Доклады Академии наук СССР
1966. Том 171, № 2

ДК 539.123

ФИЗИКА

В. Н. БАЙЕР, В. М. КАТКОВ

РОЖДЕНИЕ ПАРЫ НЕЙТРИНО ПРИ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком Г. И. Будкером 7 II 1966)

1. При движении заряженных частиц в магнитном поле может проис-дить не только излучение фотонов, но и рождение частиц. В частности, и движении электрона в магнитном поле могут идти процессы образова-я электрон-позитронных пар (конверсия излученного фотона в пару), также процессы, вызываемые слабым взаимодействием электрона (излу-ние пары нейтрино, обратный μ-распад и т. д.)[1]. Указанные процессы мо-т представлять интерес, в частности в астрофизике *.

2. Мы рассмотрим излучение пары нейтрино при движении электрона магнитном поле в предположении, что имеет место прямое взаимодей-вие электрона и нейтрино. Рассмотрение проводится в рамках универ-льного $V - A$-варианта теории слабого взаимодействия.

Вероятность процесса в единицу времени представим в виде

$$dW = \frac{1}{(2\pi)^5} |u_{if}|^2 \delta(E - E' - k_{10} - k_{20}) \frac{d^3k_1}{2k_{10}} \frac{d^3k_2}{2k_{20}}, \tag{1}$$

$$u_{if} = -\frac{G}{\sqrt{2}} L_\alpha M^\alpha; \tag{2}$$

$$L_\alpha = \int d^3x (\overline{\psi}_{ef} O_\alpha \psi_{ei}) e^{-(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}}, \quad M_\alpha = (\overline{u}_\nu(\mathbf{k}_1) O_\alpha \vartheta_\nu(\mathbf{k}_2)); \tag{3}$$

и $\mathbf{k}_2$ — импульсы нейтрино и антинейтрино; ψ_e — ортонормированная стема функций электрона в магнитном поле. Выполняя суммирование по инам и интегрирование по импульсам родившейся пары нейтрино — тинейтрино (см., например, [2]), получаем **

$$S_f \int M_\alpha M_\beta^* \frac{d^3k_1}{k_{10}} \frac{d^3k_2}{k_{20}} \delta(E - E' - k_{10} - k_{20}) = \frac{16\pi}{3} \int d^3q (q_\alpha q_\beta - q^2 g_{\alpha\beta}), \tag{4}$$

ичем $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$; $q_0 = k_{10} + k_{20} = E - E'$.

Интегралы L_α (3) известны из квантовой теории излучения электронов магнитном поле (см., например, [3]), они выражаются через функции $_{n'}(x)$

$$I_{n,n'}(x) = \sqrt{\frac{n'!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-n')/2} L_{n'}^{n-n'}(x), \tag{5}$$

е $x = q^2 \sin^2\vartheta / 4\eta$. Здесь сделано не нарушающее общности предполо-ние, что вектор q лежит в плоскости (y, z); ϑ — угол между осью z и ктором q. В дальнейшем предполагается, что в начальном состоянии $= 0$.

* Процессы излучения пионов и β-распад протона в магнитном поле были рас-трены недавно Жарковым [1].

** Используется метрика $(ab) = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\hbar = c = 1$.

Выполнив усреднение по спину начального электрона и суммирование по спину конечного, получаем выражение для вероятности

$$W = \frac{G^2}{3(2\pi)^4}\int d^3q\,[q_0^2 H_{00} + \mathbf{q}^2(\sin^2\vartheta H_{22} + \cos^2\vartheta H_{33}) - 2q_0|\mathbf{q}|(H_{20}\sin\vartheta + H_{30}\cos\vartheta) + 2\mathbf{q}^2\cos\vartheta\sin\vartheta H_{23} - q^2(H_{00} - H_{11} - H_{22} - H_{33}), \tag{6}$$

где

$$H_{\alpha\beta} = {}^1/_4 S_i S_f (L_\alpha L_\beta{}^* + L_\beta L_\alpha{}^*). \tag{7}$$

Для получения полной вероятности рождения пары нейтрино необходимо просуммировать по состояниям конечного электрона и выполнить интегрирование в формуле (6). Заметим, что суммирование по компоненте импульса p_{zj} и квантовому числу s' *, а также интегрирование по азимутальному углу вектора q выполняется тривиально.

При выполнении суммирования по квантовым числам n' конечного электрона перейдем, как обычно, к интегрированию. При этом оказывается удобным ввести новую переменную (см., например, [5])

$$n - n' = n\frac{2\alpha}{1+\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\beta^2\sin^2\vartheta\right). \tag{8}$$

3. Очевидно (ср., например, [6]), что инвариантные характеристики процесса (например, интенсивность излучения) для частицы во внешнем электромагнитном поле после суммирования по конечным состояниям и усреднения по спинам начального состояния могут зависеть только от поля $F_{\mu\nu}$ и вектора p_μ. Из этих величин можно построить следующие безразмерные инварианты:

$$\chi^2 = -e^2F_{\mu\nu}F^{\mu\alpha}p^\nu p_\alpha / m^6, \quad f^2 = e^2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} / m^4, \quad g^2 = e^2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta} / m^4.$$

Во внешнем магнитном поле $\chi = \gamma\beta\dfrac{H}{H_0}(p_z = 0)$, $f = H / H_0$, $g = 0$, где критическое поле $H_0 = m^2 / e = 4{,}4\cdot 10^{13}$ эрст. Это поле на много порядков превышает все известные в настоящее время поля. Мы будем рассматривать случай ультрарелятивистских электронов, тогда $\chi \gg f$.

