Доклады Академии наук СССР
1966. Том 166, № 1

УДК 531.011

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ф. М. ИЗРАЙЛЕВ, Б. В. ЧИРИКОВ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 3 V 1965)

В работе приводятся некоторые результаты исследования качественного поведения продольных колебаний нелинейной струны с закрепленными концами, подчиняющейся уравнению:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left[1 + 3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{1}$$

Эта задача была исследована в работе Ферми, Паста и Улама ([1]) методом численного интегрирования колебаний цепочки нелинейных осцилляторов, приближенно представляющих струну и подчиняющихся системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l)\{1 + \beta[(x_{l+1} - x_l)^2 + (x_l - x_{l-1})^2 +$$
$$+ (x_{l+1} - x_l)(x_l - x_{l-1})]\}, \qquad l = 1, 2, \ldots, N-1; \quad a = 1; \quad L = N. \tag{2}$$

Целью работы ([1]) было проследить возникновение статистических свойств в такой сравнительно простой механической системе с большим числом степеней свободы. В линейном случае ($\beta = 0$) цепочка осцилляторов может быть представлена в виде $N-1$ полностью независимых мод (нормальных осцилляторов) и, следовательно, не имеет никаких статистических свойств (существует полный набор $N-1$ однозначных интегралов движения). До недавнего времени считалось, что любая нелинейность будет приводить к появлению статистических свойств, которые мы кратко будем называть в дальнейшем термином стохастичность (эргодичность, перемешивание, конечная энтропия по А. Н. Колмогорову ([2])). Поэтому отрицательный результат работы ([1]) (четкий квазипериодический характер движения вместо стохастичности) казался удивительным. Однако последние работы А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда ([3, 4]) показали, что такой результат является, наоборот, естественным: при достаточно малом возмущении нелинейная система сохраняет квазипериодический характер движения *. С точки зрения современной теории динамических систем следует ожидать существования в общем случае некоторого критического возмущения, при котором начинается стохастичность (см. также ([5])). Целью настоящей работы является оценка границы стохастичности для цепочки осцилляторов ([2]).

Переходя к нормальным (для $\beta = 0$) координатам

$$x_l = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin\frac{\pi k l}{N}, \tag{3}$$

получим систему уравнений

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = -\frac{\beta}{8N}\Big\{\sum_{i+j=2}^{k-1} A_{ij}^{+} Q_{k-i-j}\,\omega_{k-i-j}^2 +$$

---

* Гипотеза о такой своеобразной устойчивости квазипериодического движения содержится в ([1]), в дальнейшем будем называть ее колмогоровской устойчивостью.

$$+\sum_{i+j=N-k+1}^{2N-k-1} A^+_{ij} Q_{2N-i-j-k}\,\omega^2_{2N-i-j-k} + \sum_{i+j=2}^{N-k+1} A^+_{ij} Q_{i+j+k}\,\omega^2_{i+j+k} -$$

$$-\sum_{i+j=N+k+1}^{2N-2} A^+_{ij} Q_{2N+k-i-j}\,\omega^2_{2N+k-i-j} - \sum_{i+j=k+1}^{k+N-1} A^+_{ij} Q_{i+j-k}\,\omega^2_{i+j-k} -$$

$$-\sum_{i+j=2N-k+1}^{2N-2} A^+_{ij} Q_{i+j+k-2N}\,\omega^2_{i+j+k-2N} + 2\sum_{i-j=k-1}^{k-N+1} A^-_{ij} Q_{k-i+j}\,\omega^2_{k-i+j} +$$

$$+2\sum_{i-j=N-k+1}^{N-2} A^-_{ij} Q_{2N-k-i+j}\,\omega^2_{2N-k-i+j} - 2\sum_{j-i=N-2}^{k+1} A^-_{ij} Q_{j-i-k}\,\omega^2_{j-i-k}\Big\}, \qquad (4)$$

где

$$i, j, k = 1, 2, \ldots, N-1; \quad \omega_k = 2\sin \pi k / 2N; \qquad (5)$$

$$A_{ij}{}^{\pm} = Q_i Q_j \omega_i \omega_j [3\sqrt{(4-\omega_1{}^2)(4-\omega_j{}^2)} \pm \omega_i\omega_j]. \qquad (6)$$

Выражения (4) чрезвычайно громоздки, поэтому мы рассмотрим два крайних случая: $k \ll N$ и $(N-k) \ll N$. Полагая возмущение малым

$$\beta / 8N \ll 1, \qquad (7)$$

решение (4) можно представить в виде

$$Q_n = C_n(t)\cos\theta_n(t); \quad \dot\theta_n = \omega_n{}'(t), \qquad (8)$$

где C_n, $\omega_n{}'$ — медленно меняющиеся амплитуды и частоты нормальных осцилляторов; штрих указывает, что частота включает в себя все поправки, связанные с возмущением. Уравнения (4) можно представить в виде

$$\ddot Q_k + \omega_k^2 Q_k \left\{1 - \frac{3\beta}{4N}\omega_k^2(2-\omega_k^2)\,Q_k^2\right\} = \frac{\beta}{8N}\sum_m F_{km}\cos\theta_{km}, \qquad \dot\theta_{km} = \omega'_{km}. \qquad (9)$$

