

## О ТОРМОЗНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ФОТОНА ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ БОЛЬШОЙ ЭНЕРГИИ

В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе

Рассмотрен процесс однократного тормозного излучения при столкновении электронов большой энергии. Вычислено угловое распределение и спектр излученных фотонов в с.д.и. и л.с., причем в последней системе рассмотрено излучение налетающей частицы и частицы отдачи. Проведен анализ метода классических токов и метода Вейцзекера — Вильямса. Показано, что последний метод неприменим для вычисления спектра излученных частицей отдачи фотонов при  $\omega > m/2$ .

1. Тормозное излучение фотона при столкновении электрона с электроном (позитроном) является одним из основных электродинамических процессов. Поэтому исследование этого явления, в частности спектра излученных фотонов и их углового распределения, представляет значительный интерес, в частности для изучения радиационных поправок. Кроме того, этот процесс исследовался в последнее время экспериментально как в опытах на встречных электрон-позитронных пучках [1], так и при столкновении электронов большой энергии с покоящимися электронами [2].

Для теоретического описания этого процесса можно с достаточной степенью точности ограничиться низшим ( $e^6$ ) приближением теории возмущений, за исключением области очень мягких фотонов, где становятся существенными многофотонные процессы (ниже мы не будем касаться этой области). В указанном приближении процесс представляется восемью диаграммами (четыре прямых и четыре обменных (аннигиляционных)). Нахождение дифференциального сечения процесса сводится к довольно трудоемкому вычислению шпуров и приводит к весьма громоздкому выражению (см. [3] и в ультрарелятивистском пределе — [4]). Точное интегрирование этого выражения по углам вылета конечных частиц для получения спектра излученных фотонов (дифференциального по частоте фотона сечения) оказывается весьма сложным и до сих пор не сделано. Однако в предельных (нерелятивистском и ультрарелятивистском) случаях такое вычисление оказывается возможным. Мы будем рассматривать ультрарелятивистский случай, когда результат для спектра разлагается в ряд по обратным степеням энергии. К сожалению, полученные здесь ранее результаты (см. [3, 6]) являются противоречивыми.

2. Для исследования процесса излучения фотонов при столкновениях электронов (и электронов и позитронов) и двухчастичной аннигиляции электрон-позитронных пар ранее была разработана методика вычисления интегральных по конечным состояниям частиц сечений (в частности, спектра и углового распределения излученных фотонов) с помощью инвариантного интегрирования по вкладам отдельных фермионных линий [7, 8]. Эта методика оказалась весьма удобной и для рассмотрения процесса однократного излучения фотона. При этом удается получить выражения для сечений для широкого класса систем отсчета, причем в системе центра инерции (с.д.и.) электроны, естественно, излучают одинаково, а в лабораторной системе (л.с.) следует различать излучение быстрого (налетающего) электрона и покоящегося до столкновения электрона отдачи.

Процесс тормозного излучения при столкновении электронов может быть описан также с помощью приближенных методов. С помощью метода Вейцекера — Вильямса (ВВ) с логарифмической точностью вычисляется спектр излученных фотонов в с.ц.и. и в л.с. В л.с. следует отдельно рассмотреть излучение быстрого электрона и электрона отдачи, а для последнего случая отдельно рассмотреть случаи  $\omega < m/2$ ,  $\omega > m/2$ . Как будет показано ниже, при  $\omega > m/2$  метод ВВ не применим и приводит к неправильному результату.

Рассматриваемый процесс может быть изучен с помощью метода классических токов, причем получается (с логарифмической точностью) правильный результат для  $\omega \ll m$ .

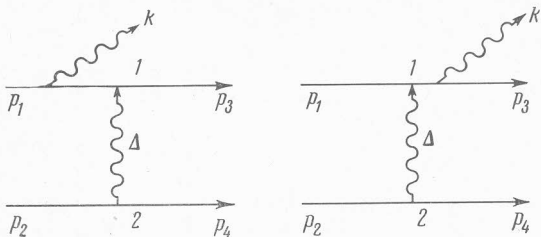


Рис. 1

В данной статье процесс тормозного излучения фотона будет последовательно рассмотрен с помощью указанных выше методов.

