Журнал экспериментальной и теоретической физики

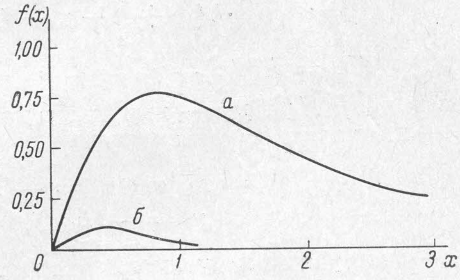
Т. 50 *1966* *Вып. 6*

ИЗЛУЧЕНИЕ ДВУХ ФОТОНОВ В ЗАДАННЫЙ УГОЛ ПРИ ЭЛЕКТРОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе

Рассмотрен процесс излучения двух фотонов с произвольной энергией в заданный угол при электронных столкновениях. Полученное сечение $d\sigma_{\omega_1\omega_2}$ имеет вид полинома по степеням ω_1, ω_2. В случае, когда угловые размеры детекторов ϑ_0 порядка $1/\gamma$, коэффициенты при степенях $\omega_{1,2}$ вычислены численно. В случае $\vartheta_0 \gg 1/\gamma$ получено аналитическое выражение для сечения.

1. Процесс излучения двух фотонов с произвольной энергией при электронных столкновениях был исследован в работах Галицкого и одного из авторов [1–3]. Этот процесс представляет большой интерес для ставящихся в настоящее время опытов на встречных пучках по двум причинам: 1) он может быть использован в качестве монитора для регистрации столкновения пучков; 2) в случае электрон-позитронных соударений процесс двойного тормозного излучения конкурирует с процессом двухквантовой аннигиляции; это связано с тем, что сечение двойного тормозного излучения, в отличие от сечения двухквантовой аннигиляции, не падает с ростом энергии сталкивающихся частиц.



Ранее [1–3] с точностью до членов порядка γ^{-2} ($\gamma = \varepsilon / m$, ε — энергия начальных электронов в СЦМ) было найдено сечение двойного тормозного излучения [1] $d\sigma_{\omega_1\omega_2}$, проинтегрированное по конечным состояниям электронов (поскольку электроны не регистрируются) и по всем углам вылета фотонов (что предполагает, что угловые размеры детекторов фотонов значительно превышают характерный угол излучения $1/\gamma$). Однако в реальных экспериментах по исследованию двойного тормозного излучения, которые ставятся при относительно малых энергиях, угловые размеры детекторов $2\vartheta_0$ сравнимы с величиной $1/\gamma$ (например, на установке ВЭП-1 в Новосибирске [4] $\varepsilon = 43$ *Мэв*, $\vartheta_0 \sim 3/\gamma$). В связи с этим представляет интерес сечение излучения двух фотонов в заданный угол. Мы будем для простоты предполагать, что углы обоих детекторов одинаковы $\vartheta_{10} = \vartheta_{20} = \vartheta_0$, хотя, как показано в конце статьи, предлагаемый подход элементарно обобщается на случай детекторов разных размеров.

2. Для качественного понимания ситуации, возникающей в данной задаче, рассмотрим излучение классических фотонов [1]. В этом случае легко получить сечение излучения в заданный угол, поскольку независимо интегрируется вклад каждого из классических токов. Рассмотрим интеграл

[1] В статье используются обозначения, принятые в [1–3].

по квадрату передачи импульса $\Delta^2 / m^2 = 4x^2$ (формула (53) предыдущей работы [2]). Подынтегральная функция $f(x)$ приведена на рисунке для случаев: 1) разрешены все углы вылета фотонов ($f(x) = \Phi^2(x^2) / x^3$) — кривая a; 2) угол вылета фотонов не больше $\vartheta_0 = 1 / \gamma$ — кривая $б$. Видно, что основной вклад в интеграл вносит область $x \sim 1$. Поскольку характерный угол излучения фотонов $\vartheta_k \sim 1 / \gamma$, то при $\vartheta_0 = 1 / \gamma$ мы обрезаем значительную часть области интегрирования по углу вылета фотона, что существенно уменьшает подынтегральную функцию при интегрировании по x, тем более, что это относится к каждому из двух фотонов. Кроме того, при $x > 1$ вероятность излучения фотона мала при малых ϑ_k и достигает максимума только при $\vartheta_k \sim 1 / \gamma$, что приводит к дополнительному подавлению подынтегральной функции при $\vartheta_0 = 1 / \gamma$, которая, таким образом, спадает быстрее при $x > 1$.

