Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 51 *1966* *Вып. 4(10)*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

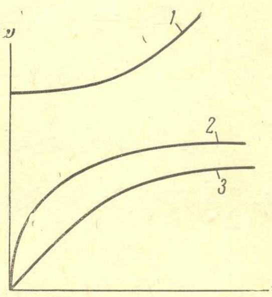
В. Е. Захаров

Показано, что установившиеся нелинейные волны, обладающие нераспадным законом дисперсии, могут быть неустойчивы относительно более медленных распадных неустойчивостей. В частности, неустойчивыми оказываются ионнозвуковые волны и гравитационные волны на поверхности жидкости.

1. Введение

Хорошо известно [1–3], что установившиеся периодические волны малой (но конечной) амплитуды в плазме могут быть неустойчивы по отношению к одновременному возбуждению пары волн. До сих пор рассматривались наиболее сильные из таких неустойчивостей, при которых $\mathbf{k}$ — волновой вектор исходной волны и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ — волновые векторы возбуждающихся волн связаны соотношениями

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2), \qquad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \tag{1}$$



$\omega(\mathbf{k})$, $\omega_1(\mathbf{k}_1)$, $\omega_2(\mathbf{k}_2)$ — законы дисперсии волн. Эту неустойчивость можно интерпретировать как когерентный распад большого количества квантов, находящихся в состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$; уравнения (1) есть законы сохранения при распаде. Инкремент неустойчивости пропорционален амплитуде волны. Неустойчивости такого рода могут быть присущи волнам не только в плазме, но и в других нелинейных средах с дисперсией, например капиллярным волнам на поверхности жидкости.

В настоящей работе рассматривается устойчивость волн, для которых процессы распада (1) запрещены. Мы покажем, что некоторые типы таких волн, в частности ионнозвуковые волны в плазме и гравитационные волны на поверхности жидкости, могут быть неустойчивы относительно возбуждения пары волн, соответствующих законам сохранения

$$2\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2), \qquad 2\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \tag{2}$$

На возможность таких неустойчивостей было указано Ораевским [2]. Эта неустойчивость может быть интерпретирована как когерентное рассеяние пар квантов, находящихся в одном состоянии.

Рассмотрим, при каких законах дисперсии процесс (2) возможен. Пусть $\omega(\mathbf{k})$ — возрастающая функция, выпуклая вверх $(d^2\omega / d|\mathbf{k}|^2 < 0)$ (кривые *2*, *3* на рисунке). Направим векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ по одной прямой. Вследствие выпуклости функции $\omega(\mathbf{k})$ имеет место неравенство

$$\omega\left(\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}\right) > \frac{\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)}{2}.$$

Добавляя к векторам $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ составляющие, перпендикулярные вектору $\mathbf{k}$, можно превратить это неравенство в равенство (2). С другой стороны, если $\omega(\mathbf{k})$ — возрастающая функция, выпуклая вниз, равенствам (2) можно удовлетворить только при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ (кривая *1* на рисунке).

2. Общий случай

Рассмотрим задачу устойчивости нелинейных волн в общем виде. Будем описывать волны с помощью нормальных переменных $a(\mathbf{k})$ — комплексных амплитуд бегущих волн. Нормируем $a(\mathbf{k})$ так, чтобы квадратичная часть гамильтониана для волн имела вид

$$H_0 = \int \omega(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Полный гамильтониан есть

$$H_0 = H + H_{int},$$

где H_{int} — гамильтониан взаимодействия, в котором следует учесть четырехволновые члены, соответствующие процессы (2), а также трехволновые члены, так как они во втором порядке теории возмущений также приводят к четырехволновым процессам. Общий вид такого гамильтониана взаимодействия есть

$$\begin{gathered}
H_{int} = \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)[a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) + a(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2)] \cdot \\
\cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3} \int U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \cdot \\
\cdot [a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) + a^*(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2)]\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 + \\
+ \frac{1}{2} \int W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) a^*(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_3)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3.
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь V, U, W — функции, описывающие взаимодействия. Они подчиняются очевидным условиям симметрии:

$$\begin{gathered}
V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1), \\
U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = U(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2), \\
W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = W(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \\
= W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2) = W(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1).
\end{gathered} \tag{4}$$

