ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Т. 51 *1966* *Вып. 2(8)*

О СПЕКТРЕ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЛАЗМЕ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В. Е. Захаров

Получено кинетическое уравнение, описывающее четырехплазмонные процессы в плазме без магнитного поля, и показано, что оно имеет точное решение. Решение может быть интерпретировано как спектр турбулентности в области универсального равновесия. Доказано, что турбулентность имеет локально-изотропный характер.

§ 1. Введение

Как известно, слабая турбулентность плазмы может быть двух типов [1, 2]. Слабая турбулентность первого типа обусловлена процессами рассеяния волн на частицах плазмы; она изучалась во многих работах [1, 2]. Слабая турбулентность второго типа обусловлена процессами распада, слияния и рассеяния волн друг на друге, происходящими без обмена энергией между частицами и волнами. Мы покажем, что слабая турбулентность этого типа обладает свойствами, во многом аналогичными свойствам обычной гидродинамической турбулентности. Именно, в k-пространстве можно выделить область волновых чисел, в которой спектр турбулентности имеет универсальный степенной характер, определяемый только величиной потока энергии в область больших k.

В гидродинамической турбулентности доказательство этого факта опирается на соображения размерности и на гипотезу о локальности турбулентности, т. е. на предположение о том, что интенсивно взаимодействуют между собой только пространственные масштабы одного порядка величины [3, 4]. Несмотря на многочисленные попытки доказательства этого утверждения, оно до сих пор является эвристическим. Трудность заключается в том, что для описания гидродинамической турбулентности не удается построить замкнутую систему уравнений. В теории слабой турбулентности можно продвинуться значительно дальше благодаря тому, что слабая турбулентность описывается кинетическим уравнением для волн.

Мы рассмотрим один из простейших случаев слабой турбулентности — систему взаимодействующих лэнгмюровских плазмонов в изотермической плазме без магнитного поля, когда главным процессом взаимодействия плазмонов является их рассеяние друг на друге. Поскольку этот процесс не зависит от детальной структуры функции распределения электронов по скоростям, для описания плазмы можно применить гидродинамические уравнения. Исходя из них, мы получим кинетическое уравнение для плазмонов. Анализ кинетического уравнения показывает, что оно имеет точное решение $n_k = \mathrm{const}\, k^{-13/3}$, которое может быть интерпретировано как спектр в области универсального равновесия. К этому же решению приводят соображения размерности, причем $\mathrm{const} \sim p^{1/3}$, где p — поток энергии в область больших k. Одновременно удается доказать локальную изотропию турбулентности.

Аналогичные результаты были получены ранее для одной модельной задачи [5] и для слабой турбулентности волн на поверхности жидкости [6].

§ 2. Кинетическое уравнение для плазмонов

Будем исходить из системы гидродинамических уравнений для электронной жидкости в присутствии положительно заряженного фона

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -3\omega_p{}^2 r_D{}^2 \frac{\nabla n}{n} - \frac{e}{m}\nabla\varphi,$$

$$\partial n / \partial t + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi e(n - n_0).$$

Здесь n и $\mathbf{v}$ соответственно плотность и скорость электронов, n_0 — невозмущенная плотность, φ — электростатический потенциал, ω_p и r_D — лэнгмюровская частота и дебаевский радиус плазмы.

Уравнения (1) пригодны для описания движений с малыми градиентами $(\nabla n / n \ll 1 / r_D)$. В этих предположениях электростатическое давление много больше газокинетического, поэтому член с газокинетическим давлением линеаризован по n.

Совершим фурье-преобразование по координатам в нормировочном объеме V и перейдем к новым переменным a_k по формулам

$$\mathbf{v} = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \left(\frac{\omega_k}{2mn_0}\right)^{1/2} \frac{\mathbf{k}}{k}(a_k - \overset{*}{a}_{-k})\, e^{i(\mathbf{kr})},$$

$$(2)$$

$$\delta n = n - n_0 = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_k \left(\frac{n_0}{2m\omega_k}\right)^{1/2} k\,(a_k + \overset{*}{a}_{-k})\, e^{i(\mathbf{kr})}.$$

Здесь $\omega_k = \omega_p + {}^3/_2\omega_p(kr_D)^2$ — закон дисперсии лэнгмюровских волн. В дальнейшем всюду предполагается $kr_D \ll 1$.