В результате сечение излучения в угол $\vartheta_0 = 1 / \gamma$ составляет лишь малую долю сечения излучения, проинтегрированного по всем углам вылета фотонов.

3. Перейдем теперь к рассмотрению излучения фотонов с произвольной энергией в заданный угол. С этой целью преобразуем формулу (3) в [3] к следующему виду [2)]:

$$d\sigma = \frac{2\alpha^4}{(2\pi)^3} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \frac{d\xi_2}{\xi_2} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} dR_1\, dR_2, \tag{1}$$

где

$$dR_1 = \left[-\frac{1}{\varkappa_3{}^2} + \frac{\Delta^2[1 + (1-\xi_1)^2] + 4(1-\xi_1)}{2\varkappa_1 \varkappa_3} - \frac{(1-\xi_1)^2}{\varkappa_1{}^2} \right] \cdot$$
$$\cdot \delta(p_1 + \Delta - p_3 - k_1)\, \xi_1 \frac{d^3p_3}{\varepsilon_3} d\varkappa_1\, d\varkappa_3\, d\varphi_1, \tag{2}$$
$$dR_2 = dR_1(p_1 \to p_2, \quad p_3 \to p_4, \quad k_1 \to k_2, \quad \Delta \to -\Delta, \quad \varphi_1 \to \varphi_2);$$

здесь p_1, p_2 (p_3, p_4) — импульсы начальных (конечных) электронов, k_1, k_2 — импульсы фотонов,

$$\xi_i = \omega_i / \varepsilon, \quad \varkappa_1 = -(k_1p_1), \quad \varkappa_2 = -(k_2p_2),$$
$$\varkappa_3 = -(k_1p_3), \quad \varkappa_4 = -(k_2p_4),$$

$\varphi_{1,2}$ — азимутальные углы вылета фотонов в СЦМ при условии, что за полярные оси приняты соответственно направления векторов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$. Поскольку интегрирование по углам вылета фотона (переменные $\varkappa_1$, $\varkappa_2$) ведется в заданных пределах, оказывается целесообразным изменить порядок интегрирования, принятый ранее [2, 3], и выполнить сначала интегрирование по переменным $\varkappa_3$, $\varkappa_4$.

Выполняя интегрирование по $d^3p_3 d\varphi_1$, получаем

$$\int \delta(p_1 + \Delta - k_1 - p_3) \frac{d^3p_3}{\varepsilon_3} d\varphi_1 = \frac{2}{g \sin\varphi_1}, \tag{3}$$

где $g \sin\varphi_1 = \sqrt{U_1}$; U_1 есть квадратичная форма $\varkappa_3$:

$$U_1 = c\varkappa_3{}^2 + bx_3 + a. \tag{4}$$

Пределы интегрирования по $\varkappa_3$ определяются нулями функции U_1. Этот факт легко понять с помощью простых кинематических соображений. Дело в том, что φ_1 есть угол между плоскостями $(\mathbf{p}_1, \mathbf{\Delta})$ и $(\mathbf{p}_1, \mathbf{k}_1)$, причем угол между векторами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{k}_1$ является постоянным (поскольку фиксирована величина $\varkappa_1 = -(p_1k_1)$). При изменении φ_1 от нуля до 2π функция

[2)] Отсюда и далее $m = 1$.