Уравнения движения для переменной $a(\mathbf{k})$ имеют вид

$$\partial a(\mathbf{k}) / \partial t = -i \delta H / \delta a^*(\mathbf{k}), \tag{5}$$

что дает

$$\begin{gathered}
\frac{\partial a(\mathbf{k})}{\partial t} + i\omega(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) = -i \int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)[a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \\
+ 2a^*(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)]\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 - \\
- i \int U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) a^*(\mathbf{k}_1) a^*(\mathbf{k}_2)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2 - \\
- i \int W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) a^*(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_3)\, \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3.
\end{gathered}$$

Уравнения (5) можно упростить, пользуясь тем, что запрещены процессы распада (1). Подставим $a(\mathbf{k})$ в виде

$$a(\mathbf{k}) = [A(\mathbf{k}, t) + f(\mathbf{k}, t)] \exp[-i\omega(\mathbf{k})t].$$

Здесь $A(\mathbf{k})$ — медленно, по сравнению с $f(\mathbf{k})$, меняющаяся функция, причем $f(\mathbf{k}) \ll A(\mathbf{k})$. В уравнении для f учтем только члены, квадратичные по A. Полагая A постоянным за время изменения f, проинтегрируем уравнение для f по времени; получим

$$f(\mathbf{k}, t) = -\int V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left\{ \frac{\exp\{it[\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)]\}}{\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)} A(\mathbf{k}_1) A(\mathbf{k}_2) \cdot \right.$$
$$\cdot \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + 2 \frac{\exp\{it[\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)]\}}{\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)} A^*(\mathbf{k}_1) A(\mathbf{k}_2) \cdot$$
$$\left. \cdot \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \right\} dk_1\, dk_2 + \int \frac{\exp\{it[\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)]\}}{\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2)} \cdot$$
$$\cdot U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) A^*(\mathbf{k}_1) A^*(k_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\, dk_1\, dk_2.$$

Знаменатели под интегралами не могут обратиться в нуль, так что квадратичные по A члены не дают вклада в уравнение для A. Учтем в уравнении для A те из членов, пропорциональных Af, которые содержат наиболее медленные экспоненты. Очевидно, что это члены, пропорциональные произведениям типа A^*AA. Собирая все такие члены, получим

$$\frac{\partial A(\mathbf{k})}{\partial t} = -i \int T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \exp\{it[\omega(\mathbf{k}) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3)]\} \cdot$$
$$\cdot \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) A^*(\mathbf{k}_1) A(\mathbf{k}_2) A(\mathbf{k}_3)\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3, \tag{6}$$

где

$$T(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = -2 \frac{V(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) V(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\omega(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) - \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3)} -$$
$$-2 \frac{U(-\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}, \mathbf{k}_1) U(-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\omega(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \omega(\mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_3)} -$$
$$-2 \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_2, \mathbf{k} - \mathbf{k}_2) V(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1)}{\omega(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_3)} - 2 \frac{V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_3, \mathbf{k} - \mathbf{k}_3) V(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k}_2)} -$$
$$-2 \frac{V(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) + \omega(\mathbf{k}_3) - \omega(\mathbf{k}_1)} V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_3) -$$
$$-2 \frac{V(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}, \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) V(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_2)}{\omega(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) + \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_1)}. \tag{7}$$

Уравнение (6) может быть получено более строго, путем суммирования диаграмм.