В переменных a_k уравнения (1) принимают вид

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i\omega_k a_k = -i \sum_{k',\,k''} \Gamma_{kk'k''}(a_{k'}a_{k''}\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') +$$

$$+ 2a_{k'}{}^* a_{k''}\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}'' - \mathbf{k}') + a_{k'}{}^* \overset{*}{a}_{k''}\delta(\mathbf{k}, -\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')). \qquad (3)$$

Матричный элемент Γ для $kr_D \ll 1$ имеет вид

$$\Gamma_{kk_1k_2} = (\omega_p / 8Vn_0m)^{1/2} Q_{kk_1k_2},$$

$$Q_{kk_1k_2} = \frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\,k}{k_1k_2} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)\,k_2}{kk_1} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_2)\,k_1}{kk_2}. \qquad (4)$$

Уравнение (3) может быть получено в вариационной форме

$$\partial a_k / \partial t = -i\partial H / \partial a_k{}^*, \qquad (5)$$

где гамильтониан H есть

$$H = \sum_k \omega_k a_k a_k{}^* + \frac{1}{3}\sum_{k_1k_2} \Gamma_{kk_1k_2}(a_k a_{k_1} a_{k_2} +$$

$$+ a_k{}^* a_{k_1}{}^* a_{k_2}{}^*)\,\delta(\mathbf{k}, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \sum_{k_1,k_2} \Gamma_{kk_1k_2}(a_k{}^* a_{k_1} a_{k_2} +$$

$$+ a_k\, a_{k_1}{}^* a_{k_2}{}^*)\,\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

В выбранной нами нормировке H совпадает с полной энергией плазмы, задаваемой формулой

$$H = \int d\mathbf{r}\left[\frac{m}{2}n(\mathbf{v})^2 + \frac{1}{8\pi}(\nabla\varphi)^2\right].$$

Займемся упрощением уравнения (3). Для этого представим a_k в виде

$$a_k = [A_k(t) + f(k, t)]e^{-i\omega_p t}. \tag{6}$$

Здесь A_k — медленно меняющаяся функция с характерным временем изменения, много большим чем $1/\omega_p$; величина f существенно меняется за время порядка $1/\omega_p$. Подставим (6) в уравнение (3) и исключим f. Для этого в правой части оставим только члены, квадратичные по A, далее, воспользовавшись медленностью изменения A, проинтегрируем полученное уравнение по времени. Кроме того, при интегрировании пренебрежем тепловыми поправками в законе дисперсии ω_k. Получим

$$f = \frac{1}{\omega_p}\sum_{k_1k_2}\Gamma_{kk_1k_2}(A_{k_1}A_{k_2}e^{-i\omega_p t}\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) -$$
$$- 2A_{k_1}{}^*A_{k_2}\, e^{i\omega_p t}\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) - {}^1/_3 A_{k_1}{}^*A_{k_2}{}^*e^{3i\omega_p t}\delta(\mathbf{k}, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2).$$

Подставляя f в правую часть уравнения (3) и учитывая только члены, не содержащие быстрых экспонент, получим для A_k

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} + i\Omega_k A_k = -\frac{i}{8Vmn_0}\sum_{k_1,k_2,k_3} S_{kk_1k_2k_3}A_{k_1}{}^*A_{k_2}A_{k_3}\cdot$$
$$\cdot\,\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \tag{7}$$

Здесь

$$\Omega_k = {}^3/_2\omega_p(kr_D)^2, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}S_{k,\,k_1,\,k_2,\,k_3} = {} & 2Q_{k+k_1,\,k,\,k_1}Q_{k_2+k_3,\,k_2,\,k_3} - {}^1/_3 Q_{-k-k_1,\,k,\,k_1}Q_{-k_2-k_3,\,k_2,\,k_3} - \\ & - 2Q_{k,\,k_2,\,k-k_2}Q_{k_1,\,k_3,\,k_3-k_1} - 2Q_{k,\,k_3,\,k-k_3}Q_{k_1,\,k_2,k_2-k_1} - \\ & - 2Q_{k,\,k_2,\,k_2-k}Q_{k_1,\,k_3,\,k_1-k_3} - 2Q_{k,\,k_3,\,k_3-k}Q_{k_1,\,k_2,\,k_1-k_2}.\end{aligned} \tag{9}$$