3. Ультррелятивистская частица излучает в узкий конус в направлении движения с углом  $\sim m/E$ . Это приводит к тому, что вклад интерференции между излучением разных частиц имеет порядок  $m^2/\nu$  ( $\nu = -(p_1 p_2)$ ). Такой же порядок имеет вклад интерференции прямых и обменных (аннигиляционных) диаграмм. В дальнейшем мы будем систематически разлагать все величины в ряд по  $m^2/\nu$  и сохранять только старшие члены разложения. С этой точностью следует рассматривать только диаграммы, на которых излучает определенная частица (рис. 1). Более детально этот вопрос будет рассмотрен ниже (п. 8).

В с.ц.и. оба электрона излучают, естественно, одинаково. Диаграммы рис. 1 дают излучение частицы 1. Вычислив вклад этих диаграмм, мы получим сечение излучения этой частицы. Точно так же излучает частица 2. Таким образом, полное выражение для спектра фотонов в с.ц.и. есть удвоенный вклад диаграмм рис. 1. В л.с. следует отдельно рассматривать излучение быстрой частицы и частицы отдачи. Здесь можно также ограничиться рассмотрением вклада диаграмм рис. 1, считая, что: 1) частица 2 покоится (для вычисления вклада в излучение быстрой частицы); 2) частица 1 покоится (для вычисления вклада в излучение частицы отдачи). Полное выражение для спектра есть сумма этих двух вкладов.

Диаграммы обменного типа (для электрон-электронных столкновений) дают такой же вклад, как диаграммы прямого типа. В силу тождественности электронов суммарный вклад прямых и обменных диаграмм следует разделить на два. Поэтому можно рассматривать только вклад прямых диаграмм и не учитывать тождественности электронов. Вклад аннигиляционных диаграмм (в случае электрон-позитронных столкновений) может быть вычислен точно [8], он имеет порядок  $m^2/\nu$  и поэтому в дальнейшем не будет рассматриваться.

4. Точное выражение для вклада диаграмм рис. 1 в сечение получено в [7] (формула (40)). Мы выпишем здесь (в ковариантном виде) лишь члены, дающие, с указанной точностью, вклад в спектр излученных фотонов. Имеем

$$d\sigma = \frac{2r_0^2 \alpha}{\pi \nu^3} \int \frac{dx_1 dx_2 dx_3 d\Delta^2}{\Delta^4 g \sin \varphi} \left\{ -\frac{2\nu^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\kappa_1 \kappa_3} \left[ 4\nu^2 \left( 1 - \frac{\kappa_2}{\nu} \right) + \right. \right.$$

$$+ \Delta^2 v^2 \left( \left( 1 - \frac{\kappa_2}{v} \right)^2 + 1 \right) \left] - \frac{2v^2}{\kappa_1^2} \left( 1 - \frac{\kappa_2}{v} \right) - \frac{\kappa_1}{\kappa_3} - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} \right\}, \quad (1)$$

где

$$\kappa_1 = -(kp_1), \quad \kappa_2 = -(kp_2), \quad \kappa_3 = -(kp_3), \quad (2)$$

$$v = -(p_1 p_2), \quad \Delta = p_2 - p_4 = p_3 + k - p_1;$$

здесь и в дальнейшем метрика  $(ab) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) - a_0 b_0$ ,  $\hbar = c = m = 1$ .

В выражении для сечения (1) мы перешли к естественным переменным задачи:

$$\int \frac{d^3 p_3}{E_3} \frac{d^3 p_4}{E_4} \frac{d^3 k}{\omega} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - k) = \frac{4\pi}{v^2 - 1} \int \frac{d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3 d\Delta^2}{g \sin \varphi}, \quad (3)$$

где

$$g \sin \varphi = 2 \left( \frac{v^2}{v^2 - 1} \right)^{1/2} \sqrt{S}, \quad S = -[Q\kappa_3^2 - 2P\kappa_3 + R]; \quad (4)$$

$$Q = \left( 1 - \frac{\kappa_2}{v} \right)^2 + \frac{2\kappa_1 - 1}{v^2},$$

$$P = \frac{\kappa_1}{v^2} [v(v - \kappa_2) + \kappa_1 - 1] - \frac{\Delta^2}{2v^2} [\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2) + (v + 1)(\kappa_1 - \kappa_2)], \quad (5)$$

$$R = \frac{\kappa_1^2}{v^2} [v^2 - 1] + \frac{\Delta^2}{v^2} (\kappa_1 + \kappa_2)(\kappa_2 - v\kappa_1) + \frac{\Delta^4}{4v^2} (\kappa_1 + \kappa_2)^2.$$

