

В. Е. ЗАХАРОВ, Н. Н. ФИЛОНЕНКО

СПЕКТР ЭНЕРГИИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Г. И. Будкером 14 I 1966)

Задача о спектре энергии для стохастических гравитационных волн на поверхности жидкости (рябь на воде) изучалась экспериментально^(1, 2). Было установлено, что существует область волновых чисел («область равновесия»), в которой спектр носит универсальный характер и не зависит от способа возбуждения колебаний и величины вязкости. Экспериментальные данные показывают, что спектр в области равновесия имеет вид $E_\omega d\omega \sim \omega^{-s} d\omega$, $s = 5 \div 6$. Филлипсом⁽³⁾ была высказана гипотеза, что $E^\omega \sim \omega^{-5}$ (на основе анализа размерностей) и приведены феноменологические соображения в пользу этой гипотезы.

В настоящей работе вопрос о спектре стохастических колебаний изучался с помощью уравнений для корреляционных функций отклонения поверхности жидкости от равновесия. Показано, что точным решением для однородного, изотропного стационарного статистического распределения является $E_\omega \sim \omega^{-4}$. Метод получения таких решений был разработан ранее одним из авторов для некоторых модельных задач⁽⁴⁾.

В «области равновесия», где влияние вязкости мало, основную роль играет нелинейное взаимодействие между волнами. Если нелинейность слишком велика, то $\tilde{\gamma}$ — затухание волн за счет нелинейного взаимодействия — мало по сравнению с частотой ω , так что можно воспользоваться разложением по $\tilde{\gamma}/\omega^*$ (эта методика обычно применяется при изучении слабой турбулентности плазмы)^(5, 6).

Выберем в качестве переменных, описывающих колебания жидкости $\Phi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости; $\Psi(x, y, z, t) \equiv \Phi(x, y, z, t)|_{z=0}$; $\eta(x, y, t)$ — отклонение поверхности от равновесного значения. Тогда система уравнений, описывающих колебания жидкости, приобретает вид

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - A = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + A \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + g\eta = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (1)$$

$$\Delta \Phi = 0,$$

где $A \equiv \partial \Phi / \partial z|_{z=\eta}$, при $\rho = 1$.

Будем предполагать, что глубина жидкости бесконечна. Тогда

$$\Phi(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_k e^{k|z|} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad \Psi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} k^n \Phi_{k(n)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k},$$

где $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ и $\mathbf{r} = (x, y)$ — двумерные векторы.

* В отличие от обычной гидродинамической турбулентности, это позволяет привести строго обоснованное расщепление цепочек уравнений для корреляционных функций.

Перейдем в уравнениях (1) к преобразованию Фурье по координатам и выразим компоненту Фурье A_k по координатам через компоненты Фурье с точностью до кубических членов.

$$A_k = |k| \Psi_k + \int |k_1| (|k_1| - |k|) \Psi_{k_1} \eta_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} dk_1 dk_2 + \\ + \int |k_1| \left[\frac{|k_1| (|k_1| - |k|)}{2} + |k - k_2| (|k| - |k - k_2|) \right] \Psi_{k_1} \eta_{k_2} \eta_{k_3} \times \\ \times \delta_{k-k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (2)$$

Кроме того, введем замену переменных

$$\eta_k = (|k|/g)^{1/4} (a_k + a_{-k}^*), \quad \Psi_k = -i \left(\frac{g}{|k|} \right)^{1/4} (a_k - a_{-k}^*).$$

Тогда уравнения примут вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \int [V_{kk_1k_2}^{(1)} a_{k_1} a_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} + 2V_{k_2k_1k}^{(1)} a_{k_1}^* a_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} + \\ + V_{kk_1k_2}^{(2)} a_{k_1}^* a_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2}] dk_1 dk_2 - i \int W_{kk_1k_2k_3} a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3, \\ \omega_k = \sqrt{|k|g}. \quad (3)$$

Остальными кубическими членами можно пренебречь. Здесь $V_{kk_1k_2}^{(1)}$ и $W_{kk_1k_2k_3}$ — однородные функции степени $7/4$, удовлетворяющие соотношениям симметрии

$$V_{kk_1k_2}^{(1)} = V_{kk_2k_1}^{(1)}, \quad V_{kk_1k_2}^{(2)} = V_{k_1k_2k}^{(2)} = V_{kk_2k_1}^{(2)}. \quad (4)$$

