

$$W_{12} = \frac{2n_2 n_3 \operatorname{tg} \varphi}{a_1 \sqrt{\psi_1 \Delta} \delta} \left\{ q (m_2 \cos \gamma_{22} d - i m_3 \sin \gamma_{22} d) - r m_2 \cos \gamma_{21} d \right\} \cos (\theta_{11} - \varphi) + \\ + i \frac{r m_2}{\cos \theta_{21}} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{1/2} \cos \varphi + \sin \theta_{21} \cos (\theta_{11} + \varphi) \right] \sin \gamma_{21} d \quad (3.1)$$

$$W_{32}' = -\frac{1}{m_2} \left[ W_{12} (m_2 \cos \gamma_{22} d - i m_1 \sin \gamma_{22} d) + i W_{11} \frac{q}{a_1 \sqrt{\psi_1}} \operatorname{tg} \varphi \cos (\theta_{11} - \varphi) \sin \gamma_{22} d \right]$$

$$\Delta = n_2 (n_1 + n_3) \cos \gamma_{21} d - i (n_2^2 + n_1 n_3) \sin \gamma_{21} d, \quad q = m_2 a_2 = m_1 a_1$$

$$\delta = m_2 (m_1 + m_3) \cos \gamma_{22} d - i (m_2^2 + m_1 m_3) \sin \gamma_{22} d, \quad r = m_2 a_2 - m_3 a_3$$

$$n_\mu = \sqrt{\rho_\mu} \cos \theta_{\mu 1}, \quad m_\mu = \rho_\mu a_\mu, \quad \gamma_{21} = \frac{\omega \cos \theta_{21}}{a_2 \sqrt{\psi_2}}, \quad \gamma_{22} = \frac{\omega}{a_2 \sin \varphi}$$

Если толщина слоя значительно меньше длины быстрой магнитозвуковой волны  $\gamma_{21} d \ll 1$ , формулы (3.1) существенно упрощаются (3.2)

$$W_{31}' = \frac{n_1^2 - n_3}{n_1 + n_3} - 2i \frac{n_2^2 - n_1^2}{(n_1 + n_3)^2} \gamma_{31} d, \quad W_{11} = \frac{2n_3}{n_1 + n_3} + 2i \frac{n_2^2 + n_1 n_3}{(n_1 + n_3)^2} \gamma_{31} d \\ W_{32}' = \frac{\beta}{\delta \sqrt{\psi_1}} [r (m_2 \cos \gamma_{22} d - i m_1 \sin \gamma_{22} d) - q m_2], \quad \beta = \frac{2n_3 \operatorname{tg} \varphi \cos (\theta_{11} - \varphi)}{a_1 (n_1 + n_3)} \\ W_{12} = \frac{\beta}{\delta \sqrt{\psi_1}} [q (m_2 \cos \gamma_{22} d - i m_3 \sin \gamma_{22} d) - r m_2], \quad \gamma_{31} = \frac{\omega \cos \theta_{31}}{a_3 \sqrt{\psi_3}}$$

Теперь медленные волны будут возникать и в случае нормального падения. Согласно (3.2), они отсутствуют лишь при условии

$$\gamma_{22} d = (2N + 1) \pi, \quad 2\rho_2 a_2^2 = \rho_1 a_1^2 + \rho_3 a_3^2 \quad (3.3)$$

т. е. когда толщина слоя составляет нечетное число полуволн второго типа, а модуль упругости среды 2 равен среднему арифметическому модулей сред 3 и 1.

Поступила 14 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Косачевский Л. Я. Отражение магнитозвуковых волн на границе раздела двух сред с конечной электропроводностью. ПММ, 1965, т. 19, вып. 2.
2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, 1957.

#### О КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА В СЛУЧАЙНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Г. М. Заславский (Новосибирск)

Рассмотрено поведение осциллятора во внешнем случайном поле в приближении, когда длительность столкновения много больше периода осциллятора. Получено кинетическое уравнение, описывающее изменение со временем функции распределения координат и скоростей. Рассмотренная задача аналогична движению заряженной частицы во внешнем магнитном поле при наличии столкновений.