Функция $S_{k,\,k_1,\,k_2,\,k_3}$ удовлетворяет условиям симметрии

$$S_{k,\,k_1,\,k_2,\,k_3} = S_{k_1,\,k,\,k_2,\,k_3} = S_{k,\,k_1,\,k_3,\,k_2} = S_{k_2,\,k_3,\,k,\,k_1}. \tag{10}$$

Для применимости уравнения (8) необходимо выполнение условия $f \ll A$, что приводит к требованию малой нелинейности $\delta n / n \ll 1$. Уравнение (8) вполне аналогично гейзенберговским уравнениям движения для бозе-газа, причем, A_k и $A_k{}^*$ — классические аналоги операторов уничтожения и рождения квантов. Уравнение (8) сохраняет энергию, импульс и полное число плазмонов

$$N = \sum_k A_k A_k{}^*.$$

Уравнению (7) соответствует гамильтониан

$$\bar{H} = \sum_k \Omega_k A_k A_k{}^* + \frac{1}{16mVn_0}\sum_{k,k_1,k_2,k_3} S_{kk_1k_2k_3}A_k{}^*A_{k_1}{}^*A_{k_2}A_{k_3}\cdot$$
$$\cdot\,\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}^1\ \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3).$$

Перейдем теперь к статистическому описанию системы. Примем гипотезу о хаотичности фаз колебаний, соответствующих различным k, и перейдем к новой переменной — плотности числа частиц

$$n_k = \langle A_k A_k^* \rangle.$$

Здесь скобки означают усреднение. Для n_k получим кинетическое уравнение

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{\pi}{32V^2 n_0^2 m^2} \sum_{k_1,k_2,k_3} |S_{kk_1k_2k_3}|^2 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3) \cdot$$
$$\cdot (n_{k_1}n_{k_2}n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2}) \cdot$$
$$\cdot \delta(\Omega_k + \Omega_{k_1} - \Omega_{k_2} - \Omega_{k_3}) + \gamma_k n_k. \tag{11}$$

Кинетическое уравнение описывает столкновения плазмонов. Кроме этого, существует еще и коллективное взаимодействие плазмонов, приводящее к сдвигу частоты плазмонов. Сдвиг частоты задается формулой

$$\Delta\Omega_k = \frac{1}{16mVn_0} \sum_{k_1} S_{k,k_1,k,k_1} n_{k_1}. \tag{12}$$

Уравнение (11) справедливо, если $\Delta\Omega_k \ll \Omega_k$. В уравнении (11) еще добавлен член $\gamma_k n_k$, который описывает взаимодействие плазмонов с электронами плазмы. Этот член вычислен в работе Галеева, Карпмана и Сагдеева [1], он сохраняет число плазмонов, но приводит к потере плазмонами энергии.

Функция S_{k,k_1,k_2,k_3} — однородная функция второй степени. Исследуем ее поведение в том случае, когда один из ее аргументов стремится к нулю. Пусть, например, это аргумент k. Вычисление показывает, что хотя некоторые из членов выражения (8) остаются конечными при $k \to 0$, происходит сокращение главных членов, и функция $S_{kk_1k_2k_3}$ имеет асимптотическое поведение

$$S_{k,k_1,k_2,k_3} \approx kW(k_1, k_2, k_3) \quad \text{при} \quad k \to 0. \tag{13}$$

$W(k_1, k_2, k_3)$ — однородная функция первой степени.

Аналогичным свойством обладает функция S_{k,k_1,k,k_1}. Если один из ее аргументов много больше другого, она имеет асимптотику

$$S_{k,k_1,k,k_1} \sim 16[(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) - kk_1].$$

Заметим еще, что для одномерного случая, когда все векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ параллельны и направлены в одну сторону, функция $S_{kk_1k_2k_3}$ тождественно обращается в нуль.

