

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ АНОМАЛЬНОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

С. С. Моисеев (Новосибирск)

Известно, что в слабонеоднородной среде в приближении геометрической оптики нормальные колебания являются независимыми. Приближение геометрической оптики нарушается, однако, вблизи точек, где волновой вектор $k(x)$ либо обращается в нуль («точки поворота»), либо волновые вектора, соответствующие различным типам колебаний, совпадают («точки пересечения решений»). В малых окрестностях этих точек разделение на отдельные нормальные колебания уже невозможно, что, например, в случае существования «точек пересечения решений», приводит к возможности появления, кроме падающей из бесконечности волны, еще новой волны с другими дисперсионными свойствами.

Однако рассмотренные до сих пор случаи «рождения» новой волны при прохождении таких особенностей падающей волной приводили к экспоненциально малому коэффициенту трансформации, а также к отсутствию отраженных волн (см., например, [1]; там же — библиография).

В [2] для системы двух связанных осцилляторов были получены правила обхода точек «пересечения» решений, приводящие также к появлению отраженных решений

$$\exp\left(\int \omega(t) dt\right) \rightarrow \exp\left(-\int \omega(t) dt\right)$$

где $\omega(t)$ — частота нормального колебания осциллятора, медленно зависящая от времени. При этом коэффициенты трансформации и отражения оказались экспоненциально малыми.

Задача распространения волн в среде математически вполне эквивалентна задаче о колебаниях двух связанных осцилляторов (необходимо только вместо медленной зависимости $\omega(t)$ от времени рассматривать медленную зависимость $k(x)$ от координаты). Поэтому результаты [2] могут быть перенесены на случай трансформации волн.

Ниже рассматривается появление отраженных волн при «пересечении» решений, а также появление проходящих волн с большим коэффициентом трансформации.

1. Представим k_1 в [виде

$$k_1 = 1/2(k_1 + k_2) + 1/2(k_1 - k_2) \quad (1.1)$$

Здесь $k_1(x)$, $k_2(x)$ — волновые векторы, совпадающие в некоторой точке комплексной x -плоскости.

Из (1.1) видно, что если в окрестности точек «пересечения» решений многозначным будет выражение $k_1 - k_2$, то возможно появление волны только с другими дисперсионными свойствами $k_1 \rightarrow k_2$ (так как может измениться лишь знак разности $k_1 - k_2$).

Если же $k_1 + k_2$ также будет неоднозначной функцией, то возможен, например, переход $k_1 \rightarrow -k_1$, что соответствует появлению отраженных волн. Здесь уместно подчеркнуть, что для появления отраженных волн неоднозначность $k_1 - k_2$, $k_1 + k_2$ необходима, но недостаточна, поскольку существенна также картина, расположенная относительно вещественной оси линии уровня для

$$\int (k_1 - k_2) dx, \quad \int (k_1 + k_2) dx$$

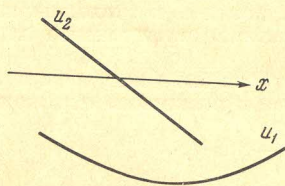
По крайней мере, именно в случае одновременной многозначности $k_1 - k_2$ и $k_1 + k_2$ появляются специфически новые условия обхода особых точек по сравнению с дифференциальным уравнением второго порядка (как видно из (1.1), различные слагаемые, из которых составлено например, k_1 , имеют свою систему линий уровня).

Попытаемся теперь выяснить возможность «рождения» в области «пересечения» решений новых волн ($k_1 \rightarrow k_2$) с коэффициентом порядка единицы.

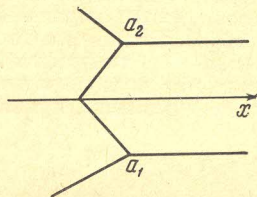
Если надо добиться большой трансформации, то необходимо создать условия непропускания падающей волны в некоторую область, в которой, однако, вторая из связанных между собой волн может распространяться свободно. Отметим, что в [2], в силу самой постановки задачи, коэффициенты уравнений нигде не обращались в нуль, а связанные между собой колебания существовали на всей вещественной оси. Это, в свою очередь, привело к картине линий уровня для

$$\int (k_1 + k_2) dx, \quad \int (k_1 - k_2) dx$$

вполне подобной картине линий уровня для $\int p dx$ в квантовой механике в случае надбарьерного отражения (см. [3], здесь p — импульс частицы). Напомним, что в последнем случае коэффициент отражения получается также экспоненциально малым.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим в дальнейшем для конкретности дифференциальное уравнение

$$\alpha\beta^2\varphi^{IV} - u_2(x)\beta\varphi'' + u_1(x)\varphi = 0 \quad (\beta = \lambda/R) \quad (1.2)$$

с двумя малыми параметрами α и β . Здесь λ — длина волны колебания, а R — характерный размер неоднородности; второй малый параметр α связан с конкретной физической ситуацией; в частности, приводимые здесь рассуждения годятся и в случае $\alpha = 1$. $u_1 \sim 1$, $u_2 \sim 1$, за исключением точек, где они могут обращаться в нуль.