Поскольку $\gamma \gg 1$, то в дальнейшем мы будем систематически разлагать все величины по степеням $1/\gamma$ и сохранять старшие члены разложения. С указанной точностью

$$q_0 = E\beta^2\frac{\alpha}{1+\alpha}. \tag{9}$$

Введем также новую переменную ρ, связанную с $\mathbf{q}^2$ соотношением

$$\rho = \frac{1}{1+\alpha}\left(1 - \frac{\mathbf{q}^2}{q_0^2}\right). \tag{10}$$

Заметим, что с принятой точностью $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Для проведения дальнейших вычислений удобно выразить входящие в формулу (6) функции $I_{n,n'}$, $I_{n-1,n'}$, $I_{n,n'-1}$, $I_{n-1,n'-1}$ через $I_{n,n'}$ и $I'_{n,n'}$. Мы воспользуемся известными квазиклассическими асимптотическими выражениями для $I_{n,n'}$ и $I'_{n,n'}$ через цилиндрические функции K (см., например, [4])

$$I_{n,n'}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}(1+\alpha)^{1/2}\tau^{1/2}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}n\alpha\tau^{3/2}\right), \tag{11}$$

$$I'_{n,n'}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\frac{(1+\alpha)^{3/2}}{\alpha}\tau K_{2/3}\left(\frac{2}{3}n\alpha\tau^{3/2}\right). \tag{12}$$

* Относительно суммирования по s' см., например, [4].

[Э]то представление справедливо в существенной области изменения ар[гуме]нта при $n \gg 1$, $n' \gg 1$, $(1+\alpha)\tau \ll 1$, где

$$\tau = \frac{1}{\gamma^2} + \cos^2\vartheta + \rho. \tag{13}$$

Основной вклад в вероятность перехода дает область $n\alpha\tau^{3/2} \lesssim 1$. Если [учес]ть, что $n' \simeq n / (1+\alpha)^2$, то отсюда вытекает, что условие $n' \gg 1$ мо[жет] выполняться только если $f = H / H_0 \ll 1$. В этом случае электрон в [ко]нечном состоянии остается ультрарелятивистским. Таким образом, полу[чен]ные нами выражения будут представлять функции от χ. Что же касает[ся з]ависимости от $f = H / H_0$, то весь подход справедлив только при $f \ll 1$, [если м]ы будем оставлять нулевой член разложения по f. В этом смысле для [дан]ной задачи область применимости использованного метода такая же, [ка]к метода Никишова — Ритуса ([6]), где $f = 0$.

Анализ выражения для вероятности показывает, что основной вклад [даю]т области $\cos\vartheta \sim 1/\gamma$, $\rho \sim 1/\gamma^2$ при $\chi \ll 1$ и $\cos\vartheta \sim 1/\gamma\chi^{1/3}$, [$\rho$] $\sim 1/\gamma^2\chi^{2/3}$ при $\chi \gg 1$. С учетом этого можно провести разложение выра[же]ния для вероятности по степеням $1/\gamma(\chi^{1/3}/\gamma)$; при этом оказывается, [чт]о старшие по γ члены взаимно компенсируются, так что сохраняются [то]лько члены $\sim\gamma^{-4}$. После указанных преобразований получаем выраже[ни]я для вероятности

$$W = \frac{2}{9}\frac{1}{(2\pi)^5} G^2E^6R\int\limits_0^1 d\rho \int\limits_{-1}^1 d\cos\vartheta \int\limits_0^\infty \frac{\alpha^5}{(1+\alpha)^6}\tau\left[F_{1/3}K^2_{1/3}\left(\frac{2}{3}n\alpha\tau^{3/2}\right) + \right.$$
$$\left. + F_{2/3}K_{2/3}\left(\frac{2}{3}n\alpha\tau^{3/2}\right)\tau\right]d\alpha; \tag{14}$$

$$F_{1/3} = 2(\alpha^2+2\alpha+1)\tau^2 + (\alpha^3-\alpha^2-4\alpha-2)\mu\tau +$$
$$+ 2(\alpha^2+2\alpha+1)\frac{\tau}{\gamma^2} - (3\alpha^2+2\alpha+1)\frac{\mu}{\gamma^2} - (\alpha^3-\alpha^2)\mu^2,$$

$$[F_{2/3}] = (\alpha^3+3\alpha^2+4\alpha+2)\tau - (\alpha^3+\alpha^2+4\alpha+2)\mu + (1+2\alpha-\alpha^2)\frac{1}{\gamma^2}, \tag{15}$$

$$\mu = \frac{1}{\gamma^2} + \cos^2\vartheta.$$

Для вычисления интеграла по α в выражении для вероятности (14) [во]спользуемся представлением (см., например, ([7]))

$$\frac{1}{(1+\alpha)^m} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s+m)}{\Gamma(m)}\alpha^s ds. \tag{16}$$

