1966 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том XXXVI, в. 10
1966 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. XXXVI, № 10

ТОКОВО-КОНВЕКТИВНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ С БОЛЬШИМ ЛАРМОРОВСКИМ РАДИУСОМ ИОНОВ

А. А. Галеев

Найдено, что эффекты конечного ларморовского радиуса ионов полностью стабилизируют локализованную в пространстве rippling-моду диссипативных неустойчивостей Фюрта, Киллена и Розенблюта, обязанную наличию градиентов конечного сопротивления плазмы. Показано, что плазма с градиентами тока гидродинамически неустойчива по отношению к возбуждению возмущений альфвеновского типа. Эта неустойчивость также стабилизируется при учете конечного ларморовского радиуса ионов.

Систематизация диссипативных неустойчивостей неоднородной плазмы со скрученными силовыми линиями магнитного поля (shear) позволила свести их в три следующих класса в зависимости от причин, их вызывающих [1]: [1] 1) диссипативная гравитационная неустойчивость плазмы в поле тяжести; 2) неустойчивость относительно rippling-моды (или иначе токово-конвективная неустойчивость [2]) развивается в токонесущей плазме с неоднородным сопротивлением; 3) неустойчивость относительно tearing-моды, обязанная наличию градиентов тока.

Критерии развития этих диссипативных неустойчивостей оказались значительно слабее, чем критерии соответствующих гидродинамических неустойчивостей. Так, наиболее изученная диссипативная гравитационная неустойчивость остается даже тогда, когда гидродинамическая желобковая неустойчивость застабилизирована в плазме с большим ларморовским радиусом ионов или с большой перекрещенностью силовых линий. Учет влияния конечности ларморовского радиуса, произведенный в [3], также показал, что это влияние сводится к небольшому подсаживанию диссипативной неустойчивости, но не к ее полному подавлению.

В своей работе мы будем интересоваться лишь последними двумя типами неустойчивостей. Так, мы рассмотрим влияние эффектов конечного ларморовского радиуса ионов на эти неустойчивости (рассмотрение аналогичной задачи в [4], проведенное без анализа наличия областей локализации колебаний, не является правомерным).

Кроме того, мы приведем пример гидродинамической неустойчивости плазмы с градиентом тока относительно возмущений альфвеновского типа. Последняя обладает более низким порогом, чем подобные неустойчивости относительно потенциальных колебаний [5].

Итак, рассмотрим плоский слой плазмы, неоднородный по оси x, помещенный в сильное магнитное поле $H_0 = \{0, H_{0y}, H_{0z}\}$. Вследствие протекания тока $j_{0e} = -env_{0e}$ вдоль оси z силовые линии поля меняют свой угол наклона θ к оси z с координатой x: $H_{0z}\frac{d\theta}{dx} = \frac{4\pi j_{0e}}{c}$.

В качестве основной системы уравнений мы примем уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики плазмы, которая для интересующего нас случая плазмы низкого давления $\beta = \frac{8\pi nT}{H^2} \ll 1$ выписана в об-

[1] В этой работе мы не будем интересоваться раскачкой дрейфовых волн в плазме в отсутствие Shear'а, возможной при учете конечного сопротивления и рассмотренной С. Моисеевым и Р. Сагдеевым [6].

зоре [6]. Выбирая возмущения в виде $\sim\varphi_k(x)\,e^{-i\omega t+ik_y y+ik_z z}$, мы легко сводим их к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка для потенциалов возмущенных магнитного $A_{\mathbf{k}z}$ и электрического $\varphi_{\mathbf{k}}$ полей

$$\frac{\psi''}{\alpha^2}=\psi\left(1+\frac{p-i\omega_*^e}{\tilde{\eta}\alpha^2}\right)+\frac{w}{\alpha^2}\left(\frac{p-i\omega_{*\delta}^e}{p}\frac{F}{\tilde{\eta}}+\frac{\tilde{\eta}'F'}{\tilde{\eta}p}\right), \tag{1}$$

$$\frac{(\tilde{\rho}w')'}{\alpha^2}=w\left[\tilde{\rho}-\frac{S^2G}{p\,(p+i\omega_*^i)}+\frac{FS^2}{p+i\omega_*^i}\left(\frac{p-i\omega_{*\delta}^e}{p}\frac{F}{\tilde{\eta}}+\frac{\tilde{\eta}'F'}{\tilde{\eta}p}\right)\right]+$$
$$+\psi\frac{S^2}{p+i\omega_*^i}\left(\frac{F\,(p-i\omega_*^e)}{\tilde{\eta}}-F''\right). \tag{2}$$