В сечении (1) опущены все члены, содержащие  $\Delta^2$  в числителе, за исключением  $v^2 \Delta^2$ ,  $v\kappa_2 \Delta^2$ ,  $\kappa_2^2 \Delta^2$ . Можно показать, что опущенные члены дают вклад в спектр  $\sim 1/v$ ; как уже отмечалось, такого рода члены мы будем систематически отбрасывать. Заметим здесь также, что сформулированный подход неприменим вблизи жесткого конца спектра излученных фотонов, когда  $E - \omega \sim 1$ , где такого рода пренебрежений делать уже нельзя.

Приступим к интегрированию сечения (1). В работе [7] сначала выполнялось интегрирование по  $\kappa_1$  ( $\kappa_1 + \kappa_2 = 2\varepsilon\omega = \text{const}$ ), а затем по  $\kappa_3$  и  $\Delta^2$ . Однако такой порядок интегрирования оказывается неудобным, если мы хотим получить выражение, применимое в разных системах отсчета. Дело в том, что нас интересует сечение при фиксированной частоте излученного фотона  $\omega$ . Но  $\omega = (\kappa_1 + \kappa_2) / 2\varepsilon$  в с.ц.и.,  $\omega = \kappa_2$  для излучения быстрой частицы и  $\omega = \kappa_1$  для излучения частицы отдачи. Поэтому мы сначала выполним интегрирование по  $\kappa_3$ , затем по  $\Delta^2$  и, наконец, по нужной из величин  $\kappa_1, \kappa_2$ <sup>1)</sup>.

Пределы интегрирования по  $\kappa_3$  определяются нулями выражения  $g \sin \varphi$  (4) (см. [9]). Выполняя это интегрирование, получаем для  $I_n$ :

$$I_n = \int \frac{\kappa_3^n d\kappa_3}{\sqrt{S}}. \quad (6)$$

$$I_1 = \frac{\pi P}{Q^{1/2}}, \quad I_0 = \frac{\pi}{Q^{1/2}}, \quad I_{-1} = \frac{\pi}{R^{1/2}}, \quad I_{-2} = \frac{\pi P}{R^{3/2}},$$

где величины  $Q, P, R$  задаются формулами (5).

5. Перейдем теперь к интегрированию по  $\Delta^2$ . Область интегрирования по переменным  $\Delta^2, \kappa_1, \kappa_2$  определяется из условия  $P^2 - QR \geq 0$ . Это условие можно записать в виде

<sup>1)</sup> Аналогичный подход использовался в работе авторов [9].

$$(2\nu\kappa_1\kappa_2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2) \{ \Delta^2(\nu + 1 - \kappa_1 - \kappa_2) [ \Delta^2 - 2(\nu - \kappa_2 - 1) ] + 2\kappa_1^2 \} \geq 0, \quad (7)$$

откуда

$$\Delta_{min}^2 = (\nu - \kappa_2 - 1) \left\{ 1 \mp \left[ 1 - \frac{2\kappa_1^2}{(1 + \nu - \kappa_1 - \kappa_2)(\nu - \kappa_2 - 1)^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (8)$$

$$\kappa_{2,1}(\nu - \sqrt{\nu^2 - 1}) \leq \kappa_{1,2} \leq \kappa_{2,1}(\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}). \quad (9)$$

При фиксированном  $\kappa_2$  эта область приведена на рис. 2. Граница области задается кривой третьего порядка (7), причем приведена лишь ветвь, лежащая в физической области изменения переменных. Область изменения величины  $\kappa_1$  зависит от соотношения между  $\kappa_2$  и величиной  $\kappa_0$ , равной

$$\kappa_0 = \frac{\nu - 1}{\nu + 1 + \sqrt{\nu^2 - 1}} \approx \frac{1}{2} \quad (\nu \gg 1); \quad (10)$$

если  $\kappa_2 > \kappa_0$ , то прямая  $\kappa_1 = \kappa_{1max}$  проходит выше граничной кривой, а при  $\kappa_2 < \kappa_0$  — пересекает граничную кривую (рис. 2).