§ 3. Анализ размерностей

Устремим нормировочный объем V к бесконечности, а переменную n_k умножим на $(2\pi)^3/V$; новую переменную, которая теперь имеет смысл плотности числа частиц в шестимерном фазовом пространстве $(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, обозначим той же буквой. Суммирование заменим интегрированием. Уравнения примут вид

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{\pi}{32} \frac{1}{m^2 n_0^2} \int |S_{k,k_1,k_2,k_3}|^2 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) \cdot$$

$$\cdot\,\delta(\Omega_k + \Omega_{k_1} - \Omega_{k_2} - \Omega_{k_3})\,\cdot$$
$$\cdot\,(n_{k_1}n_{k_2}n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} n_{k_3})\, d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 + \gamma_k n_k, \qquad (14)$$

а условие его применимости

$$\frac{1}{4(2\pi)^3 m n_0} \int S_{k,k_1k,k_1} n_{k_1}\, d\mathbf{k}_1 \ll \Omega_k. \qquad (15)$$

Главный член кинетического уравнения имеет порядок

$$(kr_D)^2 (\mathscr{E}/nT)^2 n_k, \quad \text{где} \quad \mathscr{E} \sim \omega_0 \int n dk$$

— плотность энергии колебаний, а член $\gamma_k n_k$ имеет порядок [1]

$$\gamma_k n_k \sim (kr_D)^3 (\mathscr{E}/nT) n_k.$$

Отсюда следует, что при $k \ll k_s$, $k_s = \mathscr{E}/r_D nT$ рассеянием плазмонов на электронах можно пренебречь.

В этой области уравнение (14) имеет три интеграла движения — импульс $P = \int \mathbf{k} n_k d\mathbf{k}$, число частиц $N = \int n_k d\mathbf{k}$, а также интеграл движения $T = \int \Omega_k n_k d\mathbf{k}$, который по аналогии с бозе-газом мы назовем кинетической энергией плазмонов.

Рассмотрим теперь задачу об эволюции волнового пакета со средним волновым числом k. Пакет предполагается существенно неодномерным, но не обязательно изотропным. Пусть среднее волновое число пакета $k_0 \ll k_s$. Тогда все фазовое пространство разбивается на три области — энергосодержащую ($k \sim k_0$), область рассеяния ($k \sim k_s$) и промежуточную область ($k_0 < k < k_s$). Пусть в начальный момент времени волновой пакет заполнял энергосодержащую область. Под действием столкновений часть плазмонов уходит в промежуточную область. При этом вследствие законов сохранения числа частиц и кинетической энергии средний квадрат волнового числа остается неизменным, так что весь пакет в целом дрейфует в область малых k. Вероятность для плазмона попасть в область рассеяния мала, поэтому спектр числа частиц весьма круто падает в область больших k. Плазмоны, попадающие в область рассеяния, теряют свою кинетическую энергию и возвращаются в область малых k, однако их вклад в общий баланс числа частиц незначителен.

Таким образом устанавливается поток кинетической энергии плазмонов в область больших k и систематический дрейф волнового пакета в целом в область малых k.

Далее по аналогии с гидродинамической турбулентностью [3, 4] выскажем гипотезу о том, что в области промежуточных волновых чисел спектр турбулентности определяется единственной величиной p — потоком кинетической энергии плазмонов в область больших k, так что промежуточная область есть область универсального равновесия.