$W_{kk_1k_2k_3}$ — однородная функция степени 3, удовлетворяющая условиям симметрии

$$W_{kk_1k_2k_3} = W_{k_1k_2k_3k} = W_{kk_1k_3k_2} = W_{k_2k_3kk_1}. \quad (5)$$

Для статистического описания колебаний применим диаграммную технику Уайльда (7). Так как в уравнения входят не только переменные a_k , a_k^* , все линии в графиках будут ориентированы. Вершинные функции будем предполагать невозмущенными, а для одночастичной корреляционной функции $\chi_k = \langle a_{k\omega} a_{k\omega}^* \rangle$ (волнистая линия) и функции распространения (жирная прямая линия) получается система уравнений (рис. 1). Тонкой прямой линии соответствует невозмущенная функция Грина $\frac{1}{\omega + i\nu - \omega_k}$.

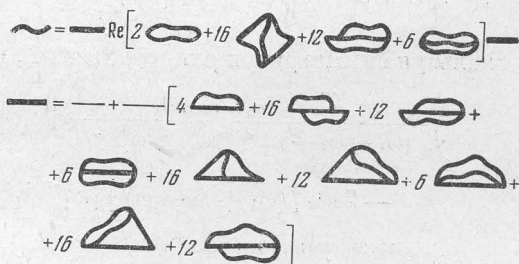


Рис. 1

Каждый график есть сумма всевозможных графиков той же топологии, но с различно ориентированными линиями. Все следующие графики имеют более высокий порядок по γ/ω .

Далее, подставим в уравнения $N_{k\omega} = N_k \delta(\omega - \omega_k) + \Phi_{k\omega}$ и выразим $\Phi_{k\omega}$ через N_k с точностью до квадратичных членов. Затем проинтегрируем уравнение по ω . Получим

$$\int U_{kk_1k_2k_3} (N_{k_1} N_{k_2} N_{k_3} + N_k N_{k_2} N_{k_3} - N_k N_{k_1} N_{k_2} - \\ - N_k N_{k_1} N_{k_3}) \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \delta_{\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}} dk_1 dk_2 dk_3 = 0. \quad (6)$$

Здесь

$$U = \left| \frac{2V_{k+k_1, k, k_1} V_{k+k_1, k_2, k_3}}{\omega_{k+k_1} - \omega_k - \omega_{k_1}} + \frac{U_{-k-k_1, k, k_1} U_{-k-k_1, k_2, k_3}}{\omega_{k-k_1} - \omega_k + \omega_{k_1}} + \right. \\ \left. + 2 \frac{V_{k, k_1, k-k_1} V_{k_2, k-k_1, k_2}}{\omega_{k-k_1} - \omega_k + \omega_{k_1}} + 2 \frac{V_{k, k_1, k-k_1} V_{k_3, k-k_1, k_2}}{\omega_{k-k_1} - \omega_k + \omega_{k_1}} + 2 \frac{V_{k_1, k, k_1-k} V_{k_2, k_3, k_1-k}}{\omega_{k_1-k} + \omega_k - \omega_{k_1}} + \right. \\ \left. + 2 \frac{V_{k_1, k, k_1-k} V_{k_3, k_2, k_1-k}}{\omega_{k_1-k} + \omega_k - \omega_{k_1}} + W_{k k_1 k_2 k_3} \right|^2.$$

U — однородная функция, удовлетворяющая тем же условиям симметрии, что и W . Усреднив уравнение (6) по углам в \mathbf{k} -пространстве и перейдя к переменным $\omega = \sqrt{kg}$, получим

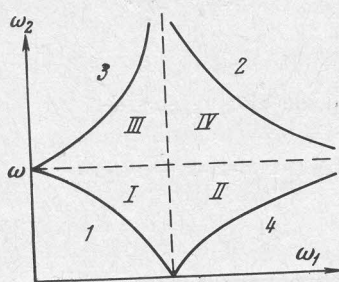


Рис. 2

$$\int T_{\omega, \omega_1 + \omega_2 - \omega, \omega_1, \omega_2} \{ N_{\omega} N_{\omega_2} N_{\omega_1 + \omega_2 - \omega} + N_{\omega} N_{\omega_1} N_{\omega_2} - 2N_{\omega} N_{\omega_1} N_{\omega_1 + \omega_2 - \omega} \} d\omega_1 d\omega_2 = 0. \quad (7)$$