Уравнения записаны в обозначениях работы [1]

$$\psi=A_{zk};\quad w=-i\tau_R k_y c\varphi_k;\quad \alpha=k_y a;\quad \mu=\frac{x}{a};\quad \tau_H=\frac{a}{v_A},$$

$v_A=\dfrac{H_0}{\sqrt{4\pi nM}}$ — альфвеновская скорость; $G=g\dfrac{n'}{n}$; g — ускорение в поле тяжести; $\tau_R=\dfrac{4\pi a^2}{c^2\eta_{e0}}$ — время диффузии магнитного поля в плазме с сопротивлением $\eta_{e0}\simeq\dfrac{m\nu_e}{n_0e^2}$; $F=\dfrac{k_{\|}}{k_y}$ — отношение проекции волнового вектора возмущений вдоль $k_{\|}$ и поперек k_y магнитного поля

$$\omega_*^i=\frac{k_ycT_{0i}}{eH_0}\frac{d\ln n_0T_{0i}}{dx}\tau_R;\qquad \omega_*^e=\frac{k_ycT_{0e}}{eH_0}\frac{d\ln n_0T_{0e}}{dx}\tau_R,$$

$$\omega_{*\delta}^e=\frac{k_ycT_{0e}}{eH_0}\frac{d\ln n_0T_{0e}^{1+\delta}}{dx}\tau_R;\qquad \tilde{\eta}=\frac{\eta_{e0}}{\bar{\eta}_{e0}};\qquad \tilde{\rho}=\frac{\rho}{\bar{\rho}}.$$

$\delta=0.71$ — коэффициент, входящий в определение термосилы в уравнении движения электронов. Штрих у функций w, ψ, F означает дифференцирование по безразмерной координате.

В уравнениях (1), (2) в отличие от (6) учтены „неквазиклассические“ члены $\tilde{\eta}'F'$ и F'', обязанные соответственно градиенту сопротивления η_{e0}' и тока в плазме $\dfrac{dj_{0e}}{dx}$.

Поэтому даже в отсутствие поля тяжести $g\equiv 0$ в координатном пространстве система (1)—(2) не сводится, как в (6), к одному уравнению. Однако положение меняется, если перейти в пространство волновых чисел k_0. При этом, как и в (1), будем предполагать закон изменения угла наклона силовых линий к оси z линейным $\theta\equiv\dfrac{H_{0y}}{H_{0z}}\equiv F'(\mu-\mu_0)$, а $F''=\mathrm{const}\neq 0$. Тогда для величины

$$w_t(k_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}w(\mu)\,e^{ik_0\mu}\,d\mu\,\exp\left\{-i\int\left(\frac{\tilde{\eta}'}{p-i\omega_{*\delta}^e}+\frac{\frac{F''}{F'}}{k_0^2+\alpha^2}\right)dk_0\right\}, \tag{3}$$

получим уравнение

$$\frac{d}{dk_0}\frac{k_0^2+\alpha^2}{k_0^2+\alpha^2+p-i\omega_*^e}\frac{dw_t}{dk_0}+w_t\left\{\frac14\frac{k_0^2+\alpha^2}{k_0^2+\alpha^2+p-i\omega_*^e}\left(\frac{\tilde{\eta}'}{p-i\omega_{*\delta}^e}+\frac{\frac{F''}{F'}}{k_0^2+\alpha^2}\right)^2-\right.$$
$$-\frac{p\,(p+i\omega_*^i)}{p-i\omega_{*\delta}^e}\left[\frac{k_0^2+\alpha^2}{\alpha^2S^2F'^2}-\frac{\frac{G}{F'^2}}{p\,(p+i\omega_*^i)}\right]+$$
$$\left.+\frac{i}{2}\left(\frac{\tilde{\eta}'}{p-i\omega_{*\delta}^e}+\frac{\frac{F''}{F'}}{p-i\omega_*^e}\right)\frac{d}{dK_0}\frac{p-i\omega_*^e}{k_0^2+\alpha^2+p-i\omega_*^e}\right\}=0. \tag{4}$$