При выполнении интегрирования по  $\Delta^2$  мы будем систематически разлагать полученный результат в ряд по степеням  $\kappa_1/\nu$ . Строгий анализ показывает, что старшие члены этого разложения дают в спектр вклад  $\sim 1/\nu$ . Отбрасываясь также члены типа  $1/\nu\kappa_1\kappa_2$ , которые дают в спектр вклад  $\sim 1/\nu$ , и члены типа  $[\nu^2\kappa_1(1 - \kappa_2/\nu)]^{-1}$ , которые в с.ц.и. и л.с. дают вклад  $\sim 1/\nu$ .

В результате интегрирования имеем

$$d\sigma = d\sigma_l + d\sigma_{nl}, \quad (11)$$

$$d\sigma_l = \frac{r_0^2\alpha}{\nu^3} \frac{d\kappa_1}{\kappa_1^2} d\kappa_2 L \left\{ 2\nu(\nu - \kappa_2) + \kappa_2^2 + \frac{2}{\kappa_1} \kappa_2(\kappa_2 - \nu) + \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2} \left( 1 - \frac{\kappa_2}{\nu} \right) \right\}, \quad (12)$$

$$d\sigma_{nl} = \frac{r_0^2\alpha}{\nu^3} \frac{d\kappa_1}{\kappa_1^2} d\kappa_2 \left\{ \frac{1}{\kappa_1^2} \left( 1 - \frac{\kappa_2}{\nu} \right) [-3\kappa_1^2\nu^2 + \kappa_1\kappa_2\nu(8 + \kappa_1) - 4\kappa_2^2] - \nu^2 \right\}, \quad (13)$$

$$L = 2 \ln \left[ 2\nu \left( \frac{\nu}{\kappa_1 + \kappa_2} - 1 \right) \right]. \quad (14)$$

6. Нами получено выражение для дифференциального по  $\kappa_1, \kappa_2$  сечения тормозного излучения, пригодное как в с.ц.и., так и в л.с. для излучения быстрой частицы и частицы отдачи. Это выражение дает угловое распределение излучения для всех этих случаев. Для получения спектра излучения необходимо проинтегрировать сечение (11) при фиксированной частоте излученного фотона  $\omega$ . В с.ц.и.  $\omega = (\kappa_1 + \kappa_2)/2\varepsilon$ , для быстрой частицы  $\omega = \kappa_2$ , для частицы отдачи  $\omega = \kappa_1$ . Область изменения переменных  $\kappa_1, \kappa_2$  следует из формул (8), (9), она определяется неравенствами

$$\kappa_{2,1} \geq \kappa_{1,2}(\nu - \sqrt{\nu^2 - 1}), \quad \kappa_{2,1} \leq \kappa_{1,2}(\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}), \quad \kappa_1 + \kappa_2 \leq \nu - 1. \quad (15)$$

Эта область изображена на рис. 3. Угловые точки имеют координаты  $\kappa_0$  и  $\kappa_{max}$ , где  $\kappa_{max}$  дает максимальную частоту излученного фотона в соответствующей системе:

$$\kappa_{max} = (\nu - 1) / [\nu + 1 - \sqrt{\nu^2 - 1}].$$

В дальнейшем мы должны отдельно рассматривать различные системы. А. Система центра инерции. Угловое распределение излученных фотонов в направлении частицы 1 характеризуется резкими пиками в направлении движения (в знаменателе стоят высокие степени  $\kappa_1 = \omega \varepsilon (1 - \beta \cos \theta_h)$ ). Поэтому при интегрировании по  $\kappa_1$  при фиксированной частоте  $\omega = (\kappa_1 + \kappa_2) / 2\varepsilon$  основной вклад в интеграл дает нижний предел интегрирования по  $\kappa_1$  ( $\kappa_1 \approx \kappa_2 / 2\nu$ ), так что верхний предел интегрирования оказывается несущественным и ответ не зависит от соотношения между величинами  $\omega$  и  $\kappa_0$ . Выполняя интегрирование по  $\kappa_1$ , легко получаем

$$d\sigma_C(1) = 4r_0^2 \alpha \frac{d\omega}{\omega} \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} \cdot \left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \omega} + \frac{\varepsilon - \omega}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \right] \left[ \ln \frac{4\varepsilon^2(\varepsilon - \omega)}{\omega} - \frac{1}{2} \right] \quad (16)$$

