

## О НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПЛАЗМЕ И ДРУГИХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

Ю. А. Березин, В. И. Карпман

Исследуются нестационарные решения уравнения Кортевега — де Вриза, описывающего эволюцию нелинейных возмущений в плазме и других диспергирующих средах. Установлены условия распада возмущений на «солитоны» — стационарные уединенные волны. Выяснен физический смысл автомоделного решения уравнения Кортевега — де Вриза. Получены некоторые общие асимптотические соотношения для нестационарных решений.

### 1. Введение. Общие соотношения

Качественное отличие нелинейной динамики плазмы от газодинамики состоит в существенной роли дисперсионных эффектов (см., например, [1]). Для выяснения характера возникающих при этом явлений естественно рассмотреть прежде всего случай, когда отклонения закона дисперсии от линейного невелики, так что дисперсионное уравнение можно представить в виде ряда по степеням волнового числа:

$$\omega = v_f k (1 \pm \delta^2 k^2 + \dots), \quad (1.1)$$

где  $v_f$  — фазовая скорость малых колебаний при  $k \rightarrow 0$ , а  $\delta$  — некоторая постоянная, характеризующая величину дисперсионных эффектов («длина» дисперсии). Если в соотношении (1.1) можно ограничиться двумя первыми членами (величина  $\delta$  мала по сравнению с характерными длинами волн, существенными для данной задачи), а также рассматривать возмущения конечной, но достаточно малой амплитуды, то в целом ряде случаев уравнение для таких возмущений (в первом исчезающем порядке по отношению к нелинейным и дисперсионным эффектам) приводится к виду

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (1.2)$$

где  $u$  — величина возмущения (например, скорости или магнитного поля в плазме), а параметр  $\beta$  равен  $\mp v_f \delta^2$ <sup>1)</sup>.

Уравнение (1.2) было впервые получено Кортевегом и де Вризом [2] для поверхностных волн в жидкости, имеющих достаточно большую длину волны (по сравнению с глубиной) и достаточно малую, но конечную амплитуду. Аналогичное уравнение для плазменных волн было впервые получено Гарднером и Морикавой [3] (для волн, распространяющихся поперек магнитного поля в холодной плазме) и в работах [4, 5] (для волн, распространяющихся под углом к магнитному полю)<sup>2)</sup>. Разумеется, значе-

<sup>1)</sup> Уравнение (1.2) записано в системе отсчета, которая движется со скоростью  $v_f = \lim_{k \rightarrow 0} (\omega/k)$  относительно среды; величина  $u$  имеет размерность скорости.

<sup>2)</sup> Для волн, распространяющихся поперек магнитного поля в холодной плазме,  $\beta = V_A c^2 / \omega_{0e}^2$  (при достаточно большом ларморовском радиусе ионов знак  $\beta$  меняется [7, 8]). Для волн, распространяющихся под углом  $\pi/2 - \theta$  к магнитному полю,  $\beta = -V_A c^2 \theta^2 / \omega_{0i}^2$  (при  $1 \gg \theta \gg (m_e/m_i)^{1/2}$ ). В случае гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости  $\beta = \frac{1}{2}(gh)^{1/2}(h^2/3 - \alpha/\rho g)$ , где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность,  $h$  — глубина канала [4], так что в зависимости от последней  $\beta$  может быть как положительным, так и отрицательным.

ние уравнения (1.2) не исчерпывается этими случаями. Как отмечено в [4], оно справедливо и для других типов плазменных волн малой, но конечной амплитуды, когда можно ограничиться двумя первыми неисчезающими членами в дисперсионном уравнении (1.1), которое легко получается из (1.2) после линеаризации и перехода к системе отсчета, где плазма покоится (см. также [6-8]). Заметим, наконец, что уравнение (1.2) также тесно связано с проблемой Ферми — Паста — Улама об установлении стохастических колебаний в нелинейной струне [9, 10].