Известной ситуацией при изучении взаимодействия частиц плазмы с полем волн, развитых вследствие неустойчивостей, является возможность рассмотрения движения отдельной частицы в заданном случайном поле. Если к тому же имеется внешнее магнитное поле, то движение частицы аналогично движению осциллятора в поле случайных сил. Случайные силы, действующие на осциллятор, можно представить себе как последовательность импульсов с известным случайным законом распределения величины импульсов и промежутков времени между импульсами. В зависимости от времени длительности импульса  $\tau$  (времени «столкновения») и частоты осциллятора  $\omega$  возможны два предельных случая: 1)  $\omega \tau \ll 1$ ; 2)  $\omega \tau \gg 1$ . Первый случай достаточно хорошо изучен. Ниже рассматривается второй случай в приближении, когда средний интервал между импульсами много больше  $\tau$  (редкие «столкновения»).

Исходным уравнением, описывающим движение осциллятора, будет

$$x'' + [\omega^2 + F(t)] x = 0 \quad (1)$$

Здесь  $F(t)$  — последовательность достаточно гладких импульсов<sup>1</sup> (фиг. 1) с известным случайным законом распределения их формы и промежутков между ними. Условие достаточной «плавности» импульсов

$$\omega\tau \gg 1 \quad (2)$$

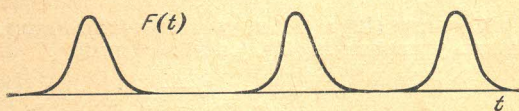
позволяет записать решение уравнения (1) в ВКБ-приближении [1]

$$x = Ax_+ + Bx_-, \quad x_{\pm} = \Omega^{-1/2} \exp \left\{ \pm i \int^t \Omega(t') dt' \right\}, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 + F(t)} \quad (3)$$

В интервале между столкновениями  $\Omega \approx \omega$  и решение (3) представляет собой обычные колебания. Действие столкновения приводит к изменению адиабатического инварианта ( $E$  — энергия осциллятора)

$$I = E/\Omega \quad (4)$$

аналогичному эффекту надбарьерного отражения в квантовой механике. Рассмотрим комплексную плоскость  $t$ . Линии уровня асимптотических решений (3) имеют вид, изображенный на фиг. 2. При этом считается, что ближайшими к действительной оси особенностями являются точки  $t_k, \bar{t}_k$  (черта означает комплексное сопряжение), в которых  $\Omega^2(t)$  имеет простой нуль



Фиг. 1

$$\Omega^2(t) = \psi(t) \prod_k (t - t_k)(t - \bar{t}_k) \quad (5)$$

где  $\psi(t)$  может иметь особенности или нули в точках с мнимой частью, много большей  $\text{Im } t_k$ . Изменение адиабатического инварианта при условии (5) возникает при прохождении достаточно узкой области вблизи точек  $O_k$  (фиг. 2) и вычислялось в [2].

Введем оператор сдвига  $T_n^+$

$$x(t + T_n) = T_n^+ x(t) \quad (6)$$

Здесь  $T_n$  — промежуток между  $O_{n+1}$  и  $O_n$ , а момент времени  $t$  лежит в интервале  $(O_{n-1}, O_n)$ . Воспользуемся для оператора  $T_n^+$  видом, приведенным в [3]

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + e^{-2\delta_n}} e^{i(1/2\pi + S_n + \varphi_n)} e^{-\delta_n - i(1/2\pi - S_n)} \\ e^{-\delta_n + i(1/2\pi - S_n)} \sqrt{1 + e^{-2\delta_n}} e^{-i(1/2\pi + S_n + \varphi_n)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\delta_n = -i \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Omega(t') dt' > 0, \quad S_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Omega(t') dt' > 0 \quad (8)$$

При этом оператор  $T_n^+$  действует на вектор-столбец с компонентами  $A_n x_+, B_n x_-$ . Фаза  $\varphi_n$  в (7) по порядку величины не более единицы, и точный вид ее в дальнейшем не понадобится. Оператор  $T_n^+$  имеет структуру

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1 \quad (9)$$

Выберем для удобства  $x$  в действительном виде, т. е.  $B = \bar{A}$ . Из (8) следует, что если  $B_n = \bar{A}_n$ , то  $B_{n+1} = \bar{A}_{n+1}$ . Отсюда, согласно (4),

$$I_n = |A_n|^2 \quad (10)$$

Учтем теперь, что столкновения редкие. Тогда

$$S_n \approx \omega T_n \gg 1 \quad (11)$$

и оператор сдвига принимает вид

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \varepsilon_n^2} e^{i\omega T_n} & \varepsilon_n e^{i\omega T_n} \\ \varepsilon_n e^{-i\omega T_n} & \sqrt{1 + \varepsilon_n^2} e^{-i\omega T_n} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n = \frac{1}{2} e^{-\delta_n} \quad (12)$$

<sup>1</sup> В дальнейшем действие импульса на частицу будем называть столкновением.

