ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 2, вып. 5, 1965

МОМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ВЕЛИЧИНА ПЕРЕНОРМИРОВОЧНЫХ КОНСТАНТ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

И. Б. ХРИПЛОВИЧ

(Поступила в редакцию 9 апреля 1965 г.)

С помощью уравнений движения для гейзенберговских операторов получены новые соотношения, связывающие массу спинорного поля со спектральными функциями представления Лемана. Анализ одного из таких равенств в псевдоскалярной мезонной теории указывает на то, что константа перенормировки вершинной части $Z_1 = 0$. Близкий результат имеет место и в квантовой электродинамике, по крайней мере для фейнмановской калибровки.

В псевдоскалярной мезонной теории и в квантовой электродинамике, используя представление Лемана для вакуумного среднего от антикоммутатора [1]

$$\langle\{\psi(x),\ \bar{\psi}(y)\}\rangle = i\int d\varkappa^2\,\{\rho_1(\varkappa^2)\,(i\hat{\partial}+\varkappa) - \rho_2(\varkappa^2)\}\,\Delta(x-y,\ \varkappa^2) \tag{1}$$

и уравнения движения для спинорного поля, можно получить следующее соотношение между затравочной массой фермиона m_0 и спектральными функциями [1]:

$$m_0 = \int d\varkappa^2\,[\varkappa\rho_1(\varkappa^2) - \rho_2(\varkappa^2)]. \tag{2}$$

Однако с помощью формулы (2) не удается получить какие-либо замкнутые результаты ни в мезонной теории, где $\rho_{1,2}(\varkappa^2) \geqslant 0$, ни тем более в квантовой электродинамике, где спектральные функции даже не являются положительно определенными.

При выводе соотношения (2) в мезонной теории используется уравнение Дирака для неперенормированных величин

$$[-i\hat{\partial} + m_0 - ig_0\gamma_5\varphi(x)]\,\psi(x) = 0. \tag{3}$$

Нам же понадобится в дальнейшем уравнение второго порядка для того же самого четырехкомпонентного спинора $\psi(x)$:

$$\{\Box - m_0^2 - g_0^2\varphi^2(x) + g_0\gamma_5[\hat{\partial}\varphi(x)]\}\,\psi(x) = 0. \tag{4}$$

Его нетрудно получить, подействовав на (3) оператором $-i\hat{\partial} - m_0$. Запишем теперь вакуумное среднее от антикоммутатора левой части уравнения (4) с оператором $\bar{\psi}(y)$, а затем устремим x_0 к y_0. При этом используем канонические перестановочные соотношения и то, что $\langle\varphi(x)\rangle = 0$. Полученное выражение, очевидно, обращается в нуль, так что в результате приходим к следующему равенству:

$$\int d\varkappa^2\,(\varkappa^2 - m_0^2)\,\rho_1(\varkappa^2) - g_0^2\langle\varphi^2(x)\rangle = 0. \tag{5}$$

Учитывая правило сумм $\int d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2) = 1$ и представление Лемана для $\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle$, можно переписать (5) в следующем виде:

$$m_0^2 = \int d\varkappa^2\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2) - \frac{g_0^2}{16\pi^2}\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)\left(\Lambda^2 - \varkappa^2\ln\frac{\Lambda^2+\varkappa^2}{\varkappa^2}\right). \tag{6}$$

Здесь $\rho(\varkappa^2)$ — спектральная функция бозонного поля, а Λ — обрезающий импульс, введение которого обусловлено сингулярным характером свободной перестановочной функции $\Delta^+(x, \varkappa^2)$ при $x \to 0$.

Для исследования равенства (6) перейдем в нем к перенормированным спектральным функциям, сохраняя для них те же обозначения, и к физическому заряду $g^2 = g_0^2 Z_1^{-2} Z_2^2 Z_3$:

$$m_0^2 = Z_2\int d\varkappa^2\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2) - \frac{g^2}{16\pi^2}Z_1 Z_2\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)\left(\Lambda^2 - \varkappa^2\ln\frac{\Lambda^2+\varkappa^2}{\varkappa^2}\right). \tag{7}$$

Перенормировочные константы Z_2, Z_3 следующим образом выражаются через перенормированные спектральные функции:

$$Z_2^{-1} = \int d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2), \qquad Z_3^{-1} = \int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2) \tag{8}$$

и удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant Z_2 \leqslant 1$, $0 \leqslant Z_3 \leqslant 1$. Интегралы в (7) и (8) могут расходиться, так что для спектральных функций ρ_1 и ρ приходится вводить новые обрезающие импульсы Λ_2 и Λ_3. Вообще говоря, величины Λ, Λ_2, Λ_3 различны. Поэтому возникает вопрос о том, как ведут себя их отношения, когда все эти импульсы стремятся к бесконечности. По существу, Λ_2, Λ_3 — предельные импульсы для взаимодействующих систем, а Λ — нечто, напоминающее обратную элементарную длину. Поэтому предельный переход, при котором Λ_2, Λ_3 растут быстрее, чем Λ, представляется неразумным с физической точки зрения. Если же $\Lambda_2 / \Lambda \to 0$, то дальнейшие рассуждения лишь облегчаются. Поэтому будем считать отношение Λ_2 к Λ постоянным. Характер же стремления к бесконечности Λ_3 для дальнейшего вообще несущественен.

Используя то, что $\rho(\varkappa^2) \geqslant 0$ и $\Lambda^2 - \varkappa^2\ln[(\Lambda + \varkappa^2)/\varkappa^2]$ является положительной, монотонно убывающей функцией $\varkappa^2$, нетрудно показать, что второй интеграл в (7) имеет миноранту $(1 - \ln 2)\Lambda^2 Z_3^{-1}(\Lambda^2)$, если $\Lambda_3 > \Lambda$, и $(1 - \ln 2)\Lambda^2 Z_3^{-1}(\Lambda_3)$, если $\Lambda_3 < \Lambda$. Таким образом, рассматриваемая величина расходится квадратично, если $Z_3 \neq 0$, и сильнее чем квадратично, если $Z_3 = 0$.

Между тем разность в правой части уравнения (7) должна быть неотрицательной, иначе m_0 была бы мнимой. Вещественность же m_0 ясна, например, из соотношения (2). Поэтому в правой части (7) отрицательное второе слагаемое должно быть полностью скомпенсировано первым членом, оценку которого нужно сделать. Так как $\rho_1(\varkappa^2) \geqslant 0$, то

$$f(\varkappa^2) = \int^{\varkappa^2} dx\, x\rho_1(x)$$

— положительная, монотонно растущая функция. Через нее Z_2^{-1} выражается следующим образом:

$$Z_2\,(\Lambda_2^2) = \int^{\Lambda_2} d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2) = \frac{f(\Lambda_2^2)}{\Lambda_2^2} + \int^{\Lambda_2^2} d\varkappa^2\frac{f(\varkappa^2)}{\varkappa^4}. \tag{9}$$

Из (9) ясно, что $Z_2^{-1}(\Lambda_2^2) > f(\Lambda_2^2)/\Lambda_2^2$, так что первое слагаемое в (7) не превышает Λ_2^2. Поэтому, если $Z_2 = 0$, а $Z_1 \neq 0$, то компенсация невозможна. С другой стороны, из (9) следует, что при $Z_2 \neq 0$ функция $f(\Lambda_2^2)$ не может расти квадратично или быстрее, так что и в этом случае при $Z_1 \neq 0$ компенсации быть не может. Таким образом, при любых Z_2 и Z_3 необходимым условием непротиворечивости теории является

$$Z_1 = 0. \tag{10}$$

Ранее этот результат был получен Грибовым [2] с помощью спектрального представления для вершинной функции. Однако само это представление строго доказано лишь в теории возмущений.

Перейдем к квантовой электродинамике. Здесь уравнение второго порядка для четырехкомпонентного спинора такое:

$$\left\{\Box - m_0^2 - ie_0\left[2A_\mu\partial_\mu + (\partial_\mu A_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] + e_0^2 A_\mu A_\mu\right\}\psi = 0. \tag{11}$$

Ограничимся калибровками, в которых

$$[A_\mu(x),\ \bar{\psi}(y)]\,|_{x_0=y_0} = 0, \qquad [\dot{A}_\mu(x),\ \bar{\psi}(y)]\,|_{x_0=y_0} = 0; \tag{12}$$

первое из этих условий необходимо и для получения формулы (2). После некоторых преобразований с помощью равенств (1), (11), (12) находим

$$m_0^2 = \int d\varkappa^2\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2) + {}^1/{}_2 e_0^2\langle A_\mu(x)A_\mu(x)\rangle. \tag{13}$$