Воспользуемся для (1.2) следующим представлением:

$$k_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \left[\left(\frac{u_2}{2\alpha} + \left(\frac{u_1}{\alpha} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \pm \left(\frac{u_2}{2\alpha} - \left(\frac{u_1}{\alpha} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \right] \quad (1.3)$$

Исследуем поведение $k_{2,1}$ вблизи точки, где $u_2 = 0$ (фиг. 1). Из (1.3) следует, что в области $x < 0$ существуют осциллирующие решения с волновым вектором k_1 ; соответственно в области $x > 0$ с волновым вектором k_2 (считаем, что начало отсчета помещено в точку $u_2 = 0$). Далее, записав $u_2 = ix$, $u_1 = u_{10}$ (в окрестности точки $u_2 = 0$ конкретный ход u_1 несуществен), видим из (1.3), что многозначной функцией является не только $k_1 - k_2$, но также и $k_1 + k_2$.

Картина расположения относительно вещественной оси линий уровня

$$\int (k_1 - k_2) dx, \quad \int (k_1 + k_2) dx$$

теперь совершенно непохожа на картину линий уровня для этих выражений в случае, подобном надбарьерному отражению в квантовой механике (см. фиг. 2; точки ветвления для $k_1 - k_2$ и $k_1 + k_2$ обозначены соответственно a_1 и a_2).

Обратим еще внимание, что для конкретных приложений уравнения (1.2) к вопросу о трансформации колебаний $u_1 < 0$ в точке, где $u_2 = 0$, как и изображено на фиг. 1. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим систему двух связанных осцилляторов

$$\alpha x'' + \omega_1^2(t) x = \nu(t) y, \quad y'' + \omega_2^2(t) y = \nu(t) x \quad (1.4)$$

которой при медленном изменении коэффициентов соответствует следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\alpha x^{IV} + (\omega_1^2 + \alpha \omega_2^2) x'' - (\nu^2 - \omega_1^2 \omega_2^2) x = 0 \quad (1.5)$$

Очевидно, что

$$u_2 = -(\omega_1^2 + \alpha \omega_2^2), \quad u_1 = -(\nu^2 - \omega_1^2 \omega_2^2); \quad u_1 < 0 \quad \text{при} \quad u_2 = 0$$

Выше указывалось, что по разные стороны от точки $u_2 = 0$ существуют осциллирующие решения с различными дисперсионными свойствами, поэтому здесь следует ожидать большой взаимной трансформации волн. Чтобы окончательно в этом убедиться, необходимо указать связь между решением уравнения (1.2) по обе стороны от точки $u_2 = 0$. Сделав замену $x = \beta y$, приведем (1.2) в окрестности точки $u_2 = 0$ к виду

$$\varphi^{IV} - \lambda_+^2 (uy\varphi'' + u_{10}\varphi) = 0 \quad (\lambda_+^2 = \beta^2/\alpha) \quad (1.6)$$

Свойства решений (1.6) при $\lambda_+ \gg 1$ были исследованы методом Лапласа в работе [4], а при $\lambda_+ \ll 1$ — методом фазовых интегралов в работах [5, 6] (в этом случае расстояние между точками a_1 и a_2 велико по сравнению с длиной волны пересекающихся решений, и каждую особую точку можно обходить в отдельности).

Заметим, что из анализа полученных решений в [4, 5] следует подобие асимптотик при $\lambda_+ \gg 1$ и $\lambda_+ \ll 1$. Для дальнейшего понадобится только асимптотический вид одного из решений, полученных в [4] при больших y

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi i y^{1/2} u_{10}^{-1/2} H_1^{(1)}(2u_{10}^{1/2} y^{1/2}) \quad (y < 0) \\ \varphi &= \sqrt{\pi} \lambda_+^{-2/3} (3/2\xi)^{-5/6} e^{-\xi} + \pi i y^{1/2} u_{10}^{-1/2} H_1^{(1)}(2u_{10}^{1/2} y^{1/2}) \quad (y > 0) \\ \xi &= i \lambda_+^{2/3} y^{3/2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из (1.7) видим, что в случае, когда вид u_2 и u_1 подобен изображенному на фиг. 1, решение с волновым вектором k_1 при $y < 0$ переходит при $y > 0$ в решение с волновым вектором k_2 (нетрудно видеть, что $H_1^{(1)}(2u_{10}^{1/2} y^{1/2})$ экспоненциально затухает при больших $y > 0$).