Поток легко может быть выражен через характеристики пакета в энергосодержащей области. Пусть n_{k_0} — характерная плотность частиц в энергосодержащей области. Тогда из уравнения (14) имеем

$$p = \int \Omega_k \frac{\partial n_k}{\partial t}\, d\mathbf{k} \sim \frac{1}{m^2 n_0^2}\, k_0^4 (n_{k_0} k_0^3)^3. \qquad (16)$$

С другой стороны, в промежуточной области поток должен быть выражен через n_k и k, откуда имеем

$$p \sim k^4 (n_k k^3)^3 / m^2 n_0^2.$$

Отсюда получаем

$$n_k \sim (pn_0^2 m^2)^{1/3} k^{-13/3} \sim n_{k_0}(k_0 / k)^{13/3}. \qquad (17)$$

Выражение (16) вполне аналогично формуле для колмогоровского спектра в обычной турбулентности $\mathscr{E}_k \sim \varepsilon^{2/3} k^{-11/3}$, где ε — поток энергии в области больших k.

Из формулы (15) можно оценить скорость движения волнового пакета в область малых k. Имея в виду, что полное число частиц сохраняется, можно получить

$$\frac{d}{dt}(r_D k_0)^2 \approx \frac{p}{\omega_p N} \approx \omega_p \left(\frac{\mathscr{E}}{nT}\right)^2 (r_D k_0)^4.$$

Отсюда $(r_D k_0)^2 \sim \tau / t$, где $\tau^{-1} \sim \omega_p (\mathscr{E} / nT)^2$. Средний квадрат волнового числа можно трактовать как температуру газа плазмонов. Из сказанного видно, что под действием столкновений происходит охлаждение газа плазмонов, причем температура убывает пропорционально $1 / t$.

Число частиц при этом сохраняется, поэтому существенной диссипации энергии лэнгмюровских колебаний не происходит. Эта диссипация может произойти только за счет кулоновских столкновений.

§ 4. Точное решение кинетического уравнения

Покажем сейчас, что полученная спектральная плотность $n_k = \mathrm{const}\, k^{-13/3}$ обращает в нуль столкновительный член кинетического уравнения

$$\int |S_{kk_1k_2k_3}|^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\, \delta(\Omega_k + \Omega_{k_1} - \Omega_{k_2} - \Omega_{k_3}) \cdot$$
$$\cdot (n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} + n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} n_{k_3}) \cdot d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 = 0. \qquad (18)$$

Будем предполагать, что n_k зависит только от модуля k и воспользуемся соотношением

$$\delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp\{i(\lambda, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\}\, d\lambda.$$

Уравнение (18) умножим на k^2 и проинтегрируем по углам в k-пространстве. Получим уравнение

$$\int V_{k,k_1,k_2,k_3} \delta(k^2 + k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)(n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} +$$
$$+ n_k n_{k_2} n_{k_3} - n_k n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_1} n_{k_3})\, dk_1\, dk_2\, dk_3 = 0.$$

Здесь

$$V_{k,k_1,k_2,k_3} = k^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2 \int \exp\{i(\lambda, \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\} \cdot$$
$$\cdot |S_{k,k_1,k_2,k_3}|^2 d\Omega\, d\Omega_1\, d\Omega_2\, d\Omega_3, \qquad (19)$$

Ω_i — элемент телесного угла в пространстве k_i.

Очевидно, функция $V_{kk_1k_2k_3}$ является однородной функцией степени 9. Она обладает теми же свойствами симметрии, что и функция $S_{kk_1k_2k_3}$.

Перейдем теперь к переменной $\omega = k^2$ и умножим для сохранения симметрии ядра уравнение (18) на $dk / d\omega = 1 / 2\sqrt{\omega}$. Получим уравнение

$$\int T(\omega, \omega' + \omega'' - \omega, \omega', \omega'')(n_{\omega'} n_{\omega''} n_{\omega'+\omega''-\omega} +$$
$$+ n_\omega n_{\omega'} n_{\omega''} - n_\omega n_{\omega'} n_{\omega'+\omega''-\omega} - n_\omega n_{\omega''} n_{\omega'+\omega''-\omega})\, d\omega' d\omega'' = 0. \qquad (20)$$

Здесь

$$T(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/2} V(\sqrt{\omega}, \sqrt{\omega_1}, \sqrt{\omega_2}, \sqrt{\omega_3}).$$

Функция T удовлетворяет соотношениям симметрии (9) и является однородной функцией порядка $5/2$. Интегрирование в плоскости ω', ω'' ведется по заштрихованной области (см. рисунок). Будем искать решение в виде $n_\omega = c\omega^s$. Разобьем область интегрирования на четыре области (I, II, III, IV) и посредством замены переменных отобразим каждую из областей (II, III, IV) на область I.