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение

$$\xi'' + \left[ \omega^2 + \sum_k u_k \delta(t - t_k^*) \right] \xi = 0 \quad (13)$$

решение которого на интервале  $(t_{n-1}^*, t_n^*)$  запишем в виде

$$\xi(t) = A_n^* \xi_+ + \bar{A}_n^* \xi_-, \quad \xi_{\pm} = e^{\pm i\omega t} \quad (14)$$

Оператор сдвига  $T_n^{+*}$  определим аналогично (6)

$$\xi(t + T_n^*) = T_n^{+*} \xi(t) \quad (T_n^* = t_{n+1}^* - t_n^*) \quad (15)$$

Имеем

$$T_n^{+*} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + 1/4 u_n^2 / \omega^2} e^{i(\varphi_n^* + \omega T_n^*)} & \frac{u_n}{2\omega} e^{i(1/2\pi + \omega T_n^*)} \\ \frac{u_n}{2\omega} e^{-i(1/2\pi + \omega T_n^*)} & \sqrt{1 + 1/4 u_n^2 / \omega^2} e^{-i(\varphi_n^* + \omega T_n^*)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\varphi_n^* = \arctg(u_n / 2\omega)$$

Сравним (12) и (16) и, учитывая (11), видим, что исходное уравнение (1) можно заменить уравнением (12), если положить

$$\xi = \sqrt{\Omega} x, \quad \varepsilon_n = u_n / 2\omega, \quad T_n^* = T_n \quad (17)$$

Перейдем к выводу кинетического уравнения. Пусть  $f(\xi, \eta, t)$  — плотность вероятности того, что в момент времени  $t$  переменная  $\xi$  лежит в интервале  $(\xi, \xi + d\xi)$ , а переменная  $\eta = \xi'$  — в интервале  $(\eta, \eta + d\eta)$ , причем

$$\int f(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 1$$

Точки  $t_k^*$  в уравнении (13) будем считать распределенными по закону Пуассона, т. е. вероятность того, что интервал между  $t_k^*$  и  $t_{k+1}^*$  лежит в области  $(T, T + dT)$ , равна

$$P(T) dT = \lambda e^{-\lambda T} dT \quad (18)$$

Предполагается известным также плотность вероятности  $w(\varepsilon)$  того, что  $\varepsilon_n$  (для любого  $n$ ) лежит в интервале  $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ . В случае (13) уравнение для  $f(\xi, \eta, t)$  рассматривалось в [4]; приведем его без вывода

$$\frac{\partial f(\xi, \eta, t)}{\partial t} = \left( \omega^2 \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) f(\xi, \eta, t) + \lambda \int d\varepsilon' w(\varepsilon') f(\xi, \eta + \omega \varepsilon' \xi, t) - \lambda f(\xi, \eta, t) \quad (19)$$

В частности, если

$$w(\varepsilon') = 1/\pi \delta(\varepsilon' - \varepsilon)$$

имеем

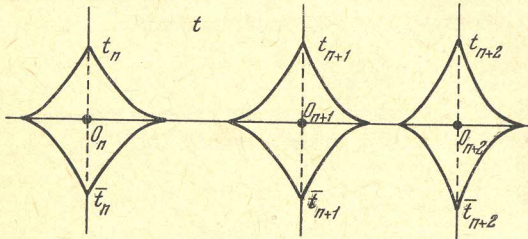
$$\frac{\partial f(\xi, \eta, t)}{\partial t} = \left( \omega^2 \xi \frac{\partial}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) f(\xi, \eta, t) + \lambda [f(\xi, \eta + \omega \varepsilon \xi, t) - f(\xi, \eta, t)] \quad (20)$$

При больших  $\delta$ , т. е. очень малых  $\varepsilon$ , получаем из (20) уравнение типа Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx (\omega^2 + \varepsilon \lambda \omega) \xi \frac{\partial f}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial f}{\partial \xi} + \lambda \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (21)$$