Тогда интеграл по α легко вычисляется. Интегрирование по перемен[н]ым ρ и $\cos\vartheta$ элементарно, так что остается интегрирование по s. Это ин[т]егрирование легко провести для случаев $\chi \gg 1$, $\chi \ll 1$. Для $\chi \ll 1$ контур [и]нтегрирования можно замкнуть вправо, и интеграл сводится к вычетам в [с]оответствующих полюсах, причем в этом случае получаем разложение по [с]тепеням χ. Для $\chi \gg 1$ контур интегрирования можно замкнуть влево, и, [бе]ря вычеты в полюсах, получаем разложение по $\chi^{-1/3}$. Мы выпишем глав[н]ые члены разложения в том и другом случае.

$$W = \frac{7\cdot 17\, G^2m^5}{4\cdot 9\sqrt{3}\,(2\pi)^3\gamma}\chi^5 \qquad (\chi \ll 1); \tag{17}$$

$$W = \frac{2G^2m^5}{(6\pi)^3\gamma}\left(\ln\chi - C - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{11}{8}\right)\chi^2 \quad (\chi \gg 1), \tag{18}$$

[г]де C — постоянная Эйлера, $C = 0{,}577$.

4. Для вычисления выражения для интенсивности рождения пар ней[т]рино необходимо провести суммирование по энергии конечных частиц с

весом $q_0 = E\alpha / (1+\alpha)$. Методика вычисления совершенно аналогична приведенной выше. Тогда с указанной точностью получаем:

$$I = 2\left(\frac{5}{6\pi}\right)^3 G^2 m^6 \chi^6 \qquad (\chi \ll 1); \tag{19}$$

$$I = \frac{2G^2m^6}{(6\pi)^3}\left(\ln\chi - C - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{71}{80}\right)\chi^2 \quad (\chi \gg 1). \tag{20}$$

(Отметим, что в случае $\chi \ll 1$ величины W и I особенно просто могут быть получены методом II работы 3.)

В случае $\chi \ll 1$ спектр излучения нейтринных пар такой же, как у фотонов, средний угол вектора $\mathbf{q}$ с плоскостью $(x, y) \sim 1/\gamma$, такую же величину имеет средний угол между векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$.

В случае $\chi \gg 1$ энергия излученных нейтрино порядка энергии электрона, средний угол между $\mathbf{q}$ и плоскостью (x, y) порядка $1/\gamma\chi^{1/3}$, средний угол между векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ порядка $1/\gamma\chi^{1/2}$.

5. Сравним полученные результаты (19), (20) с интенсивностью излучения фотона.

В случае $\chi \ll 1$

$$\frac{I_\nu}{I_\gamma} \simeq 3\left(\frac{5}{6\pi}\right)^3 \frac{G^2m^4}{\alpha}\chi^4 \simeq 10^{-22}\chi^4; \tag{21}$$

таким образом, эффект излучения нейтринных пар оказывается подавленным не только вследствие малости константы G^2m^4, но и вследствие зависимости от высокой степени χ.

В случае $\chi \gg 1$

$$\frac{I_\nu}{I_\gamma} \simeq \frac{1}{(4\pi)^3}\frac{3^{4/3}}{2\Gamma(2/3)}\frac{G^2m^4}{\alpha}\chi^{4/3}\ln\chi \simeq 10^{-24}\chi^{4/3}\ln\chi; \tag{22}$$

отсюда следует, что интенсивность излучения пар нейтрино и фотонов сравнивается при $\chi \sim 10^{16}$ в поле $H \sim 10^4$ эрст., это соответствует чудовищной энергии электронов $E \sim 10^{32}$ эв.

Заметим, что вероятность обратного μ-распада при $\chi \ll 1$ будет содержать дополнительную экспоненту $\exp(-\mathrm{const}/\chi(m_\mu/m_e)^2)$, и эффект оказывается еще меньше, при $\chi \gg 1$ вероятность процесса не превышает вероятности (18).

Авторы выражают глубокую благодарность акад. Г. И. Будкеру, В. С. Фадину, В. А. Хозе за многочисленные дискуссии.

Новосибирский государственный университет

Поступило
31 I 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Жарков, Ядерная физика, 1, 173 (1965). [2] Л. Б. Окунь, Слабое взаимодействие элементарных частиц, М., 1963. [3] В. Н. Байер, В. М. Катков, Ядерная физика, 3, 81 (1966). [4] А. А. Соколов, Введение в квантовую электродинамику, М., 1958. [5] И. М. Тернов, В. Г. Багров, Р. А. Рзаев, ЖЭТФ, 46, 374 (1964). [6] А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ, 46, 776 (1964). [7] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962, стр. 671.