2. Перейдем теперь к некоторым конкретным приложениям.

В [7] рассматривался вопрос о взаимной трансформации быстрой и медленной магнитозвуковых волн в случае, когда многозначным является только выражение $(k_1 - k_2)$. Уравнение для указанных волн, полученное в [7], имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{IV} + \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} + \frac{\omega^2}{S^2} - k_y^2 \right) \varphi'' + \left[\frac{\omega^2}{v_A^2} \left(\frac{\omega^2}{S^2} - k_y^2 \right) - \frac{\omega^2 k_y^2}{S^2} \right] \varphi = 0 \\ v_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\varphi_0(z)}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь S — звуковая скорость, v_A — альфвеновская скорость, $\varphi_0(z)$ — плотность среды, неоднородная вдоль магнитного поля H_0 (H_0 направлено вдоль оси z).

Нетрудно видеть, что если существуют в среде точки z_0 , для которых выполняется условие

$$k_y^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2(z_0)} + \frac{\omega^2}{S^2} \quad (2.2)$$

то все изложенные здесь соображения и, в частности, формула (1.7) применимы к (2.1). Заметим, что вопрос об аномальной взаимной трансформации магнитогиродинамических волн может иметь, в частности, значение для создания теории нагрева хромосферы [8]. Рассмотрим вопрос о трансформации плазменной волны в электромагнитную, рассматривавшийся в [9]. Система уравнений для этого случая имеет следующий вид (см. [1]):

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{1}{\varepsilon - \alpha_1^2 \beta_T^2} \left(1 + \frac{\alpha_1^2 \beta_T^2}{1 - \varepsilon} \right) \frac{dw}{dz} + \quad (2.3)$$

$$+ k_0^2 (\varepsilon - \alpha_1^2) w = \frac{\alpha_1 \beta_T^2}{(1 - \varepsilon)(\varepsilon - \alpha_1^2 \beta_T^2)} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{du}{dz}$$

$$\beta_T^2 \frac{d^2 u_E}{dz^2} + \frac{\varepsilon \beta_T^2}{(1 - \varepsilon)(\varepsilon - \alpha_1^2 \beta_T^2)} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{du_E}{dz} + \quad (2.4)$$

$$+ k_0^2 (\varepsilon - \alpha_1^2 \beta_T^2) u_E = - \frac{\alpha_1 \beta_T^2}{\varepsilon - \alpha_1^2 \beta_T^2} \frac{d\varepsilon/dz}{1 - \varepsilon} \frac{dw}{dz} - k_0^2 \alpha_1 w$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \beta_T = \frac{v_T}{c}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \quad (v_T \ll c)$$

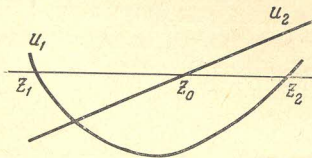
Здесь w — амплитуда проекции магнитного поля нормальных колебаний на ось x , u_E — амплитуда проекции электрического поля нормальных колебаний на оси z , α — синус угла падения плазменной волны на слой плазмы с переменной вдоль z плотностью N , k_0 — волновой вектор электромагнитной волны, β_T — малый параметр, v_T — тепловая скорость электронов, e — заряд электрона, m — его масса. Для простоты пренебрегаем поглощением волны. Как и в [9], аппроксимируем $\varepsilon(z)$ линейной функцией

$$\varepsilon(z) = -z \operatorname{grad} \varepsilon \quad (\operatorname{grad} \varepsilon \sim R^{-1}). \quad (2.5)$$

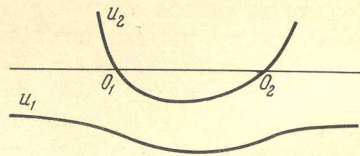
Если R достаточно велико, то нули u_2 , u_1 в дифференциальном уравнении четвертого порядка, эквивалентном (2.3) и (2.4), расположены соответственно в точках

$$z_0 = -2\alpha_1^2 \beta_T^2 R, \quad z_1 = -R\alpha_1^2, \quad z_2 = -R\alpha_1^2 \beta_T^2$$

а график u_2 , u_1 имеет вид, изображенный на фиг. 3.