Легко убедиться, что решения уравнения Кортевега — де Вриза при  $\beta < 0$  получаются из соответствующих решений для случая  $\beta > 0$  путем замены

$$u \rightarrow -u, \quad x \rightarrow -x, \quad t \rightarrow t. \quad (1.3)$$

Поэтому можно ограничиться подробным исследованием уравнения (1.2) при  $\beta > 0$ .

Стационарные решения уравнения (1.2) были изучены еще Кортевегом и де Вризом [2], которые показали, что эти решения представляют собой уединенные и периодические («кноидальные») волны, распространяющиеся с постоянной скоростью относительно среды, т. е. описываются уравнениями вида  $u(x, t) = u(x - Vt)$ . Для уединенной волны или, по терминологии работы [10], «солитона»  $u(x)$  имеет вид

$$u(x) = u_0 \operatorname{sch}^2 \{ (u_0 / 12\beta)^{1/2} x \}, \quad (1.4)$$

а скорость волны определяется ее амплитудой и равна  $V = u_0 / 3$ . Для периодических волн

$$\begin{aligned} u(x) &= (2a / s^2) \operatorname{dn}^2 \{ (a / 6\beta)^{1/2} (x / s) \} + \gamma, \\ V &= 2a(2 - s^2) / 3s^2 + \gamma. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\operatorname{dn} z$  — эллиптическая функция Якоби с модулем  $0 \leq s \leq 1$ ,  $a$  и  $\gamma$  — произвольные постоянные, причем  $a$  имеет смысл амплитуды волны. Длина волны  $\lambda$  и среднее значение амплитуды  $\bar{u}$  равны

$$\lambda = 2(6\beta / a)^{1/2} s K(s^2), \quad \bar{u} = 2aE(s^2) / s^2 K(s^2) + \gamma, \quad (1.6)$$

где  $K(s^2)$ ,  $E(s^2)$  — полные эллиптические интегралы с модулем  $s$ .

При  $s \rightarrow 1$

$$K(s^2) \approx \frac{1}{2} \ln \left( \frac{16}{1 - s^2} \right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \operatorname{dn} z \rightarrow \operatorname{sch} z, \quad (1.7)$$

так что периодическую волну при  $s \approx 1$  можно приближенно рассматривать как последовательность солитонов с амплитудами  $u_0 = 2a$  (по отношению к уровню  $\bar{u} = \gamma$ ), удаленных друг от друга на логарифмически большое расстояние  $\lambda = 2(6\beta / a)^{1/2} |\ln(1 - s^2)|$ . Ширина каждого солитона, согласно (1.4), равна  $(12\beta / u_0)^{1/2}$ , а его скорость  $-V = (2a / 3) + \gamma$  (в системе координат, которая движется относительно плазмы со скоростью  $v_f = \lim_{k \rightarrow 0} (\omega / k)$ ).

Приведенные выше решения являются стационарными. Некоторые нестационарные решения уравнения Кортевега — де Вриза рассматривались ранее авторами в [4]<sup>3)</sup>, где было подробно изучено автомодельное решение

<sup>3)</sup> В работе [4] рассматривалась задача не с начальными, а с граничными условиями (возбуждение волн источником на границе плазмы); соответствующее уравнение имело вид

$$u_t + v_f u_x + (u / v_f) u_t + (\beta / v_f^3) u_{ttt} = 0.$$

Вводя новые переменные  $\tau = x / v_f$ ,  $\xi = v_f t - x$ , приходим к уравнению (1.2) с начальными условиями.

уравнения (1.2), а также Забуским и Крускалом в [10], где путем численного интегрирования было получено решение, соответствующее периодическому начальному условию  $u(x, 0) = \cos \pi x$ . Интересный приближенный метод рассмотрения нестационарных решений уравнения Кортевега — де Вриза, основанный на представлении этих решений в виде (1.5) с медленно меняющимися параметрами  $a, s, \gamma$ , был развит Уитэмом [42].