Формулы замены переменной следующие: для области II

$$\omega' \to \frac{\omega''\omega}{\omega' + \omega'' - \omega}, \quad \omega'' \to \frac{\omega'\omega}{\omega' + \omega'' - \omega}; \tag{21}$$

для области III

$$\omega' \to \frac{(\omega' + \omega'' - \omega)\,\omega}{\omega''}, \quad \omega'' \to \frac{\omega^2}{\omega''};$$

для области IV

$$\omega' \to \frac{\omega^2}{\omega'}, \quad \omega'' \to \frac{(\omega' + \omega'' - \omega)\,\omega}{\omega'}.$$

Рассмотрим на примере области II, как преобразуются подынтегральные выражения. Заметим, что при преобразовании (21) $\omega' + \omega'' - \omega$ переходит в $\omega^2 / (\omega' + \omega'' - \omega)$, так что

$$T_{\omega,\omega'+\omega''-\omega,\omega',\omega''} \to T_{\omega,\alpha\omega,\alpha\omega'',\alpha\omega'} =$$

$$= \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega}\right)^{5/2} T_{\omega'+\omega''-\omega,\omega,\omega'',\omega'} =$$

$$= \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega}\right)^{5/2} T_{\omega,\omega'+\omega''-\omega,\omega',\omega''},$$

где $\alpha \equiv \omega / (\omega' + \omega'' - \omega)$. Здесь мы использовали свойства однородности и симметрии функции T. Аналогично преобразуется выражение в скобках, содержащее произведения n_ω. Якобиан преобразования равен $\omega^3 / (\omega' + \omega'' - \omega)^3$. Выполняя преобразование во всех областях и собирая все члены, получим уравнение

$$\int\limits_{(I)} \frac{T_{\omega,\omega'+\omega''-\omega,\omega',\omega''}}{\omega'^s\omega''^s(\omega'+\omega''-\omega)^s}\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega}\right)^s - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^s - \left(\frac{\omega}{\omega''}\right)^s\right]\left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega' + \omega'' - \omega}\right)^{11/2+3s} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^{11/2+3s} - \left(\frac{\omega}{\omega''}\right)^{11/2+3s}\right] d\omega' d\omega''. \tag{22}$$

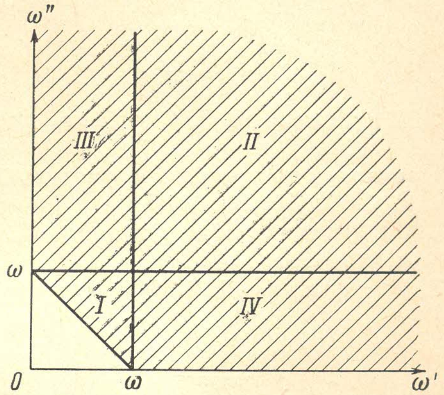
Интегрирование ведется по области (I). Функция T положительна; скобки под интегралом в уравнении (22) обращаются в нуль при $s = -1$, $11/2 + 3s = -1$, что дает два решения:

$$n_\omega = \mathrm{const}\cdot\omega^{-1} \quad \text{и} \quad n_\omega = \mathrm{const}\cdot\omega^{-13/6}.$$

Переходя к переменным k, имеем решения $n_k = \mathrm{const}\cdot k^{-2}$ и $n_k = \mathrm{const}\cdot k^{-13/3}$. Первое из решений есть распределение Рэлея — Джинса. Очевидно, в нашем случае оно не применимо. Второе решение есть спектр, полученный нами ранее из соображений размерности. Легко убедиться, что других степенных решений уравнение (17) не имеет.

Необходимо еще доказать сходимость интегралов в уравнении (17) при подстановке в него найденного решения. Рассмотрим сначала область малых k.