В дальнейшем ограничимся фейнмановской калибровкой, в которой условия (12) заведомо выполнены. Тогда [4]

$$\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle = -i\int d\varkappa^2\left\{\rho(\varkappa^2)\left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\varkappa^2}\right) - \right.$$

$$\left. - a\delta(\varkappa^2)\partial_\mu\partial_\nu - \frac{\delta(\varkappa^2)}{\varkappa^2}\partial_\mu\partial_\nu\right\}\Delta^+(x-y,\varkappa^2).$$

Используя это выражение и переходя к перенормированным величинам, (13) можно привести к виду

$$m_0^2 = Z_2\int d\varkappa^2\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2) - \frac{3\alpha}{8\pi}\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)\left(\Lambda^2 - \varkappa^2\ln\frac{\Lambda^2+\varkappa^2}{\varkappa^2}\right) - \frac{e_0}{32\pi^2}\Lambda^2. \tag{14}$$

Здесь $\alpha = e^2/4\pi = Z_3 e_0^2/4\pi$. В силу тождества Уорда, $Z_1 = Z_2$.

Фотонная спектральная функция $\rho(\varkappa^2) \geqslant 0$, так что второй интеграл в (14) по-прежнему растет квадратично, если $Z_2 \neq 0$, и быстрее чем квадратично, если $Z_3 = 0$. Исследование первого слагаемого в (14) осложняется тем, что теперь функция $\rho_1(\varkappa^2)$ не является положительно определенной. Однако для компенсации необходимо, чтобы, начиная с некоторых значений предельных импульсов, это слагаемое росло хотя бы квадратично. Снова введем функцию

$$f(\varkappa^2) = \int^{\varkappa_2} dx x\rho_1(x)$$

и выразим через нее Z_2 с помощью равенства (9). Нетрудно видеть, что предположение о том, что Z_2 конечна и отлична от нуля, ведет к противоречию. Действительно, в этом случае компенсация может наступить лишь за счет такого быстрого роста $f(\Lambda_2^2)$, который при подстановке в (9) приведет к обращению Z_2 в нуль.

Таким образом, в фейнмановской калибровке функция $Z_2(\Lambda_2^2)$ при $\Lambda_2 \to \infty$ не может стремиться ни к какому конечному пределу, отличному от нуля. Еще одной возможностью для компенсации, кроме $Z_2 = 0$, является обращение Z_2 в бесконечность. Если $Z_2 = 0$ означает просто расходимость интеграла (8), то в случае $Z_2 = \infty$ этот интеграл обращается в нуль. Если бы эта возможность осуществлялась, то условие $\int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) = 0$ явилось бы уравнением, определяющим физический заряд α.

Предложенное Челленом [3] доказательство того, что $Z_1 = Z_2 = 0$, подвергалось критике как в отношении используемого в нем дисперсионного соотношения для вершинной части, так и в связи с тем, что промежуточные результаты работы противоречат градиентной инвариантности.

Повышая порядок уравнений движения, можно выразить любую степень m_0 (и μ_0^2 в мезонной теории) через моменты спектральных функций и соответствующие вакуумные средние. Однако получить дополнительные сведения о перенормировочных константах не удается.

В заключение приношу глубокую благодарность А. И. Вайнштейну, В. М. Галицкому, Б. Л. Иоффе, В. Л. Покровскому и В. В. Соколову за интерес к работе и стимулирующие дискуссии.

Литература

[1] H. Lehmann. Nuovo Cim., 11, 342, 1954; ПСФ, *3*, 133, 1955.
[2] В. Н. Грибов. ЖЭТФ, 36, 554, 1959.
[3] G. Källen. Handbuch der Physik, 5, Springer Verlag, Berlin, 1958, p. 358.
[4] А. И. Вайнштейн, В. В. Соколов, И. Б. Хриплович. ЯФ, 1, 908, 1965.

MOMENTA OF SPECTRAL FUNCTIONS AND VALUES OF THE RENORMALIZATION CONSTANTS IN QUANTUM FIELD THEORY

I. B. KHRIPLOVICH

New relations, connecting the spinor field mass with the spectral functions of the Lehmann representation, are derived with the help of the equations of motion for the Heisenberg operators. An analysis of one of these equations in the preudoscalar meson theory shows, that the renormalization constant of the vertex part $Z_1 = 0$. A similar result holds for quantum electrodynamics, at least for the Feynman gauge.