Решение, полученное в [10] Забуским и Крускалом, существенно отличается от автомодельного решения, изучавшегося в [4]. Это различие заключается в том, что первое решение дает ряд отдельных солитонов, на которые распадается выбранное начальное возмущение  $u(x, 0) = \cos \pi x$ , в то время как автомодельное решение представляет волновой пакет, который на солитоны не распадается. Таким образом, различным начальным условиям могут соответствовать решения существенно разных типов. В настоящей работе выясняются некоторые характерные черты различных типов решений уравнения Кортевега — де Вриза.

## 2. Принцип подобия

Сформулируем прежде всего закон подобия для уравнения Кортевега — де Вриза. Запишем начальное условие в виде

$$u(x, 0) = u_0 \varphi(x/l), \quad (2.1)$$

где  $u_0$  — амплитуда, а  $l$  — линейный размер начального возмущения. Изменяя параметры  $u_0$  и  $l$ , получаем семейство подобных начальных условий, характеризуемых безразмерной функцией  $\varphi(x/l)$ . Вводя новые переменные

$$\eta = u/u_0, \quad \xi = x/l, \quad \tau = u_0 t/l, \quad (2.2)$$

из (1.2) и (2.1) получаем

$$\eta_\tau + \eta \eta_\xi + \sigma^{-2} \eta_{\xi\xi\xi} = 0, \quad \eta(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad (2.3)$$

где

$$\sigma = l(u_0/\beta)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует, что течения, соответствующие одному и тому же значению числа  $\sigma$  и одной и той же начальной функции  $\varphi(\xi)$ , подобны. Для солитонов (1.4) имеем

$$\sigma = \sigma_s = \sqrt{12}. \quad (2.5)$$

Число  $\sigma$  является фактически показателем нелинейности задачи, а его значение  $\sigma_s$  для солитона — в определенном смысле характеристическим: для случаев  $\sigma \gg \sigma_s$  и  $\sigma \ll \sigma_s$  при одной и той же форме начального возмущения  $\varphi(\xi)$  получаются качественно различные решения (см. ниже).

## 3. Некоторые особенности нестационарных решений

Рассмотрим решения уравнения (1.2), соответствующие наиболее типичным начальным возмущениям, затухающим при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Возьмем сначала начальное возмущение в виде одиночного возвышения, например

$$u(x, 0) = u_0 \exp(-x^2/l^2). \quad (3.1)$$

Характер решений будет зависеть от значений числа  $\sigma$  для начального условия (3.1).

Как показывает численный эксперимент (см. рис. 1), при достаточно больших значениях  $\sigma \gg \sigma_s$  начальное возмущение (3.1) в процессе эволюции практически полностью распадается на отдельные солитоны (из дальнейшего будет видно, что, кроме солитонов, образуется еще «хвост», представляющий собой ограниченный волновой пакет малой амплитуды).

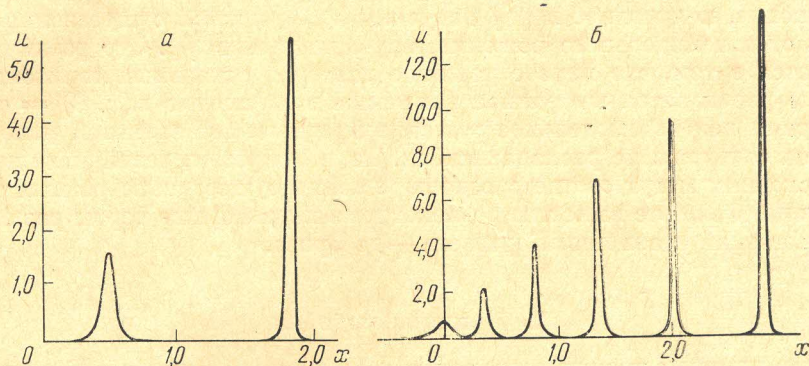


Рис. 1. Профиль возмущения в случае  $\beta > 0$  при  $\sigma > \sigma_s$ : а)  $\sigma = 5,9$ ; б)  $\sigma = 16,5$

Решение такого же типа (распадающееся на солитоны) было получено ранее Забуским и Крускалом [10] для периодического начального условия

$$u(x, 0) = \cos \pi x.$$

Из численного эксперимента следует, что начальное возмущение (3.1) при  $4 < \sigma < 7$  распадается на два солитона, при  $7 < \sigma < 11$  — на три, при  $\sigma \sim 11$  — на четыре и при  $\sigma \sim 16$  — на шесть солитонов, т. е. при увеличении числа  $\sigma$  соответствующее возмущение распадается на большее число солитонов.

