Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 51 *1966* *Вып. 3(9)*

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОМПОНЕНТ ПЛОТНОСТИ ТОКА

В. В. Соколов, И. Б. Хриплович

В симметричной псевдоскалярной мезонной теории с псевдовекторной связью плотность нуклонного тока определяется так, что она не коммутирует с каноническим импульсом мезонного поля. Обсуждаются некоторые свойства такой теории.

Интересные результаты, полученные в последнее время в физике элементарных частиц с помощью подхода, связанного с алгеброй токов, вновь пробудили интерес к исследованию одновременных коммутаторов. В связи с этим приобрел значение вопрос о непротиворечивости канонических перестановочных соотношений. Выяснение этого вопроса в различных вариантах теории поля может оказаться полезным.

В свое время Швингер доказал, что вакуумное среднее от коммутатора плотности сохраняющегося тока с плотностью заряда не может равняться нулю [1]. Он же нашел, как следует определять ток, чтобы этот результат согласовывался с одновременными перестановочными соотношениями (см. также [2]). Совсем недавно Окубо показал, что результат Швингера является следствием только ковариантности и спектральности и имеет место также для несохраняющегося тока [3]. Рассматривая затем псевдоскалярную мезонную теорию с псевдовекторной связью, Окубо пришел к выводу, что упомянутое требование несовместимо с каноническими перестановочными соотношениями этой теории. Отсюда он заключил, что последняя является внутренне противоречивой. Однако это утверждение Окубо ошибочно. Отмеченное в [3] кажущееся противоречие устраняется путем более аккуратного определения плотности тока, подобно тому, как это делается в квантовой электродинамике.

Система спинорного и псевдоскалярного полей с псевдовекторной связью описывается изотопически-инвариантным лагранжианом

$$L = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m_0)\psi + {}^1\!/_2\partial_\mu\varphi^\alpha\partial_\mu\varphi^\alpha - {}^1\!/_2\mu_0^2\varphi^\alpha\varphi^\alpha + j_\mu{}^\alpha\partial_\mu\varphi^\alpha. \tag{1}$$

(В наших обозначениях $\hat{\partial} = \gamma_\mu\partial_\mu = \gamma_0\partial_0 - \gamma_m\partial_m$; $\gamma_0{}^+ = \gamma_0$; $\gamma_m{}^+ = -\gamma_m$; $\gamma_5{}^+ = \gamma_5$; $\Box = -\partial_\mu\partial_\mu$. Верхние индексы относятся к изотопическим степеням свободы.) Вопрос о корректном определении аксиального спинорного тока $j_\mu{}^\alpha(x)$ будет детально обсуждаться ниже.

Для дальнейшего нам необходимы канонический импульс скалярного поля

$$\pi^\alpha(x) = \dot{\varphi}^\alpha(x) + j_0{}^\alpha(x), \tag{2}$$

уравнения движения

$$(\Box - \mu_0^2)\varphi^\alpha(x) = \partial_\mu j_\mu{}^\alpha(x) \tag{3}$$

и одновременные перестановочные соотношения

$$[\varphi^\alpha(\mathbf{x}), \pi^\beta(0)] = i\delta^{\alpha\beta}\delta(\mathbf{x}), \qquad \{\psi(\mathbf{x}), \bar{\psi}(0)\} = \gamma_0\delta(\mathbf{x}), \tag{4}$$

$$[\varphi^\alpha(\mathbf{x}), \varphi^\beta(0)] = \{\psi(\mathbf{x}), \psi(0)\} = [\psi(\mathbf{x}), \varphi^\alpha(0)] = [\psi(\mathbf{x}), \pi^\alpha(0)] = 0.$$

Если, следуя Швингеру [1, 3], определить спинорный ток с помощью предельного перехода

$$j_\mu^\alpha(x) = \frac{g_0}{2} \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\bar{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_5\gamma_\mu\tau^\alpha\psi\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right], \quad \varepsilon^2 < 0, \tag{5}$$

то в соответствии со сказанным выше

$$\langle [j_m^\alpha(\mathbf{x}),\ j_0^\beta(0)]\rangle =$$
$$= \frac{g_0^2}{2}\delta^{\alpha\beta}\partial_n\delta(\mathbf{x})\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_n \left\langle\left[\bar{\psi}\left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}\right),\ \gamma_m\psi\left(\mathbf{x} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}\right)\right]\right\rangle \neq 0. \tag{6}$$

Тем не менее, определение (5) не является вполне удовлетворительным. Действительно, общие требования ковариантности и спектральности приводят совместно с каноническими перестановочными соотношениями к представлению

$$\langle [j_\mu^\alpha(x),\ \dot{\varphi}^\beta(0)]\rangle = -i\delta^{\alpha\beta}\int d\varkappa^2\tilde{\rho}(\varkappa^2)\,\partial_\mu\Delta(x, \varkappa^2), \tag{7}$$

причем

$$\int d\varkappa^2\tilde{\rho}(\varkappa^2) = 0. \tag{8}$$

Отсюда следует, что $\langle [j_\mu^\alpha(\mathbf{x}),\ \partial_0\dot{\varphi}^\beta(0)]\rangle = 0$, и поэтому

$$\langle [j_m^\alpha(\mathbf{x}),\ \pi^\beta(0)]\rangle = \langle [j_m^\alpha(\mathbf{x}),\ j_0^\beta(0)]\rangle \neq 0. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу (4) и (5), операторы $j_m^\alpha(\mathbf{x})$ и $\pi^\beta(0)$ должны были бы коммутировать. Заметив это противоречие, Окубо заключил, что рассматриваемая теория несамосогласована.