$\varkappa_3 = \varkappa_3(\cos\varphi_1)$ пробегает все значения внутри интервала интегрирования, тогда пределы интегрирования по $\varkappa_3$ определяются из условия $d\varkappa_3 / d\varphi_1 = 0$, из которого следует $\sin\varphi_1 = 0$. При этом все четыре вектора $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{\Delta}$ лежат в одной плоскости.

В соответствии с постановкой задачи мы будем вычислять старший член разложения сечения по степеням ε^{-2} [2, 3]. Поскольку мы будем вести интегрирование по $\varkappa_1$ до верхнего предела $\varkappa_{1max} \ll \varepsilon^2$, то в выражении для U_1 (коэффициенты a, b, c в формуле (4)) мы отбросим члены порядка $\varkappa_1 / \varepsilon^2$. Более того, в случае произвольных углов излучения фотона верхний предел интегрирования по $\varkappa_1$ пропорционален ε^2 и поэтому, ввиду сходимости интеграла, с принятой точностью может быть положен равным бесконечности. В силу этого основной вклад в интеграл по $\varkappa_1$ дают малые $\varkappa_1$ ($\varkappa_1 \sim 1$), так что всегда можно отбросить члены $\varkappa_1 / \varepsilon^2$ [2]. Вследствие того, что на верхней границе области интегрирования по переменным $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ эти величины порядка $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, Δ^2 (а не ε^2), и с учетом того, что основной вклад в интегральное сечение дают $\varkappa_1, \varkappa_2 \sim 1$ (см. выше) и $\Delta^2 \sim 1$ [2, 3], мы отбросим также члены $\sim \varkappa_4 / \varepsilon^2$. Сделав указанные выше пренебрежения, получаем

$$c = -(1-\xi_1)^2, \qquad b = 2(1-\xi_1)\left[\varkappa_1 + \frac{\xi_1\Delta^2}{2}\right],$$

$$a = -\left(\varkappa_1 - \frac{\xi_1\Delta^2}{2}\right)^2 - \xi_1^2\Delta^2. \tag{5}$$

Видно, что функция U_1 не содержит величины $\varkappa_4$. Таким образом, с указанной точностью оказывается возможным независимо проводить интегрирование по переменным, относящимся к каждому из фотонов [2, 3].

Интегрируя R_1 по $\varkappa_3$, получаем

$$\int\limits_{\varkappa_3} dR_1 = 2\pi\xi_1\left[-\frac{b}{2(-a)^{3/2}} + \frac{\Delta^2[1+(1-\xi_1)^2] + 4(1-\xi_1)}{2\varkappa_1(-a)^{1/2}} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1-\xi_1}{\varkappa_1^2}\right)\right] d\varkappa_1. \tag{6}$$

Имеем также

$$\int\limits_{\varkappa_4} dR_2 = \int\limits_{\varkappa_3} dR_1 \begin{pmatrix} \varkappa_1 \to \varkappa_2 \\ \xi_1 \to \xi_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Приступим теперь к интегрированию по $\varkappa_1$. Нижний предел интегрирования определяется из условия $\vartheta_k = 0$, откуда с точностью до членов ε^{-2} получаем $\varkappa_{1min} = \xi_1 / 2$. Верхний предел интегрирования по $\varkappa_1$ определяется предельным углом вылета фотона ϑ_0:

$$\varkappa_{1max} = \xi_1\varepsilon^2(1 - \beta\cos\vartheta_0) = \xi_1\varkappa_0.$$

Если представить $\vartheta_0 = n / \varepsilon$, то $\varkappa_0 = n^2 / 2$ при $n \ll \varepsilon$. Проводя элементарное интегрирование по $\varkappa_1$ (и соответственно $\varkappa_2$), получаем следующее выражение для сечения двойного тормозного излучения:

$$d\sigma = \frac{8r_0^2\alpha^2}{\pi}\frac{d\xi_1}{\xi_1}\frac{d\xi_2}{\xi_2}\int\frac{dx}{x^3}\cdot$$
$$\cdot\left\{(1-\xi_1)\Phi(x^2) + \xi_1^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - F(x,\varkappa_0,\xi_1)\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{(1-\xi_2)\Phi(x^2) + \xi_2^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - F(x,\varkappa_0,\xi_2)\right\}, \tag{8}$$