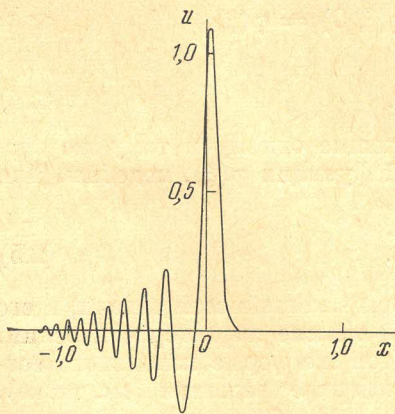


Рис. 2. Профиль возмущения в случае  $\beta > 0$  при  $\sigma < \sigma_s$  ( $\sigma = 1,9$ )

В обратном предельном случае ( $\sigma \ll \sigma_s$ ) получаются «несолитонные» решения, соответствующие возмущениям, которые не распадаются на солитоны. Эти решения представляют собой быстроосциллирующие волновые пакеты. Качественно эти решения похожи на автомодельное решение, изучавшееся в [4], хотя в количественном отношении они могут отличаться законом спада амплитуды во времени и пространстве (как будет показано ниже, характер асимптотической зависимости волнового числа от  $x$  и  $t$  в быстроосциллирующей части пакета является общим для всех решений такого типа и совпадает с полученным ранее для автомодельного решения в [4]).

Наконец, отметим, что при некоторых начальных условиях получается решение смешанного типа, содержащее наряду с солитонами, уходящими вперед, отстающий от них «хвост», имеющий такой же вид, как и цуг быстрых колебаний (рис. 2).

Некоторые качественные особенности «чисто солитонных» решений можно выяснить, исходя из законов сохранения, которые получаются из уравнения Кортевега — де Вриза. Оказывается, что кроме трех известных законов сохранения, приведенных, например, в [12], существует еще много других<sup>4)</sup>. Эти законы сохранения можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial Q_m(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_m(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 &= u, & P_1 &= 1/2 u^2 + \beta u_{xx}, \\ Q_2 &= 1/2 u^2, & P_2 &= 1/3 u^3 + \beta (u u_{xx} - 1/2 u_x^2), \\ Q_3 &= 1/3 u^3 - \beta u_x^2, & P_3 &= 1/4 u^4 + \beta (u^2 u_{xx} + 2u u_x u_x) + \beta^2 u_{xx}^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Первым законом сохранения является само уравнение (1.2), если записать его в дивергентной форме. Второй закон получается из (1.2) после умножения обеих частей уравнения на  $u$  и т. д. Громоздкость выкладок, однако, быстро возрастает с увеличением  $m$ .

Если при  $x \rightarrow \pm \infty$  возмущение затухает, то из (3.2) следует:

$$S_m = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, 0) dx. \quad (3.4)$$

Если из начального возмущения образуется  $N$  солитонов, то после того, как они разошлись друг от друга достаточно далеко, сохраняющиеся величины  $S_m$  будут складываться из значений этих величин для отдельных

солитонов, т. е.  $S_m = \sum_{r=1}^N S_m^{(r)}$ . Приравнявая эту сумму величине  $S_m$ , вычисленной для начального возмущения (3.1), получим следующие уравнения:

$$\sum_{r=1}^N \eta_r^{m-1/2} = \frac{\sigma}{\sigma_s} \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\xi, 0) d\xi \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} q_m(\xi) d\xi \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.5)$$

где  $\eta_r = u_0 / u_0^{(r)}$  — безразмерные амплитуды образовавшихся солитонов,  $u_0$  — характерная «амплитуда» начального возмущения (3.1), число  $\sigma$ , определяемое по формуле (2.4), относится к начальному возмущению, а  $Q_m(\xi, 0)$  и  $q_m(\xi)$  — плотности сохраняющихся величин соответственно для начального условия и солитона, выраженные в безразмерных переменных (где  $u_0 = l = 1$ ).