Уравнение (6) имеет точное решение в виде монохроматической волны:

$$A(\mathbf{k}) = a \exp[-i\Omega(\mathbf{k}_0)t]\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \tag{8}$$

где $\Omega(\mathbf{k}_0) = T(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)|a|^2$ — сдвиг частоты за счет взаимодействия. Решение вида (8) представляет собой аппроксимацию стационарной периодической волны.

Критерий применимости уравнения (6) есть

$$\left|\frac{V(2\mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)a}{\omega(2\mathbf{k}_0) - 2\omega(\mathbf{k}_0)}\right| \ll 1. \qquad (9)$$

При $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$ знаменатель обращается в нуль, так что к волнам с линейным законом дисперсии уравнение (6) неприменимо. Для применимости уравнение (6) необходимо, чтобы эффекты нелинейности были меньше, чем эффекты дисперсии.

Исследуем устойчивость решения (8) по отношению к возбуждению пары волн. Будем искать решение уравнения (6) в виде

$$A(\mathbf{k}, t) = a\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\exp[-i\Omega(\mathbf{k}_0)t] +$$
$$+ \alpha\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\exp(-i\Delta\omega_1 t) + \beta\delta(\mathbf{k} - 2\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1)\exp[-i\Delta\omega_2 t].$$

Здесь

$$\Delta\omega_1 = 2T(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_1)|a|^2,$$
$$\Delta\omega_2 = 2T(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1)|a|^2.$$

Линеаризуя уравнение по α и β, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial\alpha / \partial t &= -ia^2T(\mathbf{k}_1, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\exp(i\gamma t)\beta^*, \\ \partial\beta / \partial t &= -ia^2T(\mathbf{k}_1, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0)\exp(i\gamma t)\alpha^*, \end{aligned} \qquad (10)$$

где

$$\gamma = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1) - 2\omega(\mathbf{k}_0) + \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2 - 2\Omega(\mathbf{k}_0)$$

Уравнения (10) приводят к неустойчивости с инкрементом

$$\nu = [|a|^4T^2(\mathbf{k}_1, 2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0) - \gamma^2/4]^{1/2}.$$

Для того чтобы были неустойчивы волны сколь угодно малой амплитуды, необходимо существование волновых векторов $\mathbf{k}_1$, для которых $\gamma(\mathbf{k}_1) = 0$. Ограничимся рассмотрением случая, когда $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_0| \gg |a|^2T\cdot(d\omega / d|\mathbf{k}|)^{-1}$. Тогда сдвигами частот за счет взаимодействия можно пренебречь. Условие $\gamma = 0$ совпадает с уравнениями (2), таким образом волны с выпуклой вверх кривой закона дисперсии ($d\omega / d|\mathbf{k}| > 0$, $d^2\omega / d|\mathbf{k}|^2 < 0$) неустойчивы относительно распадов на волны с волновыми векторами, лежащими в слое шириной $\delta_\mathbf{k} \sim \nu_{max}(d\omega / d|\mathbf{k}|)^{-1}$ вблизи поверхности, описываемой уравнениями (2). С другой стороны, волны с выпуклой вниз кривой закона дисперсии ($d\omega / d|\mathbf{k}| > 0$, $d^2\omega / d|\mathbf{k}|^2 > 0$) устойчивы.

Неустойчивость приводит к хаотизации волны за времена порядка $1/\nu$. В одномерном случае эта неустойчивость невозможна. Полученные результаты справедливы при исследовании устойчивости лишь достаточно узких волновых пакетов, фазовые соотношения в которых не успевают существенно измениться за времена развития неустойчивости. Это приводит к условию на ширину пакета $\delta_\mathbf{k} \ll \nu_{max}(d\omega / d|\mathbf{k}|)^{-1}$. В противоположном случае широких пакетов неустойчивость сохраняется, но инкремент уменьшается до величины порядка $a^4T^2 / \omega(\mathbf{k})$.