Эти уравнения описывают движение нелинейных осцилляторов под действием внешних сил с амплитудами $\beta F_{km}/8N$ и частотами ω'_{km}, т. е. случай многих резонансов в нелинейной системе. Для одного резонанса, применяя стандартную технику усреднения ([6]), можно получить так называемое фазовое уравнение

$$\ddot\Psi_{km} = \frac{d\Omega_{km}}{dC_k}\,\frac{\beta F_{km}}{16\omega'_k N}\sin\psi_{km}; \quad \Omega_{km} = \omega'_{km} - \omega'_k, \qquad (10)$$

из которого легко найти размер сепаратрисы $|\dot\psi_{km}|_{\max}$, ограничивающей область устойчивых фазовых колебаний вблизи резонанса (см., например, ([7])):

$$|\dot\psi_{km}|_{\max} = \sqrt{\frac{\beta F_{km}}{4N\omega'_k}\,\frac{d\Omega_{km}}{dC_k}}\,. \qquad (11)$$

В случае многих резонансов характер движения существенно зависи от соотношения размера сепаратрисы и среднего расстояния между ре- зонансами $\Delta\omega$. В работах ([8], [9]) было показано, что граница стохастично- сти определяется условием

$$|\dot\psi_{km}|_{\max} / |\Delta\omega| \sim 1. \qquad (12)$$

Выразим это условие через безразмерную характеристику нелинейно возмущения (2)

$$\beta[(x_{l+1}-x_l)^2 + (x_l - x_{l-1})^2 + (x_{l+1}-x_l)(x_l-x_{l-1})] \approx 3\beta(\partial x/\partial z)^2, \qquad (13)$$

поскольку $z = la$, $a = 1$ (2). Последнее выражение перестает быть спра ведливым для самых высоких мод, однако равенство по порядку величины сохраняется.

Проделав громоздкие выкладки с правой частью (4), получим следующие окончательные оценки для границы стохастичности:

$$3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_m^2 \sim \begin{cases} \dfrac{3}{k}, & k \ll N, \\ \dfrac{3\pi^2}{N^2}\left(\dfrac{k}{N}\right)^2, & N-k \ll N. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $(\partial x / \partial z)_m$ — максимальное значение производной. Предполагается, что вначале возбуждена всего одна мода с номером k. Выражение (14) есть условие самого начального стохастического обмена между несколькими соседними модами. Основное различие для двух крайних случаев в (14) возникает за счет среднего расстояния между резонансами $\Delta\omega \sim 2\pi / N$ $(k \ll N)$, $\Delta\omega \sim \pi^2 / 2N^2$ $(N-k \ll N)$. Для непрерывной струны нужно использовать первую из оценок в (14).

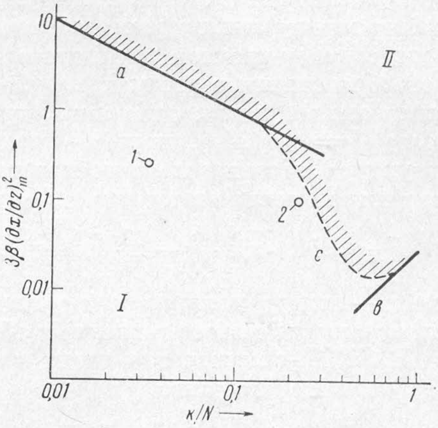

Рис. 1. I — область колмогоровской устойчивости; II — область стохастичности; a — граница стохастичности для $k \ll N$ (14); b — граница для $N-k \ll N$ (14); c — качественная интерполяция; численные значения прямых a, b даны для $N=32$; 1 — результат численного счета для $N=32$, $x_m=1$, $k=1$, $\beta=8$ [1]; 2 — то же самое для $k=7$, $\beta={}^1/_{16}$ [1]

Выражение (14) показывает, что при возбуждении низших мод стохастичность возможна лишь для очень больших нелинейных возмущений. Это объяснет неудачу работы [1] — априори возбуждение первой моды казалось вполне естественным начальным условием. Наоборот, для высших мод и больших N стохастичность начинается уже при очень малой нелинейности.

На рис. 1 две сплошные прямые изображают границу стохастичности в двойном логарифмическом масштабе, а пунктирная кривая представляет попытку грубой интерполяции между ними; кружки — результаты численного счета для двух случаев кубической нелинейности согласно [1]. Интересно отметить, что первый случай лежит далеко в области колмогоровской устойчивости, несмотря на большое значение $\beta = 8$. Результаты численного счета [1] показывают в этом случае явно выраженную квазипериодичность. Второй случай лежит вблизи границы стохастичности, хотя значение $\beta = {}^1/_{16}$ очень мало, но зато возбуждена седьмая гармоника. Картина колебаний в этом случае [1] очень мало похожа на квазипериодическое движение и скорее напоминает неразвитую стохастичность.

Выражаем глубокую благодарность проф. С. М. Уламу за любезное предоставление отчета [1] и сообщение дополнительных интересных подробностей, А. Г. Синаю — за многочисленные полезные дискуссии.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
28 IV 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of Nonlinear Problems, 1, Los Alamos Report La-1940, 1955. [2] А. Н. Колмогоров, ДАН, **119**, 861 (1958). [3] А. Н. Колмогоров, ДАН, **98**, 527 (1954). [4] В. И. Арнольд, УМН, **18**, 91 (1963). [5] Н. С. Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, Изд. АН СССР, 1950. [6] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958. [7] Б. В. Чириков, ДАН, **125**, 1015 (1959). [8] Б. В. Чириков, Атомная энергия, **6**, 630 (1959); Б. В. Чириков, Диссертация, Новосибирск, 1959. [9] Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, ДАН, **159**, 306 (1964).