Система уравнений (3.5) позволяет, в принципе, определить амплитуды солитонов, образовавшихся из заданного начального возмущения. Пусть, например, это возмущение распадается на два солитона ( $N = 2$ ). В этом случае, решая систему (3.5), получим следующие выражения для амплитуд:

$$(\eta_{1,2})^{1/2} = 1/2 \{a_1 \pm [(4a_2 / 3a_1) - a_1^2 / 3]^{1/2}\}, \quad (3.6)$$

<sup>4)</sup> Законы сохранения с четвертого по восьмой были получены М. Крускалом, Н. Забуским и Р. Миура (частное сообщение проф. М. Крускала). По-видимому, число таких законов сохранения бесконечно.

где

$$a_1 = \left( \frac{\sigma}{2\sigma_s} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi, \quad a_2 = \left( \frac{3\sigma}{4\sigma_s} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\xi) d\xi. \quad (3.7)$$

Условие вещественности корней приводит к неравенству  $4a_2 > a_1^3$  (знак равенства нужно исключить, так как это означает образование двух солитонов одинаковой амплитуды, которые не могли бы разойтись, поскольку скорость солитона пропорциональна его амплитуде). Далее, отметим, что при получении выражения (3.6) все квадратные корни понимались

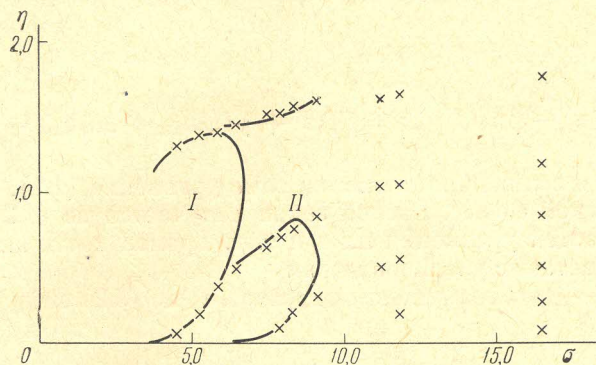


Рис. 3. Зависимость амплитуды солитонов от параметра подобия. Крестики — «экспериментальные» значения, кривая I — распад на два солитона, кривая II — распад на три солитона

в арифметическом смысле; поэтому правая часть (3.6) должна быть положительной, что дает неравенство  $a_1^3 > a_2$ . При  $a_1^3 \rightarrow a_2$  амплитуда одного из солитонов стремится к нулю.

Таким образом, для распада начального возмущения (3.1) на два солитона необходимо, чтобы параметр подобия (2.4) удовлетворял условиям

$$\sigma_c < \sigma < 2\sigma_c, \quad (3.8)$$

$$\sigma_c^2 = 6\sigma_s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\xi) d\xi \cdot \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right]^{-3}. \quad (3.9)$$

Нижняя граница  $\sigma = \sigma_c$  отделяет возмущения, распадающиеся на солитоны, от возмущений, которые эволюционируют принципиально иным способом; они либо вообще не распадаются на солитоны, либо дают один солитон и сравнимый с ним по энергии «хвост» (рис. 2)<sup>5)</sup>. Для начального профиля (3.1)  $\sigma_c \approx 4$ , что по порядку величины совпадает с  $\sigma_s$  (см. (2.5)). Если же выбрать в качестве начального возмущения

$$u(x, 0) = u_0 \operatorname{sch}^2(x/l), \quad (3.10)$$

где  $u_0$ ,  $l$  — произвольные постоянные, то получим, что  $\sigma_c = \sigma_s$ . Следовательно, значение параметра  $\sigma$  для солитона определяет по порядку величины границу между решениями качественно различных типов.