Наиболее просто отсюда находится rippling-мода колебаний. Для этой моды основным является член с градиентом сопротивления, что справедливо при условиях

$$p - i\omega_{*\delta}^{e} \gg k_0^2 + \alpha^2, \tag{5а}$$

$$G \ll \frac{F'^2 \tilde{\eta}'^2}{p - i\omega_{*\delta}^{e}}. \tag{5б}$$

Первое из этих неравенств вытекает из уравнения равновесия плазмы с током [1]

$$\frac{\tilde{\eta}' F'}{\tilde{\eta}} = -F'',$$

которое, правда, может не выполняться в случаях, когда shear создается внешним током. Второе неравенство следует прямо из уравнения (4).

В приближениях (5а), (5б) уравнение (4) как в координатном пространстве, так и в пространстве волновых чисел принимает вид уравнения Шредингера для гармонического осциллятора. Собственные значения частоты при этом определяются уравнением

$$\frac{\tilde{\eta}'^2}{4(p - i\omega_{*\delta}^{e})^2} - \frac{p(p + i\omega_*^{i})}{(p - i\omega_{*\delta}^{e}) S^2 F'^2} = \frac{2m+1}{\alpha S |F'|} \sqrt{\frac{p(p + i\omega_*^{i})}{p - i\omega_{*\delta}^{e}}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

В приближении нулевого ларморовского радиуса $p \gg \omega_*$ мы получаем результаты работы [1]. Заметим, что уравнение (6) для собственных значений частот имеет смысл лишь для решений $w(k_0)$, обращающихся при $k_0 \to \pm\infty$ в нуль $w(\pm\infty) = 0$. Зависимость же возмущенной функции $w_t(k_0)$ от k_0 определяется, как известно, выражением

$$w_t(k_0) = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_m(k_0 \sqrt{\Omega})}{\sqrt{2^m m!}} e^{-\frac{\Omega^2 k_0^2}{2}}, \tag{7}$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{\alpha S |F'|} \sqrt{\frac{p(p + i\omega_*^{i})}{p - i\omega_{*\delta}^{e}}},$$

где H_m — полином Эрмита порядка m, а ветвь квадратного корня в (7) выбирается так же, как и в (6). Отсюда следует, что для случая реальных p [1] возмущения локализованы в k_0-, а также и μ-пространстве. Если же ларморовский радиус ионов R_H не очень мал

$$\frac{\beta^{1/2} R_H}{a} > [\alpha S]^{-3/5} \left| \frac{\tilde{\eta}'^2 |F'|}{4} \right|^{2/5}, \tag{8}$$

то мы должны в (6) и (7) учесть дрейф ионов и электронов под действием градиентов давления. Используя связь между собственными значениями (6) и характером поведения на бесконечности (7), легко убедиться, что все финитные решения (типа $w_t(k_0) \to 0$ при $k_0 \to \pm\infty$) затухают. Таким образом, при условии $\omega_* \geq \mathrm{Re}\, p$ (8) возмущения типа rippling-моды стабилизируются полностью, а не частично, как утверждается в [4]. Найденные же в [4] нарастающие решения фиктивны, так как не могут быть локализованы в пространстве.