Интегрирование происходит по области, изображенной на рис. 2, где кривые 1, 2, 3, 4 описываются соответственно уравнениями:

1. $(\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 = -\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega^2.$
2. $(\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega^2.$
3. $(\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 = -\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega^2.$
4. $(\omega_1 + \omega_2 - \omega)^2 = \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega^2.$

Функция T положительная, однородная степени 20 и удовлетворяет условиям симметрии (5). Будем искать решения уравнения (7) в виде $N_{\omega} = \omega^s$. Разобьем область интегрирования на области I, II, III, IV и отобразим каждую из областей II, III, IV на область I по следующим правилам:

- 1) Для области II $\omega_1 \rightarrow \frac{\omega_2 \omega}{\omega_1 + \omega_2 - \omega}; \quad \omega_2 \rightarrow \frac{\omega_1 \omega}{\omega_1 + \omega_2 - \omega}.$
- 2) Для области III $\omega_2 \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_2}; \quad \omega_1 \rightarrow \frac{(\omega_1 + \omega_2 - \omega) \omega}{\omega_2}.$
- 3) Для области IV $\omega_1 \rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_1}; \quad \omega_2 \rightarrow \frac{(\omega_1 + \omega_2 - \omega) \omega}{\omega_1}.$

Используя симметрию и однородность T , получим

$$\int \frac{T_{\omega, \omega_1 + \omega_2 - \omega, \omega_1, \omega_2}}{(\omega_1 + \omega_2 - \omega)^{23+3s} \omega_1^{23+3s} \omega_2^{23+3s}} [\omega_1^s \omega_2^s (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^s + \omega^s \omega_1^s \omega_2^s - 2\omega^s \omega_1^s (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^s] [\omega_1^{23+3s} \omega_2^{23+3s} (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^{23+3s} + \omega^{23+3s} \omega_1^{23+3s} \omega_2^{23+3s} - 2\omega^{23+3s} \omega_2^{23+3s} (\omega_1 + \omega_2 - \omega)^{23+3s}] d\omega_1 d\omega_2 = 0.$$

Подынтегральное выражение обращается в нуль при $s = -1$ и $s = -2$. Однако при подстановке этих решений в уравнение (7) обнаруживается, что при $s = -1$ интеграл расходится на больших k , тогда как при $s = -2$ интеграл сходится как на больших, так и на малых k .

Первое решение есть распределение Релея — Джинса. В нашем случае оно не имеет физического смысла. Второе решение (ему соответствует спектр энергии $E_{\omega} = \omega^4 N_{\omega} = A\omega^{-4}$) — точный аналог спектра Колмогорова. В реальной задаче с источником на малых k и вязкостью на больших k оно описывает поток энергии в область диссипации. Как показывает анализ, величина этого потока P не зависит от коэффициента вязкости, причем $P \sim A^3$.

Отличие полученного нами спектра от спектра Филлипса ($E_{\omega} \sim \omega^{-5}$) объясняется тем, что Филлипс рассматривал волнение с образованием башков, что соответствует сильному нелинейному взаимодействию волн. В этом случае разложение по параметру γ/ω становится неприменимым. В заключение авторы выражают благодарность Р. З. Сагдееву за внимание к настоящей работе.

Поступило
13 X 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. W. Burling, Wind Generation of Waves on Water, Dissertation Imperial College Univ of London, 1955. ² H. Charnock, Quart. J. Roy. Met. Soc., 81, 639 (1955).
³ М. Филлипс, Сборн. Ветровые волны, ИЛ, 1962, стр. 249. ⁴ В. Е. Захаров, Докл. мех. и техн. физ., № 4, 35 (1965). ⁵ А. А. Веденов, Сборн. Вопросы теории плазмы, в. 3, 1963, стр. 203. ⁶ Б. Б. Кадомцев, Сборн. Вопросы теории плазмы, в. 4, 1964, стр. 188. ⁷ U. W. Wyl d, Ann. Phys., 14, July, 143 (1961).