где

$$F(x, \varkappa_0, \xi_1) = \frac{1}{4}\left[\frac{(1-\xi_1)+[2(1-\xi_1)+\xi_1^2]x^2}{x\sqrt{1+x^2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ln\left(\frac{2x(1-x^2)-x\varkappa_0+\sqrt{(1+x^2)R_0}}{\varkappa_0[\sqrt{1+x^2}-x]}\right)-(1-\xi_1)\left(1+\frac{1}{\varkappa_0}+\frac{1-\varkappa_0+2x^2}{\sqrt{R_0}}\right)\right], \tag{9}$$

$$R_0 = (2x^2-\varkappa_0)^2+4x^2. \tag{10}$$

Ясно, что при $\varkappa_0 \to \infty$ функция $F(x, \varkappa_0, \xi_1) \to 0$, так что формула (8) переходит в формулу (4) из [3]. Легко видеть, что при $x \to 0$ слагаемое $F(x, \varkappa_0, \xi_1)$, подобно остальной части выражения, стоящего в фигурных скобках, пропорционально x^2, так что, как и прежде, нижний предел интегрирования по x можно положить равным нулю. Аналогично, верхний предел интегрирования по x можно положить равным бесконечности.

4. Входящие в формулу (8) однократные интегралы не удается вычислить в аналитическом виде, поэтому они были вычислены с помощью ЭВМ — электронной вычислительной машины М-20.

Сечение двойного тормозного излучения в заданный угол представим в виде

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{8r_0^2\alpha^2}{\pi}\left\{\left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\eta_1(n)+\left[\left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_2^2}{\varepsilon^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2}\right]\eta_2(n)+\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\varepsilon^4}\eta_3(n)\right\}\frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2}. \tag{11}$$

Численные значения функций $\eta_m(n)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов $\eta_m(n)$ в формуле (11)

n $\left(\vartheta_0=\frac{n}{\varepsilon}\right)$	$\eta_1(n)$		$\eta_2(n)$		$\eta_3(n)$	
	ЭВМ	формула (12)	ЭВМ	формула (12)	ЭВМ	формула (12)
1	0,081	—	0,065	—	0,053	—
2	0,406	—	0,311	—	0,237	—
3	0,743	—	0,555	—	0,412	—
4	1,02	1,07	0,744	0,748	0,543	0,534
5	1,23	1,24	0,885	0,881	0,638	0,631
10	1,77	1,77	1,23	1,23	0,863	0,862

5. В области значений $1 \ll n \ll \varepsilon$ оказывается возможным получить аналитическое выражение для искомого сечения. В этом случае асимптотические выражения для коэффициентов $\eta_m(n)$ в формуле (11) имеют вид

$$\eta_1(n) = \frac{5}{4}+\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{1}{n^2}\left[10\ln^2 n-\frac{\pi^2}{2}+\frac{11}{2}\right],$$

$$\eta_2(n) = \frac{1}{2}+\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{1}{2n^2}\left[10\ln^2 n+5\ln n-\frac{\pi^2}{2}+\frac{9}{2}\right], \tag{12}$$

$$\eta_3(n)=\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{1}{2n^2}\left[5\ln^2 n+5\ln n-\frac{\pi^2}{4}+\frac{5}{2}\right].$$

Как видно из табл. 1, начиная с $n=4$, результаты, получаемые с помощью формул (12), находятся в хорошем соответствии с результатами численного расчета.