<sup>5)</sup> Численные решения при больших, чем на рис. 2, временах  $t$  не дают чего-либо существенно нового: «хвост», состоящий из коротковолновых осцилляций, удлиняется, а передний максимум, переходящий при  $t \rightarrow \infty$  в солитон, движется вперед.

При  $\sigma > \sigma_c$  начальное возмущение (3.1) всегда распадается на солитоны. На рис. 3 крестиками отмечены амплитуды солитонов, образовавшихся из (3.1) при разных значениях параметра  $\sigma$ . Зависимость амплитуд солитонов от  $\sigma$ , получающаяся из законов сохранения в предположении, что возмущение распадается на два и три солитона, изображена соответственно кривыми I и II (кривая I — две ветви выражения (3.6), а кривая II получена путем численного решения системы (3.5) при  $N = 3$ ). Как видно из рис. 3, «экспериментальные» значения хорошо укладываются на соответствующие кривые, полученные при допущении, что возмущение полностью распадается на солитоны (т. е. что можно пренебречь вкладом «несолитонной» части решения)<sup>6)</sup>. При выполнении условия (3.8) «экспериментальные» значения хорошо укладываются на кривую I, за исключением непосредственной окрестности верхней границы  $\sigma \sim 2\sigma_c$ . Вблизи этой границы «экспериментальные» точки переходят уже на кривую II, т. е. при  $\sigma \gtrsim 2\sigma_c \approx 8$  образуется три солитона, которые «сходят» с кривой II, когда амплитуды двух солитонов из трех становятся достаточно близкими друг к другу.

Нетрудно убедиться, что точки, где амплитуды каких-либо двух солитонов совпадают, являются особыми и в общем случае — в том смысле, что решение, дающее конечное число солитонов, становится в этих точках неустойчивым. Действительно, если рассмотреть приращения амплитуд солитонов при бесконечно малой вариации начального условия, то из системы (3.5) получим

$$\left(m - \frac{1}{2}\right) \sum_{r=1}^N \eta_r^{m-3/2} \delta\eta_r = \delta B_m \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (3.11)$$

где  $\delta B_m$  — вариации правых частей системы (3.5), а  $\delta\eta_r$  — приращения амплитуд солитонов. Соотношения (3.11) можно рассматривать как систему уравнений для приращений  $\delta\eta_r$  при заданных  $\eta_r$  и  $\delta B_m$ . Если за неизвестные принять величины  $\eta_r^{-1/2} \delta\eta_r$ , то система уравнений будет линейной, а ее определитель есть определитель Вандермонда, составленный из величин  $\eta_r$ , который, как известно, обращается в нуль, если два каких-либо значения  $\eta_r$  совпадают. Таким образом, если  $\eta_{r-1} \rightarrow \eta_r$  хотя бы для одного значения  $r$ , то малым вариациям начального условия отвечают большие изменения амплитуд солитонов (т. е. такие решения неустойчивы относительно вариации начальных условий). Вблизи указанных точек должен качественно измениться характер решения (реализуется более устойчивый вариант).

Необходимо отметить, что решения, которые не дают солитонов, могут иметь место не только при  $\sigma < \sigma_c$ . Так например, если площадь профиля

начального возмущения  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx \leq 0$ , то его распад на одни толь-

ко солитоны невозможен, поскольку площадь профиля сохраняется, а для солитона она должна быть положительной. Это справедливо для случая, когда параметр дисперсии  $\beta$  положителен. При  $\beta < 0$  площадь профиля солитона отрицательна, и поэтому всякое возмущение, у которого площадь

<sup>6)</sup> По-видимому, «несолитонная» часть решения должна существовать во всех этих случаях, поскольку, кроме тех законов сохранения, из которых определялись амплитуды солитонов, существуют еще и другие, которые также должны выполняться.