Рассмотрим далее случай, когда более существенным является член, связанный с градиентом тока $F'' = \frac{4\pi}{cH_{0z}} \frac{dj_{0e}}{dx}$. Это имеет место для возмущений с частотами $p - i\omega_*^{e} \gg k_0^2 + \alpha^2$. Уравнение для них имеет вид

$$\frac{d^2 V_t}{dk_0^2} + \left\{ \frac{\left(\frac{F''}{2F'}\right)^2 - \alpha^2}{(k_0^2 + \alpha^2)^2} - \frac{p(p + i\omega_*^{i})(p - i\omega_*^{e})}{(p - i\omega_{*\delta}^{e}) \alpha^2 S^2 |F'|^2} \right\} V_t = 0,$$

$$w_t = \frac{V_t}{\sqrt{k_0^2 + \alpha^2}}. \tag{9}$$

Легко видеть, что в однородной плазме без shear'а оно переходит в дисперсионное уравнение для альфвеновских волн. Решить такое уравнение точно довольно трудно, и мы поэтому воспользуемся приближенным уравнением для собственных значений, справедливым для случая финитных решений [7]

$$\left(\frac{F''}{2k_\perp^2 F'}\right)^2 - \frac{p\,(p+i\omega_*^i)\,(p-i\omega_*^e)}{(p-i\omega_{*\delta}^e)\,\alpha^2 S^2 |F'|^2} = 0.$$

Здесь мы учли, что финитные решения существуют лишь для достаточно протяженных в направлении оси y возмущений

$$\alpha < \left|\frac{F''}{2F'}\right|. \tag{10}$$

Это условие затрудняет развитие такого рода возмущений в цилиндрических установках. Наиболее неустойчивы решения с $k_0 \sim \alpha \sim \frac{F''}{2F'}$.

Не теряя общности, мы можем положить $\omega_{*\delta}^e \equiv \omega_*^e$, тогда получим

$$p = -\frac{i\omega_*^i}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{|F''|^2 S^2 \alpha^2}{k_\perp^4} - \omega_*^{i2}}. \tag{11}$$

Инкремент неустойчивости не зависит от частоты столкновений и равен

$$\gamma \approx \Omega_H \left|\frac{\alpha}{en_0 v_A k_\perp^2}\frac{dj_{0e}}{dx}\right| \geqslant \Omega_H R_H^2 \left(\frac{d\ln n_0 T_{0i}}{dx}\right)^2. \tag{12}$$

Здесь ограничение на величину тока, при котором развивается неустойчивость, находится из условия малости эффектов конечности ларморовского радиуса ионов. В бесстолкновительном пределе этот результат справедлив, если только давление плазмы не слишком мало

$$\beta \equiv \frac{8\pi n_0 T_{0i}}{H_0^2} > \frac{m}{M}\,(k_\perp^2 R_H^2). \tag{13}$$

В противном случае инерция электронов играет для неустойчивости более существенную роль, чем учтенная здесь упругость силовых линий магнитного поля. Как показано в работе [8], для подобных возмущений рассматриваемая здесь инерция электронов играет роль, аналогичную конечной проводимости для tearing-моды [1].

Автор благодарит Р. З. Сагдеева за ценные советы и стимулирующие дискуссии и С. С. Моисеева за полезное обсуждение работы.

Литература

[1] H. P. Furth, J. Killen, M. N. Rosenbluth. Phys. Fluids, *6*, 459, 1963. — [2] B. B. Kadomtzev, A. W. Nedospasov. J. Nucl. Energy, P. C. *1*, 230, 1960. — [3] B. Coppi. Phys. Rev. Lett., *12*, 417, 1964. — J. D. Jukes. Phys. Fluids, *7*, 1468, 1964. — [4] B. Coppi. Phys. Fluids, *7*, 1501, 1964. — [5] E. Harrison. Proc. Phys. Soc., *B82*, 689, 1963; E. Harrison, T. Stringer. Proc. Phys. Soc., *B82*, 689, 1963; А. Б. Михайловский. ЖЭТФ, *48*, 380, 1965. — [6] А. А. Галеев, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. Атомная энергия, *15*, 451, 1963. — [7] А. А. Галеев. ЖЭТФ, *44*, 1920, 1963. — [8] H. P. Furth. Nuclear Fusion. Suppl, *1*, 169, 1962.

Поступило в Редакцию
22 октября 1965 г.