3. Устойчивость волн в изотропной плазме

Перейдем теперь к применению полученных выше результатов к конкретным задачам. Рассмотрим ленгмюровские колебания в изотермической плазме без магнитного поля. Закон дисперсии ленгмюровских волн имеет вид

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0 + {}^3/_2 v_{Te}^2 |\mathbf{k}|^2 / \omega_0.$$

Согласно сформулированному выше критерию, ленгмюровская волна устойчива относительно процессов типа (2). Любопытно отметить, что для ленгмюровской волны уравнения

$$n\omega(\mathbf{k}) = \sum_{s=1}^{n} \omega(\mathbf{k}_s), \qquad n\mathbf{k} = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{k}_s,$$

соответствующие распаду n квантов, имеют единственное решение:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \ldots = \mathbf{k}_n = \mathbf{k}.$$

Отсюда можно сделать вывод об устойчивости ленгмюровской волны по отношению к распадным неустойчивостям произвольного порядка.

Рассмотрим теперь ионнозвуковые волны в плазме с холодными ионами. Для описания плазмы применимы гидродинамические уравнения. Полагая движение ионов безвихревым, введем u — потенциал скорости ионов, φ — электростатический потенциал, n, M — плотность и масса ионов, T — температура электронов.

Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\nabla u) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla u)^2 = -\frac{e}{M}\varphi, \tag{11}$$

$$\Delta\varphi = -4\pi e(n - n_0 e^{e\varphi/T}).$$

При одновременном выполнении условий

$$\delta n = \frac{n - n_0}{n_0} \ll 1, \qquad (kr_D)^2 \ll 1,$$

из последнего уравнения (11) можно выразить φ с точностью до членов четвертого порядка:

$$\varphi = \frac{T}{e}\left(\delta n + \frac{T}{4\pi e^2 n_0}\Delta\delta n - \frac{1}{2}(\delta n)^2 + \frac{1}{3}(\delta n)^3\right).$$

Перейдем теперь к переменным $a(\mathbf{k})$ по формулам

$$\delta n = \left(\frac{1}{16\pi^3 M n_0}\right)^{1/2} \int \frac{|\mathbf{k}|}{\omega^{1/2}(\mathbf{k})} (a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} + a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{kr}})\, d\mathbf{k},$$

$$u = -i\left(\frac{1}{16\pi^3 M n_0}\right)^{1/2} \int \frac{\omega^{1/2}(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} (a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} - a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{kr}})\, d\mathbf{k}.$$

Закон дисперсии при $kr_D \ll 1$ есть

$$\omega(\mathbf{k}) = c_s |\mathbf{k}| (1 - {}^1/_2 |\mathbf{k}|^2 r_D^2),$$

$c_s = \sqrt{T/M}$ — скорость ионного звука.

В переменных $a(\mathbf{k})$ уравнения (11) приобретают форму (5), причем коэффициентные функции при $kr_D \ll 1$ равны

$$V(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{16\pi^{3/2}(Mn_0)^{1/2}} \left(\frac{T}{M}\right)^{1/4} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{2}|\mathbf{k}|^{1/2}|\mathbf{k}_1|^{1/2}|\mathbf{k}_2|^{1/2} + \frac{(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)\,|\mathbf{k}|^{1/2}}{|\mathbf{k}_1|^{1/2}|\mathbf{k}_2|^{1/2}} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_2)\,|\mathbf{k}_1|^{1/2}}{|\mathbf{k}|^{1/2}|\mathbf{k}_2|^{1/2}} + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)\,|\mathbf{k}_2|^{1/2}}{|\mathbf{k}|^{1/2}|\mathbf{k}_1|^{1/2}}\right].$$

$$W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{1}{32\pi^3 M n_0} |\mathbf{k}|^{1/2} |\mathbf{k}_1|^{1/2} |\mathbf{k}_2|^{1/2} |\mathbf{k}_3|^{1/2}$$

и обладают необходимыми свойствами симметрии (4).