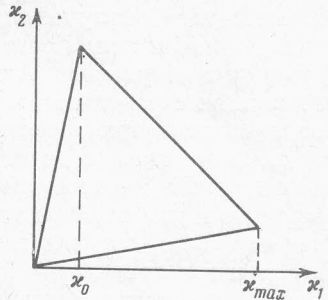


Рис. 3

где  $\varepsilon$  — энергия электрона в с.д.и. Этот результат совпадает с полученным Альтарелли и Бучелла [6].

Б. Излучение быстрой частицы в л.с. Угловое распределение излученных фотонов характеризуется узкими пиками ( $\kappa_1 = \omega E (1 - \beta \cos \theta_h)$ ) в направлении движения быстрой частицы. Ситуация в этом случае аналогична ситуации в с.д.и., и спектр излучения быстрой частицы имеет вид

$$d\sigma_{L1} = 4r_0^2 \alpha \frac{d\xi}{\xi} (1 - \xi) \left[ (1 - \xi) + \frac{1}{(1 - \xi)} - \frac{2}{3} \right] \left[ \ln \frac{2\nu(1 - \xi)}{\xi} - \frac{1}{2} \right], \quad (17)$$

где  $\xi = \kappa_2 / \nu$ .

В. Излучение частицы отдачи в л.с. Угловое распределение излученных фотонов ( $\kappa_2 = \omega E (1 - \beta \cos \theta_h)$ ,  $\kappa_1 = \omega$ ), как это следует из выражений (11) — (13), является весьма плавным (почти изотропным). Вклад в интеграл дает вся область интегрирования по  $\kappa_2$ , и поэтому мы должны отдельно выполнять интегрирование при  $\kappa_1 \leq \kappa_0$  и при  $\kappa_1 \geq \kappa_0$ . В результате получаем

$$d\sigma_{L2} = \frac{2}{3} r_0^2 \alpha \frac{d\kappa_1}{\kappa_1^2} \left\{ \left[ 4 - \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{4\kappa_1^2} \right] \ln(2\nu) - 2 + \frac{2}{\kappa_1} - \frac{5}{8\kappa_1^2} \right\}, \quad \kappa_1 \geq \kappa_0, \quad (18)$$

$$d\sigma_{L2} = \frac{1}{3} r_0^2 \alpha \frac{d\kappa_1}{\kappa_1} \left\{ 16(1 - \kappa_1 + \kappa_1^2) \ln\left(\frac{\nu}{\kappa_1}\right) - 2(1 - 2\kappa_1) \ln(1 - 2\kappa_1) \left[ \frac{1}{4\kappa_1^3} - \frac{1}{2\kappa_1^2} + \frac{3}{\kappa_1} - 2 + 4\kappa_1 \right] - \frac{1}{\kappa_1^2} + \frac{3}{\kappa_1} - 4 + 4\kappa_1 - 8\kappa_1^2 \right\}, \quad \kappa_1 \leq \kappa_0; \quad (19)$$

видно, что при  $\kappa_1 = \kappa_0$  эти два сечения совпадают.

Полное выражение для спектра в л.с. есть сумма этих двух сечений  $d\sigma_{L1} + d\sigma_{L2}$  и дается формулами (17) — (19).

7. Проведем анализ полученных результатов. Прежде всего отметим, что сечение излучения быстрой частицы в л.с. (17) совпадает с сечением



излучения частицы в с.д.и. (16) с точностью до релятивистского пересчета энергии в аргументе логарифма. Более того, мы можем зафиксировать переменную  $\eta = \kappa_2 + \alpha\kappa_1$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ), что означает, что фиксирована частота в системе, где движутся обе частицы, причем  $\alpha = 1$  в с.д.и. и  $\alpha = 0$  в л.с. Проведя интегрирование по  $\kappa_1$ , мы получаем формулу (17), где теперь  $\xi = \eta / v$ . Это означает, что хотя спектр излучения фотона не является релятивистски инвариантной величиной, тем не менее для быстрых частиц в силу излучения фотонов в узкие конуса оказывается возможным пересчет спектра из системы в систему.