Опасными являются области, в которых каждый из аргументов k_1, k_2, k_3 по отдельности обращается в нуль, а также области, где одновременно обращаются в нуль пара аргументов k_1, k_2 или k_1, k_3. Рассмотрим область обращения в нуль аргумента k_1 $(k_2k_3 \neq 0)$. В этой области согласно (9) ядро подынтегрального выражения имеет вид $k_1^2[W(k_2, k_3)]^2$, так что схо-



димость интегралов в этой области обеспечена. Аналогично интеграл сходится в областях, где обращаются в нуль аргументы k_2 и k_3.

Рассмотрим теперь окрестность прямой, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. Вблизи этой прямой наиболее сильно расходящимся является выражение

$$n_{k_1}n_{k_2}(n_{k_3} - n_k) \approx n_{k_1}n_{k_2}(k_1 - k_2)\partial n_k / \partial k.$$

Учитывая асимптотику ядра подынтегрального выражения, по подсчету степеней можно заключить, что в этой области интеграл также сходится. Аналогично рассматривается область, в которой обращаются в нуль k_1 и k_3. Рассмотрим сходимость на больших k. Вследствие сохранения кинетической энергии, к бесконечности одновременно стремятся два аргумента, например k_1 и k_2. При больших k наиболее медленно убывающий член кинетического уравнения пропорционален

$$n_kn_{k_3}(n_{k_1} - n_{k_1+k-k_3}) = (k - k_3)n_kn_{k_3}\partial n_{k_1} / \partial k_1.$$

Учитывая, что при больших k_1 ядро пропорционально k_1^2, имеем для главного члена $k_1^2\partial n_{k_1} / \partial k_1 \sim k_1^{-3-1/3}$, так что сходимость обеспечена.

Фактически в энергосодержащей области решение отлично от $\mathrm{const}\cdot$ $\cdot k^{-13/3}$. Однако сходимость интеграла на малых k приводит к тому, что вклад от энергосодержащей области в область промежуточных волновых чисел пропорционален $(k_0 / k)^{1/3}k^{-5}$, тогда как вклад области волновых чисел порядка k пропорционален k^{-5}. Таким образом, вкладом от энергосодержащей области следует пренебречь. Аналогично, вклад от области затухания в область промежуточных волновых чисел имеет порядок $(k / k_s)^{1/3}k^{-5}$, и этим вкладом в промежуточную область также можно пренебречь. Эти соображения доказывают локальную изотропию турбулентности.

Таким образом, решение имеет порядок n_{k_0} при $k \sim k_0$ и $n_{k_0}(k_0 / k)^{13/3}$ при $k \gg k_0$. Подставим это решение в неравенство (15). Заметим, что главный вклад дает интегрирование по энергосодержащей области. Получаем неравенство

$$n_{k_0} \ll \frac{1}{k_0^3} \frac{nT}{\omega_0},$$

которое ограничивает область применения кинетического уравнения для описания турбулентности плазмы.

В заключение автор благодарит Л. И. Рудакова за ценные советы.

Поступила в редакцию
31 марта 1966 г.

Литература

[1] А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 5, 1965, стр. 20.
[2] Б. Б. Кадомцев. Вопросы теории плазмы, 4, Атомиздат, 1964.
[3] А. Н. Колмогоров. ДАН СССР, 30, 299, 1941.
[4] А. М. Обухов. Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., *5*, 1941.
[5] В. Е. Захаров. ПМТФ, *4*, 35, 1965.
[6] В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко. ДАН СССР (в печати).

WEAK TURBULENCE SPECTRUM IN A PLASMA WITHOUT A MAGNETIC FIELD

V. E. Zakharov

A kinetic equation describing four-plasmon processes in a plasma without a magnetic field is derived and it is shown that it has an exact solution. The solution may be interpreted as the turbulence spectrum in the universal equilibrium region. It is demonstrated that the turbulence is of a local-isotropic nature.

Технический редактор *Л. М. Михина*

Т. 09676 Подписано к печати 5/VIII—1666 г. Тираж 2700 экз. Зак. 900
Формат бумаги 70 × 108 1/16 Печ. л. 28 Бум. л. 10 Уч.-изд. листов 27,1

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10