Фиг. 3



Фиг. 4

Кроме того, уравнения (2.3), (2.4) имеют особенность в точке $z_2 = -R\alpha_1^2 \beta_T^2$. Если

$$\omega R \alpha_1^3 \beta_T^2 c^{-1} \gg 1 \quad (2.6)$$

то при обходе точки $u_2 = 0$ можно не учитывать указанную особенность.

Отметим, что условие (2.6) эквивалентно также тому, что в области $z_0 z_2$ укладывается много длин волн «моды» k_1 (длина волны которой $\lambda_1 \sim c / \omega \alpha_1$). Тогда, как нетрудно видеть, в окрестности точки $u_2 = 0$ система (2.3), (2.4) подобна уравнению (1.2) (наличие первой производной в уравнении не вносит существенных изменений в правила обхода $u_2 = 0$ (см. [10])).

Осциллирующие решения плазменной «моды» (с длиной волны $\lambda_2 \sim r_d$, где r_d — дебаевский радиус плазмы) существуют в области $z < z_0$. Если эта нормальная волна падает слева на окрестность точки z_0 , то, согласно (1.7), при $z > z_0$ она полностью переходит в другую нормальную волну с волновым вектором k_2 , что и смог бы зафиксировать приемник, помещенный в области $z_0 z_2$. Однако в случае, исследованном в [9], рассматривался выход электромагнитного излучения Солнца наружу, т. е. в сторону $z \ll z_0$ (плотность солнечной плазмы растет в сторону $z \rightarrow \infty$). При этом в области $z_1 z_0$ электромагнитное излучение, отраженное от точки z_2 , затухает, а далее осциллирует. Наличие барьера для электромагнитного излучения приводит к малому выходу его из солнечной плазмы.

Отметим еще, что большая трансформация возможна между обыкновенной и не-обыкновенной волнами. Так, можно показать, что в разреженной плазме аномальная трансформация возможна, если ларморовская частота, соответствующая проекции магнитного поля на направление распространения волн, порядок частоты этих волн.

Вопрос о трансформации волн, помимо самостоятельного интереса, может оказаться существенным для проблем устойчивости плазмы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример. Пусть ход коэффициентов u_1 и u_2 подобен изображенному на фиг. 4. При этом одна из «зацепляющих» волн (с волновым вектором k_1) осциллирует на бесконечности, а другая — затухает. Пусть в средней части области $O_1 O_2$ возникло нарастающее во времени локализованное возмущение («пакет»), образованное волнами с волновым вектором k_2 . При этом, если скорость ухода энергии на бесконечность за счет трансформации в волну другого типа превысит скорость поступления энергии в возмущение за счет источников неустойчивости, то неустойчивость не развивается, а сама плазма может теперь служить генератором уходящих на бесконечность колебаний.

Автор благодарит Р. З. Сагдеева за внимание к работе и ценные дискуссии.

Поступила 27 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

- Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет. Изд-во «Наука», 1964.
- Заславский Г. М., Моисеев С. С. Связанные осцилляторы в адиабатическом приближении. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 2, стр. 318.
- Покровский В. Л., Халатников И. М. К вопросу о надбарьерном отражении частиц высоких энергий. Ж. эксперим. и теор. физ., 1961, т. 40, № 6.
- W a s o w A. A study of the solutions of the differential equation $f^{IV} + \lambda_1^2(x\varphi' + \varphi) = 0$ for large values of λ_1 . Ann. of Math., 1950, vol. 52, № 2, p. 350.
- Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотический метод решения дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя малыми параметрами в гидродинамической теории устойчивости. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 6, стр. 1295.
- Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотические методы гидродинамической теории устойчивости. ПМТФ, 1964, № 5, стр. 44.
- Моисеев С. С., Смелянский В. Р. К вопросу о трансформации волн в магнитной гидродинамике. Магнитная гидродинамика, 1965, т. 2, стр. 132.
- Пикельнер С. Б., Лившиц М. А. К теории нагрева активной и невозмущенной хромосферы. Астрон. ж., 1964, т. 41, стр. 1007.
- Железняков В. В., Злотник Е. А. О переходе плазменных волн в электромагнитные в неоднородной изотопной плазме. Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 1962, т. 5, № 4, стр. 644.
- R a b e n s t e i n A. L. Asymptotic Solutions of $\varphi^{IV} + \lambda_1^2(x\varphi'' + u\varphi' + u_1\varphi) = 0$ for large $|\lambda_1|$. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1958, vol. 1 p. 418.