Сравним теперь полученные результаты с найденными раньше. В полученном Гарибяном спектре излучения в л.с. [5] правильно выписан результат для вклада излучения быстрой частицы, полностью отсутствует вклад в излучение частицы отдачи и имеются члены, происхождение которых установить не удалось. Альтарелли и Бучелла [6] сравнивали свой результат в с.д.и. с результатом Гарибяна в л.с. Мы видели, что с точностью до релятивистского пересчета энергии сечение излучения одной частицы в с.д.и. совпадает с сечением излучения быстрой частицы в л.с., однако в с.д.и. такой же вклад в спектр дает другая частица, так что в полном выражении для спектра возникает дополнительный множитель 2, который, следовательно, не был пропущен Гарибяном, как полагали эти авторы. Для спектра излучения частицы отдачи (поскольку излучение не направлено в узкие конуса) никаких пересчетов делать нельзя.

8. Анализ отброшенных интерференционных членов можно провести двумя способами.

Выражение для сечения излучения фотона в приближении классических токов (см. [10], формула (16)) содержит вклады всех диаграмм, в том числе и все интерференционные члены. Поэтому можно провести прямое вычисление вкладов этих членов при  $\omega \ll 1$ . Это особенно просто сделать в с.д.и., где нижний предел интегрирования по  $\Delta^2$  оказывается одним и тем же. В л.с. эти пределы разные, но для оценок можно воспользоваться наименьшим из них. Тогда расчет показывает, что все интерференционные члены имеют порядок  $1/v$ .

В случае произвольных частот оценку отброшенных членов можно провести с помощью неравенства Шварца, что в с.д.и. было проведено в [6]. В л.с. рассмотрение проводится аналогично и, например, для интерференционных членов между излучением разными частицами получаем

$$d\sigma_{int} \lesssim \frac{ar_0^2}{v} \int \frac{d\kappa_1}{\kappa_1} \frac{d\kappa_2}{\kappa_2}; \quad (20)$$

такого рода члены мы отбрасывали.

9. Рассмотрим процесс излучения фотона при столкновении электронов с помощью метода ВВ. Формулировка задачи в л.с. дана в книге Ахиезера и Берестецкого [5], там же получен результат для излучения быстрой частицей:

$$d\sigma_{L1} = 4r_0^2\alpha \frac{d\omega}{\omega} \frac{E - \omega}{E} \left[ \frac{E}{E - \omega} + \frac{E - \omega}{E} - \frac{2}{3} \right] \ln \frac{2E(E - \omega)}{\omega}, \quad (21)$$

совпадающий с логарифмической частью сечения (17). Для излучения частицы отдачи следует отдельно рассматривать случаи  $\omega > 1/2$  и  $\omega < 1/2$ , причем область изменения частоты виртуального фотона есть

$$\begin{aligned} \omega \leq \omega_1 \leq \infty, & \quad \omega > 1/2, \\ \omega \leq \omega_1 \leq \omega/(1 - 2\omega), & \quad \omega < 1/2. \end{aligned} \quad (22)$$

Выполняя интегрирование в выражении

$$d\sigma_{L2} = 2ar_0^2 d\omega \int \frac{d\omega_1}{\omega_1^3} \ln\left(\frac{E}{\omega_1}\right) \left[ \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_1} + \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_1}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_1}\right) \right], \quad (23)$$

получаем

$$d\sigma_{L2} = \frac{2ar_0^2}{3} \frac{d\omega}{\omega^2} \left\{ 4 - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{4\omega^2} \right\} \ln \frac{E}{\omega}, \quad \omega \geq \frac{1}{2}, \quad (24)$$

$$d\sigma_{L2} = \frac{16}{3} ar_0^2 \frac{d\omega}{\omega} \{ 1 - \omega + \omega^2 \} \ln \frac{E}{\omega}, \quad \omega \leq \frac{1}{2}; \quad (25)$$

при  $\omega = 1/2$  эти два выражения совпадают.

