangle_j^{(0)} \left[1 - \beta^2 r_k \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \right]. \quad (6.9)$$

Здесь $\langle Q_k \rangle$ — среднее значение оператора Q_k в четном ядре, а $\langle Q_k \rangle_j^{(0)}$ — среднее в нечетном ядре при отсутствии коллективных возбуждений (одночастичное значение).

Переходы между состояниями с различными моментами $J_i = J \neq j$, $J_f = j$. Положим в (6.4) $\varepsilon - \omega \rightarrow E_f$, считая пока ω произвольным. Тогда, аналогично (6.5), получим

$$\mathcal{F}_J^{(k)}(E_f, E_f + \omega) = 1 + \beta^2 r_k(J) \frac{\omega_0}{\omega} \left(\frac{\omega}{\omega - \omega_0} - \frac{a_{f-1}}{a_f} \right). \quad (6.10)$$

Как видно из (6.2), вероятность перехода содержит вычет функции Грина $a_i \rightarrow a_i(J)$, который, согласно (4.4), обратно пропорционален квадрату энергии $E_L^0 \rightarrow \infty$ фиктивного одночастичного уровня с моментом $J \neq j$. Эта малость может быть компенсирована членом в \mathcal{F}_k , содержащим в знаменателе разность (см. (4.4) и (5.5))

$$\omega_{if} - \omega_0 = E_i(J) - E_f(j) - \omega_0 \approx E_{i-1}(j) - E_f(j) - m_i(J)/E_J^0 \quad (6.11)$$

(членами, содержащими r , здесь следует пренебречь). Для переходов между соседними состояниями ($f = i - 1$) имеем $\omega_{if} - \omega_0 \sim (E_J^0)^{-1}$, так что вероятность перехода оказывается конечной при $E \rightarrow \infty$ (для остальных переходов в рассматриваемом приближении по r вероятность обращается в нуль). Используя (6.10) и (6.11) и выражая вычет $m(J)$ согласно (5.6), найдем

$$W_{n, J \rightarrow n-1, j}^{(k)} = \sum_{\kappa} |\varphi_{k\kappa}|^2 \beta^2 r_k^2(J). \quad (6.12)$$

Это выражение отличается от (6.7) отсутствием множителя n . В обоих случаях вероятности малы ($\sim r^2$).

7. Взаимодействие внешнего поля с фононами

До сих пор мы учитывали только связь внешнего поля с фермионами (рис. 2, а). В общем случае внешнее поле может действовать также на фононы (рис. 2, б, в). Строго говоря, оба графика (б и в) могут быть по-

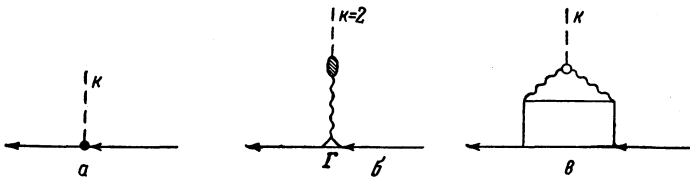


Рис. 2

лучены из прямого взаимодействия внешнего поля с фермионами при учете замкнутых фермионных петель. Однако наш исходный гамильтониан не содержит соответствующих членов. Поэтому мы должны включить непосредственную связь внешнего поля с фононами. Мы учтем два типа связи, отвечающие рождению и рассеянию фонона внешним полем:

$$H_6 = \sum_{\mu} \Phi_{\mu}^* \mathcal{A}_{\mu}^{(+)}, \quad (7.1a)$$

$$H_B^{(k)} = \sum_{\kappa \mu \mu'} \Phi_{k\kappa} \begin{pmatrix} 2 & k & 2 \\ -\mu & \kappa & \mu' \end{pmatrix} (-1)^{\mu} \mathcal{A}_{\mu} \mathcal{A}_{\mu'}. \quad (7.1b)$$

Первый эффект (7.1а) возможен лишь в поле квадрупольной симметрии ($k = 2$); примером второго типа может служить связь фонона с внешним магнитным полем ($k = 1$, затравочным зарядом является гиромангнитное отношение фонона).