Функция $\omega(\mathbf{k})$ для ионнозвуковых волн выпукла вверх, поэтому ионнозвуковая волна неустойчива. Распад происходит на пары волн, почти параллельные $\mathbf{k}$, это приводит к тому, что в выражении (7) члены, содержащие в знаменателях разности частот, оказываются в $(kr_D)^{-2}$ раз больше остальных. Такие члены порождаются виртуальными распадами и слияниями ионнозвуковых плазмонов, поэтому в гамильтониане (3) для ионнозвуковых волн нужно учитывать только первое слагаемое, описывающее этот процесс.

Инкремент распада имеет порядок $\nu \sim (\delta n / n)^2 \omega_i / kr_D$, ω_i — ионная плазменная частота, а условие применимости приближенного уравнения (6) есть $\delta n / n \ll (kr_D)^2$.

4. Устойчивость волн на поверхности жидкости

Волны на поверхности жидкости (без учета капиллярных явлений) имеют закон дисперсии $\omega^2(\mathbf{k}) = g|\mathbf{k}|\,\mathrm{th}\,(|\mathbf{k}|h)$. Функция $\omega(\mathbf{k})$ выпукла вверх, поэтому должна иметь место неустойчивость. Вычислим инкремент неустойчивости для случая бесконечно-глубокой жидкости. Выберем в качестве переменных, описывающих колебания жидкости, $\Phi(\mathbf{r}, z, t)$ — потенциал скорости, $\psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, z, t)|_{z=\eta}$, $\eta(\mathbf{r}, t)$ — отклонение поверхности от равновесного значения. Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор вдоль невозмущенной поверхности жидкости, z — координата, перпендикулярная поверхности, $-z$ возрастает с глубиной жидкости.

В этих переменных уравнения колебаний поверхности имеют вид

$$\begin{gathered} \partial\eta / \partial t - A = -\nabla\eta\nabla\psi + A(\nabla\eta)^2, \\ \partial\psi / \partial t + g\eta = -\tfrac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \tfrac{1}{2}A^2[1 + (\nabla\eta)^2], \\ \nabla^2\Phi + \partial^2\Phi / \partial z^2 = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Плотность жидкости положена равной единице, $A = \partial\varphi / \partial z|_{z=\eta}$.

Общее решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условию $\Phi \to 0$ при $z \to -\infty$, дается формулой

$$\Phi(\mathbf{r}, z, t) = \int \Phi(\mathbf{k}, t) \exp(|\mathbf{k}|z) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\, d\mathbf{k}.$$

Соответственно,

$$\begin{gathered} \psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n(\mathbf{r}, t)}{n!} \int |\mathbf{k}|^n \Phi(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\, d\mathbf{k}, \\ A(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n(\mathbf{r}, t)}{n!} \int |\mathbf{k}|^{n+1} \Phi(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\, d\mathbf{k}. \end{gathered} \tag{13}$$

Для замыкания системы уравнений (12) нужно исключить $\Phi(\mathbf{k}, t)$ из уравнений (13). Переход к переменным $a(\mathbf{k})$ осуществляется по формулам

$$\begin{gathered} \eta(\mathbf{k}) = (|\mathbf{k}| / g)^{1/4} [a(\mathbf{k}) + a^*(-\mathbf{k})], \\ \psi(\mathbf{k}) = -i(g / |\mathbf{k}|)^{1/4} [a(\mathbf{k}) - a^*(-\mathbf{k})]. \end{gathered}$$

Здесь $\eta(\mathbf{k})$ и $\psi(\mathbf{k})$ — фурье-образы $\eta(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$.