Между тем, совершенно аналогичная ситуация имеет место и в квантовой электродинамике, где вследствие уравнения $\operatorname{div}\mathbf{E} = j_0$ плотность тока также не должна коммутировать с напряженностью электрического поля. Чтобы обеспечить их некоммутативность, достаточно определить ток явно градиентно-инвариантным образом [1, 2]:

$$j_\mu(x) = \frac{e_0}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\bar{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_\mu \exp\left(ie_0\int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} d\xi_\mu A_\mu(\xi)\right)\psi\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]. \tag{10}$$

Аналогичный выход может быть указан и в рассматриваемом случае. Градиентная инвариантность оператора (10) может быть истолкована как инвариантность относительно вращений вокруг фиксированной оси в зарядовом пространстве. В зарядово-симметричной теории естественно определить каждую компоненту плотности тока так, чтобы она была инвариантна относительно поворотов вокруг одноименной оси в изотопическом пространстве

$$\psi(x) \to \exp\{ig_0\gamma_5\tau^\alpha\lambda(x)\}\psi(x),$$

сопровождаемых преобразованием соответствующей компоненты мезонного поля

$$\varphi^\alpha(x) \to \varphi^\alpha(x) - \lambda(x).$$

Поэтому следует принять определение

$$j_\mu^\alpha(x) = \frac{g_0}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\bar{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_5\gamma_\mu\tau^\alpha \exp\left[ig_0\gamma_5\tau^\alpha\left[\varphi^\alpha\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \varphi^\alpha\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\right]\psi\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \tag{11}$$

(в экспоненте суммирование по α не производится). Нетрудно убедиться, что такое определение тока устраняет обнаруженное в [3] противоречие, так как теперь

$$\langle [j_m^{\alpha}(\mathbf{x}),\ \pi^{\beta}(0)]\rangle = \\ = \frac{g_0^2}{2}\delta^{\alpha\beta}\partial_n\delta(\mathbf{x})\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_n\left\langle\left[\overline{\psi}\left(\mathbf{x}-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}\right),\ \gamma_m\psi\left(\mathbf{x}+\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{2}\right)\right]\right\rangle \tag{12}$$

в соответствии с (6) и (9).

Вернемся к формуле (8). Воспользовавшись спектральным представлением

$$\langle[\varphi^{\alpha}(x), \varphi^{\beta}(0)]\rangle = i\delta^{\alpha\beta}\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)\Delta(x,\varkappa^2), \\ \int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2) = 1 \tag{13}$$

и уравнением (3), легко найдем, что

$$\varkappa^2\widetilde{\rho}(\varkappa^2) = (\varkappa^2-\mu_0^2)\rho(\varkappa^2). \tag{14}$$

Если отсутствуют состояния нулевой массы с квантовыми числами мезона, то подстановка (14) в (8) дает

$$\frac{1}{\mu_0^2} = \int d\varkappa^2\frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2}. \tag{15}$$

Для нейтрального варианта рассматриваемой теории этот результат был получен Хеллманом [4]. Такое соотношение вообще характерно для теорий со связью векторного типа [2, 5].

Запишем теперь пропагатор мезонного поля в виде

$$D(k) = \int d\varkappa^2\frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2-k^2} = \frac{1}{\mu_0^2-k^2+\Pi(k^2)}, \tag{16}$$

где $\Pi(k^2)$ — поляризационный оператор. Считая, что интегрирование по $\varkappa^2$ начинается не с нуля, и полагая $k^2=0$, получаем с помощью (15)

$$\Pi(0) = 0. \tag{17}$$

Особого рассмотрения требует случай $\mu_0=0$. Из (14) с учетом правила сумм (13) и (8) теперь следует лишь, что

$$\rho(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2)+\widetilde{\rho}(\varkappa^2). \tag{18}$$

Никаких дальнейших выводов сделать отсюда нельзя. В частности, перенормировка массы мезонного поля может быть отлична от нуля. Для этого достаточно, чтобы $\widetilde{\rho}(\varkappa^2)$ имело вид

$$\widetilde{\rho}(\varkappa^2) = -\delta(\varkappa^2)+Z\delta(\varkappa^2-\mu^2)+\sigma(\varkappa^2). \tag{19}$$

Противоположное утверждение, содержащееся в работе Хеллмана и Романа [6], необоснованно. Ее авторы не учли того, что из равенства $\varkappa^2\widetilde{\rho}(\varkappa^2) = \mu_0^2\rho(\varkappa^2)$ (см. соотношение (16) в [4]; оно эквивалентно формуле (14) нашей статьи) при $\mu_0^2=0$ следует только, что $\widetilde{\rho}(\varkappa^2) = b\delta(\varkappa^2)$, а не формула (15). С другой стороны, представляется весьма вероятным, что равенство (17) имеет место и при $\mu_0=0$, поскольку в рассматриваемой теории оно связано с наличием производной мезонного поля в лагранжиане взаимодействия. В таком случае перенормировка массы мезона действительно может отсутствовать.

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 24 марта 1966 г.

Литература

[1] J. Schwinger. Phys. Rev. Lett., **3**, 296, 1959.
[2] K. Johnson. Nucl. Phys., **25**, 431, 1961.
[3] S. Okubo. Preprint IAEA IC/66/10, Trieste, 1966.
[4] W. S. Hellman. Nuovo Cim., **34**, 632, 1964.
[5] А. И. Вайнштейн, В. В. Соколов, И. Б. Хриплович. ЯФ, **1**, 908, 1965.
[6] W. S. Hellman, P. Roman. Nuovo Cim., **37**, 779, 1965.

COMMUTATION RELATIONS FOR CURRENT DENSITY COMPONENTS

V. V. Sokolov, I. B. Khriplovich

The nucleon current density is defined in a symmetric pseudoscalar meson theory with pseudovector coupling in such a way that it does not commute with the canonical meson field momentum. Some properties of the theory are discussed.