E_2 -переходы между состояниями с одинаковыми моментами ($J_i = J_f = j$). Для E_2 -переходов основную роль играет график рис. 2, б. Эффективная вершина взаимодействия внешнего поля с фермионом, определяющая вероятность перехода (6.2), имеет вид

$$\Phi_\mu \mathcal{F} \rightarrow \Phi_\mu D_\beta \Gamma. \quad (7.2)$$

Фонон-нуклонная вершинная часть Γ определена в (3.18) и, согласно (3.21), совпадает с вершиной прямого взаимодействия внешнего поля с фермионом $\mathcal{F}^{(k=2)}$. Выражение для $\mathcal{F}^{(2)}$ было найдено выше; при физических значениях аргументов эта величина имеет первый порядок по r (см. (6.6)). Поэтому, вообще говоря, вероятность перехода оказывается, как и в (6.7), малой ($\sim r^2$). Однако, если энергия перехода ω_{if} близка к энергии фонона, малость Γ может компенсироваться (для переходов между соседними уровнями) в (7.2) большой величиной $D(\omega)$ (в нулевом порядке по r величина $\Gamma \rightarrow 0$, но $D \rightarrow \infty$).

Вследствие указанной компенсации, найденное выше (6.6) приближение для $\Gamma = \mathcal{F}^{(2)}$ позволяет вычислить вероятность этих основных переходов лишь в нулевом порядке. Результат при этом оказывается тривиальным: он совпадает с соответствующим выражением в четном ядре. Для нахождения поправок порядка r в вероятности необходимо найти члены порядка r^2 в Γ . Прямое вычисление этих членов весьма громоздко. Однако мы можем определить их, воспользовавшись следующим искусственным приемом. Зафиксируем в Γ переменную $\varepsilon = E_i$, после чего для функции $\Gamma(E_i - \omega, E_i) \equiv \Gamma_i(\omega)$ можно написать

$$\Gamma_i(\omega) = \Gamma_i(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \dot{\Gamma}_i(\omega) - 1/2 (\omega - \omega_0)^2 \ddot{\Gamma}_i(\omega) \quad (7.3)$$

(точка означает дифференцирование по ω). Для ω , равной энергии перехода $\omega_{if} = E_i - E_{i-1}$, согласно (5.2) имеем

$$\omega_{if} - \omega_0 = r\beta^2\omega_0, \quad (7.4)$$

поэтому для нахождения $\Gamma_i(\omega)$ во втором порядке по r достаточно знать $\dot{\Gamma}_i(\omega)$ в нулевом, а $\ddot{\Gamma}_i(\omega)$ — в первом порядке. Что касается функции $\Gamma_i(\omega_0)$, она точно выражается через собственно энергетическую часть M (см. (4.6)); которая в полюсах функции Грина $\varepsilon = E_i$ равна $G^{0-1} = E_i - E$. Таким образом, имеем

$$\Gamma_i(\omega_0) = \frac{1}{\beta^2\omega_0^2} (E_i - E) G^{-1}(E_i - \omega_0). \quad (7.5)$$

В (7.5) функция Грина близка к своему полюсу, поэтому мы можем написать

$$\begin{aligned} G^{-1}(E_i - \omega_0) &= \left[\frac{a_{i-1}}{E_i - E_{i-1} - \omega_0} + \sum_{n \neq i-1} \frac{a_n}{E_i - E_n - \omega_0} \right]^{-1} = \\ &= \frac{\omega_{if} - \omega_0}{a_{i-1}} \left[1 + \frac{\omega_{if} - \omega_0}{\omega_0 a_{i-1}} \sum_{n \neq i-1} \frac{a_n}{n - i + 1} \right] + O(r^3), \end{aligned} \quad (7.6)$$

что и определяет $\Gamma(\omega_0)$ с точностью до членов второго порядка.

Выражения для $\dot{\Gamma}_i(\omega)$ и $\ddot{\Gamma}_i(\omega)$ в нужном порядке получаются из (6.5) дифференцированием по ω и приравниванием членов одинаковой аналитической структуры. В результате получаем

$$\dot{\Gamma}_i(\omega) = \frac{1}{\omega a_{i-1}} - r \frac{\beta^2}{\omega_0} \left[\frac{1}{a_i} + \frac{1}{2a_{i-1}} + \frac{1}{a_i a_{i-1}} \sum_{n \neq i-1} \frac{a_n}{n-i+1} \right], \quad (7.7)$$

$$\Gamma_i(\omega) = -\frac{2}{\omega_0^2 a_{i-1}} \left[1 + \frac{1}{a_{i-1}} \sum_{n \neq i-1} \frac{a_n}{n-i+1} \right]. \quad (7.8)$$