Сравнивая результат с формулами (18), (19), видим, что формула (25) совпадает с главным логарифмическим членом сечения (19) (заметим, что интеграл (23) дает и второй логарифмический член в (19), но сохранение его является превышением точности, так как этот член нигде не является логарифмически большим; сохранение его приводит к неправильному поведению сечения при  $\omega \rightarrow 0$ ). Однако формула (24) не совпадает с логарифмической частью сечения (18) ( $\ln(E/\omega)$  в приближенной формуле,  $\ln(2E/m) -$  в точной), так что здесь метод ВВ дает неправильный результат. Это связано с тем, что для применимости метода ВВ является необходимой близость полюса по передаче импульса  $\Delta^2$ . В случае излучения быстрой частицей

$$\Delta_{min}^2 \approx \omega^2/4E^2(E - \omega)^2, \quad (26)$$

так что полюс действительно близок; но для излучения частицы отдачи

$$\Delta_{min}^2 \approx \omega^2/E(E - \omega) \quad (27)$$

и при больших  $\omega$  полюс по  $\Delta^2$  лежит уже достаточно далеко от области интегрирования, что и приводит к неприменимости метода ВВ.

В с.д.и. метод ВВ применим и приводит к логарифмическому члену в формуле (16).

10. Тормозное излучение фотона может быть рассмотрено также с помощью приближения классических токов (см. [10], формула (16)). В [10] получен спектр в с.д.и. В л.с. отдельно рассматривается излучение быстрой частицы и частицы отдачи с  $\Delta_{min}^2$ , даваемыми формулами (26), (27). Тогда для  $\omega \ll 1$  легко получаем (метод классических токов применим для энергий фотона много меньших характерных энергий задачи, в л.с. это — масса электрона)

$$d\sigma_{L1} = \frac{16}{3} r_0^2 \alpha \frac{d\omega}{\omega} \ln\left(\frac{2E^2}{\omega}\right), \quad d\sigma_{L2} = \frac{16}{3} r_0^2 \alpha \frac{d\omega}{\omega} \ln\left(\frac{E}{\omega}\right). \quad (28)$$

Эти результаты следуют также из (17), (19) при  $\omega \ll 1$ . Видно, что сечения излучения мягких фотонов быстрой частицей и частицей отдачи различаются только на множитель  $2E$  в аргументе логарифма.

Авторы весьма благодарны В. М. Галицкому и Е. М. Лифшицу за обсуждение.

## Литература

- [1] C. Bernardini, G. Corasa, G. Di Giugno, J. Haissinski, P. Marin, R. Querzoli, B. Touschek. *Nuovo Cim.*, **34**, 1473, 1964.
- [2] E. Dally. *Phys. Rev.*, **123**, 1840, 1961.
- [3] Г. М. Гарибьян. *Изв. АН Арм.ССР*, **5**, 3, 1952.
- [4] V. N. Baier, S. A. Kheifets. *Nucl. Phys.*, **47**, 343, 1963.
- [5] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. *Квантовая электродинамика*, Физматгиз, 1959.
- [6] G. Altarelli, F. Buccella. *Nuovo Cim.*, **34**, 1337, 1964.
- [7] В. Н. Байер, В. М. Галицкий. *ЖЭТФ*, **49**, 661, 1965.
- [8] В. Н. Байер, В. А. Хозе. *ЖЭТФ*, **48**, 946, 1965.
- [9] В. Н. Байер, В. С. Фадин, В. А. Хозе. *ЖЭТФ*, **50**, 1611, 1966.
- [10] V. N. Baier, V. M. Galitsky. *Phys. Lett.*, **13**, 355, 1964.

---

**BREMSSTRAHLUNG IN HIGH ENERGY  
ELECTRON COLLISIONS**

*V. N. Baier, V. S. Fadin, V. A. Khoze*

Single bremsstrahlung in high energy electron collisions is considered. The angular distribution and spectrum of the emitted photons in the c. m. s. and l. s. are calculated. Radiation due to the incident particle and recoil particle is considered in the l. s. case. The classical current and Weizsacker — Williams methods are analyzed and it is shown that the latter method is not valid for calculating the spectrum of photons emitted by recoil particles if  $\omega > m/2$ .

---