с коэффициентом диффузии

$$D \sim 1/2 \lambda \omega^2 \varepsilon^2 \xi^2 \quad (22)$$



Фиг. 2

Согласно (12), величина  $\varepsilon$  экспоненциально мала, и, следовательно, также мал коэффициент диффузии. Как увидим ниже, вторые моменты от  $f$ , которые, в силу (10) и (17), пропорциональны адиабатическому инварианту осциллятора  $I$ , растут со временем. Это приводит к тому, что, начиная с некоторых моментов времени, уравнение (21) перестает быть справедливым. Условие применимости уравнения (21) имеет вид

$$\xi \ll \xi_0 = \frac{2}{\omega\varepsilon} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \ln f \right]^{-1} \quad (23)$$

Введем вторые моменты функции распределения  $f$ :  $\langle \xi^2 \rangle$ ,  $\langle \xi \eta \rangle$ ,  $\langle \eta^2 \rangle$ , где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по  $f(\xi, \eta, t)$ . Уравнения для них, приведенные в [4], легко получаются из (20) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \xi^2 \rangle &= 2 \langle \xi \eta \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \xi \eta \rangle &= -(\omega^2 + \lambda \varepsilon \omega) \langle \varepsilon^2 \rangle + \langle \eta^2 \rangle \\ \frac{d}{dt} \langle \eta^2 \rangle &= \lambda \varepsilon^2 \omega^2 \langle \xi^2 \rangle - 2(\omega^2 + \lambda \varepsilon \omega) \langle \varepsilon \eta \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы (24) пропорционально  $e^{\Gamma t}$ , где  $\Gamma$  — корни уравнения

$$\Gamma^3 + 4(\omega^2 + \lambda \varepsilon \omega) \Gamma - 2\lambda \varepsilon^2 \omega^2 = 0 \quad (25)$$

Уравнение (25) всегда имеет один неустойчивый корень  $\Gamma_0 > 0$ , и в нашем случае

$$\Gamma_0 \approx 1/2 \varepsilon^2 \lambda = 1/8 \lambda \varepsilon^{-2\delta} \quad (26)$$

Таким образом, характерное время развития неустойчивости достаточно велико

$$\tau_R \sim 8e^{2\delta} \lambda^{-1} \quad (27)$$

В соответствии с (10), все вторые моменты пропорциональны  $I$ , и рост их в среднем со временем означает увеличение величины  $\langle I \rangle = \langle \xi^2 + \eta^2 / \Omega^2 \rangle$ .

Иногда удобно переписать уравнение (19) в переменных типа действие — фаза. Введем

$$I = \sqrt{\xi^2 + \omega^{-2}\eta^2}, \quad z = \eta / \omega \xi \quad (28)$$

Тогда уравнение (19) принимает вид

$$\frac{\partial F(I, z)}{\partial t} = \omega \frac{\partial}{\partial z} [(1 + z^2) F(I, z)] + \lambda \left\{ F(I^*, z^*) \frac{\partial (I^*, z^*)}{\partial (I, z)} - F(I, z) \right\} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} I^* &= I \left( \frac{1 + (z + \varepsilon / \omega)^2}{1 + z^2} \right)^{1/2}, \quad z^* = z + \frac{\varepsilon}{\omega} \\ F(I, z) dI dz &= f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (30)$$

Если проинтегрировать (29) по  $I$ , то получается кинетическое уравнение для фаз (точнее — для котангенса фаз  $z$ ). Однако кинетическое уравнение только для

$$F(I) = \int_{-\infty}^{\infty} F(I, z) dz$$

получить не удается.

Приведенный выше метод получения кинетического уравнения может быть применен и для более сложных, чем осциллятор, систем. При этом предполагается известным оператор сдвига  $T^+$  в ВКБ-приближении.

Автор благодарит Р. З. Сагдеева за полезные советы.

Поступила 12.III.1966

#### ЛИТЕРАТУРА

- Хединг Д. ж. Введение в метод фазовых интегралов. Изд. «Мир», 1965.
- Дыхне А. Квантовые переходы в адиабатическом приближении. Ж. эксперим. и теор. физ., 1960, т. 38, № 2.
- Заславский Г. М. Лекции по применению метода ВКБ в физике. Изд. Новосибирск. ун-та, 1965.
- Frisch H. Z., Lloyd S. P. Electron levels in a One-Dimensional Random Lattice. Phys. Rev., 1960, vol. 120, No. 4.