Собирая вычисленные члены в (7.3), получим

$$\Gamma_n(\omega_{if}) = \frac{\omega_{if} - \omega_0}{\omega_0} \frac{n}{\beta^2 a_{n-1}}. \quad (7.9)$$

Значение пропагатора фонона (3.12) при $\omega = \omega_{if}$ с той же точностью равно

$$D(\omega_{if}) = \frac{1}{\omega_{if} - \omega_0} \left(1 - r \frac{\beta^2}{2} \right), \quad (7.10)$$

откуда для вероятности перехода (6.2) между соседними уровнями после простых вычислений находим

$$W_{n,j \rightarrow n-1,j} = \sum_{\mu} |\Phi_{\mu}|^2 \left[n + r \frac{n(n-1)}{2} \right] (1 - 2r\beta^2). \quad (7.11)$$

E_2 -переходы с изменением момента ($J_i = J \neq j$, $J_j = = j$). Этот случай отличается от предыдущего выражением для нуклон-фононной вершины. Для получения конечной вероятности, как и в (6.10); необходимо удерживать в Γ_J члены, пропорциональные $E_J^0 \rightarrow \infty$. Чтобы найти поправку второго порядка, снова используем разложение (7.3). Требуемую для этого функцию

$$\Gamma_J(E_i(J) - \omega, E_i(J)) \equiv \Gamma_{Ji}(\omega)$$

легко получить из (6.4). Учитывая, что при $\varepsilon \rightarrow E_i(J)$ члены порядка E_J^0 возникают только из

$$G(\varepsilon - \omega_0) \rightarrow -E_J^0 a_{i-1} / \omega_0^2 m_i(J)$$

(см. (6.11)), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{Ji}(\omega) &= E_J^0 \beta^2 r_2(J) \frac{a_{i-1}}{m_i(J)} \frac{1}{\omega(\omega - \omega_0)} G^{-1}(E_i - \omega) \approx \\ &\approx -\frac{E_J^0}{\omega} r_2(J) \frac{1}{a_{i-1}} \left[1 + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \frac{1}{a_{i-1}} \sum_{n \neq i-1} \frac{a_n}{n-i+1} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Из (7.12) легко получить производную $\dot{\Gamma}_{Ji}(\omega)$ (так как Γ_{Ji} , а следовательно, и ее производные, не содержат членов нулевого порядка по $r_2(J)$, то последнее слагаемое в (7.3) можно не учитывать): Подобно (7.5), через собственно энергетическую часть

$$M_J(E_i(J)) = G_J^{0-1}(E_i(J)) \rightarrow -E_J^0$$

определяется значение $\Gamma_{Ji}(\omega_0)$:

$$\Gamma_{Ji}(\omega_0) = -\frac{E_J^0}{\omega_0} r_2(J) \frac{1}{a_{i-1}} \left[1 + \beta^2 r_2(J) \frac{1}{a_{i-1}} \sum_{n \neq i-1} \frac{a_n}{n-i+1} \right]. \quad (7.13)$$

Из (7.3), (6.10), (7.12), (7.13) находим вероятность перехода между соседними уровнями:

$$W_{n,J \rightarrow n-1,j} = \sum_{\mu} |\Phi_{\mu}|^2 [1 - (n-1)r_2(J)][1 - 2r_2(J)\beta^2]. \quad (7.14)$$

Эффекты рассеяния фононов внешним полем. Рассмотрим в качестве примера вклад в магнитный момент ядра для состояний с $J = j$. Взаимодействие (7.16) равно в этом случае $H' = -g_c \mathcal{H} R_z$, где \mathcal{H} — внешнее магнитное поле, g_c — гиромагнитное отношение фонона, R_z — оператор проекции фононного момента, равный

$$R_z = \sum_{\mu} \mu \mathfrak{A}_{\mu}^{+} \mathfrak{A}_{\mu}^{-} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \mu \mathfrak{A}_{\mu}^{(-)} \mathfrak{A}_{-\mu}^{(+)}; \quad (7.15)$$