Уравнение колебания поверхности в переменных $a(\mathbf{k})$ имеет форму (5), причем

$$4U(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 4V(-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) =$$

$$= g^{1/4}\Big\{[(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) + |\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|]\Big(\frac{|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|}\Big)^{1/4} + [(\mathbf{k}\mathbf{k}_2) + |\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|]\Big(\frac{|\mathbf{k}_1|}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}\Big)^{1/4} +$$

$$+ [(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) + |\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|]\Big(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|}\Big)^{1/4}\Big\},$$

$$4W(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = -|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|\Big(\frac{|\mathbf{k}_2|\,|\mathbf{k}_3|}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_1|}\Big)^{1/4}\Big\{\frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_2| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3| +$$

$$+ \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}| - |\mathbf{k}_1|\Big\} - |\mathbf{k}_2|\,|\mathbf{k}_3|\Big(\frac{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_3|}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}\Big)^{1/4}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_2| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_3| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3|\Big\} +$$

$$+ |\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|\Big(\frac{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_3|}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}\Big)^{1/4}\Big\{\frac{1}{2}|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2| -$$

$$- |\mathbf{k}_2| - |\mathbf{k}_3|\Big\} + |\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_3|\Big(\frac{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_3|}\Big)^{1/4}\Big\{\frac{1}{2}|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3| +$$

$$+ \frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_2| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}| - |\mathbf{k}_3|\Big\} + |\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|\Big(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_3|}{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_2|}\Big)^{1/4}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_2| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}_2|\Big\} +$$

$$+ |\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_3|\Big(\frac{|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}_2|}{|\mathbf{k}_1|\,|\mathbf{k}_3|}\Big)^{1/4}\Big\{\frac{1}{2}|\mathbf{k}-\mathbf{k}_3| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2| + \frac{1}{2}|\mathbf{k}+\mathbf{k}_1| +$$

$$+ \frac{1}{2}|\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3| - |\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}_3|\Big\}.$$

Функции U, V, W удовлетворяют соотношениям симметрии (4), это показывает, что переменные $a(\mathbf{k})$ действительно являются классическими аналогами операторов рождения квантов волн. Приближенное уравнение (6) применимо при условии слабой нелинейности волны

$$\eta / \lambda \ll 1, \tag{14}$$

λ — длина волны, η — характерная амплитуда волны.

Уравнение (6) имеет решение

$$a(\mathbf{k}) = a \exp\,[-it(\sqrt{g|\mathbf{k}|} + 2|\mathbf{k}|^3|a|^2)]\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0), \tag{15}$$

которое является аппроксимацией известного решения уравнения гидродинамики — установившейся волны конечной амплитуды на поверхности жидкости бесконечной глубины [4].

При условии $\eta / \lambda \ll 1$ сдвигом частоты можно пренебречь. Согласно сформулированному выше критерию, мы можем сделать вывод о том, что прогрессивная периодическая волна на поверхности жидкости неустойчива относительно возбуждения пар колебаний, волновые векторы которых лежат вблизи кривой, описываемой уравнением

$$2\sqrt{|\mathbf{k}_0|} = \sqrt{|\mathbf{k}_1|} + \sqrt{|2\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1|}.$$

Инкремент неустойчивости вычисляется через U, V, W по формулам (7) и (11).

По порядку величины $\nu \sim \sqrt{g/\lambda}(\lambda/\eta)^2$, за время порядка $1/\nu$ волна должна хаотизироваться.

В заключение автор благодарит Р. З. Сагдеева за обсуждение работы, а также В. Л. Покровского за ценные замечания.

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 2 марта 1966 г.

Литература

[1] В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. ДАН СССР, 150, 775, 1963.
[2] В. Н. Ораевский. Ядерный синтез, 4, 263, 1964.
[3] А. А. Галеев, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 44, 592, 1963.
[4] А. И. Некрасов. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, Изд. АН СССР, 1951 г.

ON INSTABILITY OF WAVES IN NONLINEAR DISPERSIVE MEDIA

V. E. Zakharov

It is shown that stationary nonlinear waves with an undisintegrating type dispersion law may be unstable with respect to slower disintegrating instabilities. In particular ion-acoustic and gravitational waves on the surface of a liquid may be unstable.