6. Мы рассмотрели случай симметричных детекторов. В случае несимметричных детекторов можно непосредственно воспользоваться формулой (8), только функции $F(x, \varkappa_{0i}, \xi_i)$ будут зависеть каждая от своего предельного угла. Особый интерес представляет случай, когда угловые размеры одного из счетчиков очень велики ($\vartheta_{20} \gg 1/\varepsilon$), а второго — малы ($\vartheta_{10} \sim 1/\varepsilon$), тогда для одного из фотонов можно провести интегрирование по всем углам вылета фотона (как в [1–3]), а для рассмотрения излучения второго фотона воспользоваться подходом настоящей статьи. Сечение процесса представим в виде

Таблица 2

Значения коэффициентов $\mu_m(n)$ в формуле (13)

n $\left(\vartheta_0=\frac{n}{\varepsilon}\right)$	$\mu_1(n)$		$\mu_2(n)$		$\mu_3(n)$		$\mu_4(n)$	
	ЭВМ	формула (14)	ЭВМ	формула (14)	ЭВМ	формула (14)	ЭВМ	формула (14)
1	0,299	—	0,281	—	0,215	—	0,199	—
2	0,805	—	0,628	—	0,568	—	0,441	—
3	1,16	—	0,859	—	0,811	—	0,601	—
4	1,40	1,40	1,01	1,01	0,972	0,956	0,705	0,696
5	1,56	1,56	1,12	1,12	1,08	1,07	0,776	0,770
10	1,95	1,95	1,35	1,35	1,34	1,34	0,930	0,930

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2}=\frac{8r_0^2\alpha^2}{\pi}\left\{\left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\mu_1(n)+\left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2}\mu_2(n)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_2^2}{\varepsilon^2}\mu_3(n)+\frac{\omega_1^2\,\omega_2^2}{\varepsilon^4}\mu_4(n)\right\}\frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2}. \tag{13}$$

Значения функций $\mu_m(n)$ приведены в табл. 2. Для случая $1 \ll n \ll \varepsilon$ легко получить также асимптотические выражения для этих функций:

$$\begin{aligned}
\mu_1(n)&=\frac{5}{4}+\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{3}{n^2}[2\ln^2 n+1],\\
\mu_2(n)&=\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{1}{n^2}\left[3\ln^2 n+\ln n+\frac{3}{2}\right],\\
\mu_3(n)&=\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{1}{n^2}[3\ln^2 n+2\ln n+1],\\
\mu_4(n)&=\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{3}{2n^2}\left[\ln^2 n+\ln n+\frac{1}{2}\right].
\end{aligned} \tag{14}$$

Эти выражения, так же как формула (12), начиная с $n=4$, находятся в хорошем согласии с результатами численного расчета (см. табл. 2).

Авторы выражают благодарность А. П. Онучину за обсуждение вопросов, связанных с экспериментом, и Г. И. Русовой и Э. З. Боровской за помощь в численных расчетах.

Новосибирский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 января 1966 г.

Литература

[1] V. N. Bayer, V. M. Galitsky. Phys. Letters, **13**, 355, 1964.
[2] В. Н. Байер, В. М. Галицкий. ЖЭТФ, **49**, 661, 1965.
[3] В. Н. Байер, В. М. Галицкий. ЖЭТФ, Письма, **2**, 259, 1965.
[4] Г. И. Будкер, Е. А. Кушниренко, А. А. Наумов и др. Доклад на Международной конференции по ускорителям во Фраскати, 1965.

EMISSION OF TWO PHOTONS INTO A GIVEN ANGLE IN ELECTRON COLLISIONS

V. N. Bayer, V. S. Fadin, V. A. Khoze

Emission of two photons of arbitrary energy into a given angle in electron collisions is considered. The cross section $d\sigma_{\omega_1\omega_2}$ is a polynomial in powers of ω_1, ω_2. The coefficients of this polinomial are calculated numerically for the case when the angular dimensions of the detectors ϑ_0 are of the order of $1/\gamma$. For $\vartheta_0 \gg 1/\gamma$ an analytic expression for the cross section has been obtained.