$\mathfrak{A}_{\mu}^{(+)}$ был определен в (2.2), а $\mathfrak{A}_{\mu}^{(-)}$ отличается знаком перед оператором рождения. Среднее от оператора (7.15) по состоянию нечетного ядра с квантовыми числами n, j, m просто выражается через функцию Грина фонона для нечетного ядра

$$D_{njm}(\mu, t - t') = -i(njm | T \mathfrak{A}_{\mu}^{(+)}(t) \mathfrak{A}_{\mu}^{(+)+}(t') | njm). \quad (7.16)$$

Учитывая, что $\mathfrak{A}_{\mu}^{(+)}(t) = \omega_0 \mathfrak{A}_{\mu}^{(-)}(t)$, находим

$$\begin{aligned} (njm | R_z | njm) &= \frac{i}{2\omega_0} \sum_{\mu} \mu \left[\frac{\partial}{\partial t} D_{njm}(\mu, t - t') \right]_{t=t'-0} = \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \sum_{\mu} \mu \int \frac{id\omega}{2\pi} \omega D_{njm}(\mu, \omega). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Функция Грина фонона в нечетном ядре выражается через фонон-нуклонную функцию Грина в четном ядре [5], т. е. $X^{(2)}$. В принятых нами обозначениях

$$D_{njm}(\mu, \omega) = D(\omega) - a_n [G^{-1}(\varepsilon) \tilde{X}^{(2)}(\mu\omega, -\mu - \omega | m\varepsilon, m\varepsilon) G^{-1}(\varepsilon)]_{\varepsilon=E_n}, \quad (7.18)$$

где $\tilde{X}^{(2)}$ означает только связанную нуклон-фононную часть, т. е. $X^{(2)} - iGD$. Первый член в (7.18) не зависит от μ , поэтому он не дает вклада в (7.17). Зависимость от проекций моментов во втором члене (7.18) явно выделяется с помощью (3.9), (3.26), (3.23); тогда множитель в $\tilde{X}^{(2)}$, не зависящий от проекций, определяется вторым членом в (3.27). После суммирования по μ формула (7.17) принимает вид

$$\begin{aligned} (njm | R_z | njm) &= \frac{3}{2} \frac{m}{j(j+1)} a_n \beta^2 \omega_0 G^{-2}(\varepsilon) \times \\ &\times \int \frac{id\omega}{2\pi\omega} D^2(\omega) \left[2\omega \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} + G(\varepsilon - \omega) - G(\varepsilon + \omega) \right]_{\varepsilon \rightarrow E_n}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Выполняя интегрирование и переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow E_n$, получаем для средней проекции фононного момента

$$(njm | R_z | njm) = 3\beta^2 \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \frac{m}{j(j+1)}. \quad (7.20)$$

Заметим, что вклад в проекцию полного момента от фермиона, как следует из (6.9) и (3.20) при $k = 1$, равен

$$(njm | j_z | njm) = m \left[1 - 3\beta^2 \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \frac{1}{j(j+1)} \right]. \quad (7.21)$$

Сумма (7.20) и (7.21), дающая проекцию полного момента ядра, естественно, равна m , что доказывает согласованный характер всех вычислений.

Различие гиромагнитных отношений фермиона и фюона приводит к отличной от нуля поправке к магнитному моменту ядра.

Следует подчеркнуть, что согласованность вычислений вероятностей E_2 -переходов имеет принципиальное значение. В этом случае энергия перехода может быть близкой к полюсу $D(\omega)$ (см. рис. 2, б). Однако это кажущееся увеличение вероятности компенсируется соответствующей близостью Γ к своему нулю³⁾. Очевидно, что несогласованные приближенные вычисления Γ и D могут приводить к большим ошибкам.

8. Обсуждение результатов

Результаты, полученные в рассмотренной модели, позволяют ответить на некоторые общие вопросы, поставленные во Введении относительно систем с низколежащими коллективными возбуждениями.

А. Спектр квазичастиц уже не характеризуется только одночастичными квантовыми числами (j, m) , а получает еще дополнительный «коллективный» параметр n . Естественно, при этом обычные утверждения о числе полюсов функций Грина [2, 6] оказываются несправедливыми, что непосредственно иллюстрируется многополюсным видом найденной нами функции Грина.

Б. Взаимодействие, связанное с обменом фюоном, является сильно запаздывающим, поэтому соответствующий эффективный четырехполюсник существенно меняется в энергетическом интервале порядка ω_0 . Вычисленные с таким четырехполюсником физические величины, например вершина \mathcal{T} взаимодействия с внешним полем, имеют мало общего с результатами обычной теории ферми-жидкости.

В. Сделаем в заключение некоторые замечания о применении полученных результатов к реальным нечетным ядрам с высокими спинами⁴⁾.

Энергии компонент первого мультиплетта ($n = 1$), отсчитанные от основного состояния, согласно (5.2), (5.5) равны

$$E_1(J) = \omega_0 + \omega_0 \beta^2 \left[\delta_{jJ} + (2J + 1) \left\{ \begin{matrix} 2 & j & J \\ & 2 & j & j \end{matrix} \right\} \right]. \quad (8.1)$$

Эта формула (как и выражения для вероятностей переходов с уровней первого мультиплетта в основное состояние) по форме совпадает с результатами теории возмущений для слабого взаимодействия ($\beta^2 \ll 1$). Поэтому, в частности, выполняется теорема [8] о сохранении центра тяжести мультиплетта

$$\sum_J (2J + 1) [E_1(J) - \omega_0] = 0. \quad (8.2)$$

Подчеркнем, однако, что эффективное взаимодействие, приводящее к (8.1), принципиально отлично от затравочного (в частности, является сильно запаздывающим).

Учет коллективных возбуждений дает заметную поправку в магнитные моменты и $M1$ -переходы — величины, казалось бы, имеющие сугубо одночастичную природу. Проверкой коллективности поправок к этим величинам может служить их изменение в зависимости от заполнения оболочки (см. [4, 9]).

³⁾ Широко распространено заблуждение, что коллективность перехода (его заметное усиление по сравнению с одночастичной величиной) является именно следствием близости частоты перехода к ω_0 . Как видно из (7.11), (7.14), усиление перехода связано лишь с эффективным зарядом фюона $\Sigma_\mu |\Phi_\mu|^2$, т. е. мнимой частью поляризационного оператора в четном ядре.

⁴⁾ Эта задача не являлась в настоящей работе главной. Основные физические результаты в рамках рассмотренной модели могут быть получены более традиционными методами (без привлечения функций Грина), например способом, рассмотренным в [7], Приложение IV.

Малым параметром модели является величина β^2 / j или β^2 / j^2 . Грубую оценку этого параметра для реальных ядер можно получить из сравнения, например, расщепления мультиплета с формулой (8.1). По-видимому, β^2 / j по порядку величины равно единице. Заметим, что при этом коллективная поправка к магнитному моменту сравнивается по знаку и величине с наблюдаемым отклонением (1—2 магнетона) магнитных моментов от линии Шмидта. Для получения количественных результатов необходимы более точные численные расчеты.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, **35**, 97, 1958.
- [2] А. Б. Мигдал, А. И. Ларкин. ЖЭТФ, **45**, 1036, 1963. A. B. Migdal. Nucl. Phys., **57**, 29, 1964.
- [3] С. Т. Беляев. ЯФ, **1**, 3, 1965.
- [4] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. ЯФ, **1**, 17, 1965.
- [5] С. Т. Беляев, В. Г. Зелевинский. ЯФ, **2**, 51, 1965.
- [6] С. В. Малеев. ЖЭТФ, **41**, 1675, 1961.
- [7] A. Bohr, B. Mottelson. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **27**, 16, 1953; перев. в ПСФ, **9**, 1955.
- [8] R. D. Lawson, J. L. Uretzky. Phys. Rev., **108**, 1300, 1957.
- [9] L. S. Kisslinger, R. A. Sorensen. Rev. Mod. Phys., **35**, 854, 1963.

THE GREEN FUNCTION METHOD IN A SIMPLE NUCLEAR MODEL

S. T. BELYAEV, V. G. ZELEVINSKY

A simple model of a spherical nucleus is considered: nucleons on isolated level with a large momentum $j \gg 1$, interacting with quadrupole phonons. The purpose is to check the efficiency of the Green function method and the fermi-liquid theory, for finite systems with low-energy collective excitations. The system of equations for the Green functions is approximately closed with the help of relations of the Ward type. Green functions, vertex parts and the probabilities of electromagnetic transitions are found. The obtained results are inconsistent with the usual assumptions of the fermi-liquid theory.