профиля положительна, не может распасться на солитоны. Следовательно, для распада возмущения на солитоны необходимо, чтобы знак площади профиля этого возмущения совпадал со знаком дисперсионного параметра  $\beta$ . Это условие можно обобщить на основе общих соотношений (3.5). Поскольку в левых частях уравнений (3.5) все квадратные корни понимаются в арифметическом смысле, то эти левые части должны быть положительными, т. е. необходимое условие распада возмущения на солитоны имеет вид

$$\text{sign} \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, 0) dx = \text{sign} \int_{-\infty}^{\infty} q_m(x) dx, \quad (3.12)$$

где  $Q_m(x, 0)$  и  $q_m(x)$  определяются соотношениями (3.3) соответственно для начального возмущения и солитона.

На рис. 4 в качестве иллюстрации приведено решение уравнения (1.2) с  $\beta < 0$ , соответствующее начальному возмущению (3.1) с  $u_0 > 0$  ( $\sigma = 10$ ). Оно аналогично решению для случая, когда  $\beta > 0$  и  $\sigma < \sigma_c$ , с той только разницей, что коротковолновые осцилляции уходят вправо, а не влево (в соответствии с преобразованием (1.3)).

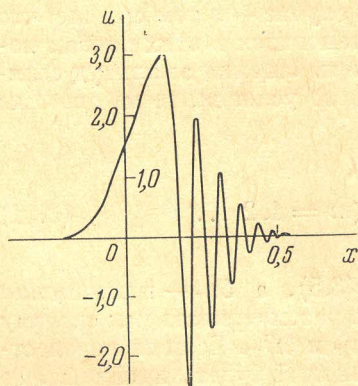


Рис. 4. Профиль возмущения в случае  $\beta < 0$  ( $\sigma = 10$ )

#### 4. Об автомодельном решении уравнения Кортевега — де Вриза

Используя приведенные выше результаты, можно получить дополнительную информацию относительно изучавшегося ранее в [4] автомодельного решения. Рассмотрим последовательность начальных возмущений, у которых характерный размер  $l \rightarrow 0$ , но произведение  $u_0 l^2$  остается постоянным. Решения уравнения (1.2), соответствующие таким начальным условиям, при одном и том же  $\beta$  должны быть подобными, так как  $\sigma$  остается постоянным. Вид этих решений при  $l \rightarrow 0$  можно установить, исходя из того, что предельное решение не может содержать постоянных параметров с размерностью длины и скорости. Единственный размерный параметр, который может входить в решение, — это параметр дисперсии  $\beta$  с размерностью  $\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-4}$ . Поэтому предельное решение может иметь только следующий вид:

$$u(x, t) = \beta^{1/3} t^{-2/3} \psi \{x / (\beta t)^{1/3}\}, \quad (4.1)$$

где  $\psi$  — безразмерная функция. Выражение (4.1) совпадает с автомодельным решением, полученным в [4], где также изучено поведение функции  $\psi$ .

Нетрудно убедиться, что начальное возмущение, приводящее к предельному решению (4.1), имеет вид

$$u(x, 0) = \beta \sigma^2 \delta'(x), \quad (4.2)$$

где  $\sigma$  — параметр подобия, соответствующий рассматриваемой последовательности начальных возмущений,  $\delta'(x)$  — производная  $\delta$ -функции. Дей-



ствительно, если  $C$  — произвольная постоянная, то в соотношении

$$C\delta'(x) = \lim_{l \rightarrow 0} \{-(Cx/\pi^{1/2}l^3)\exp(-x^2/l^2)\} \quad (4.3)$$

величина  $C/l^2$  является характерной скоростью  $u_0$ , следовательно,  $u_0 l^2 = C = \text{const}$ . Согласно (2.4),  $u_0 l^2 = \beta \sigma^2$ , откуда и следует выражение (4.2). Таким образом, физический смысл автомоделного решения (4.1) заключается в том, что оно описывает эволюцию начальных возмущений вида <sup>7)</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \{(C/\pi^{1/2})\exp(-x^2/l^2)\} \quad \text{при } x \gg l, t^{1/2} \gg l\beta^{-1/2}.$$

### 5. Некоторые асимптотические соотношения

Из сказанного выше следует, что для весьма широкого класса начальных возмущений «развившийся» профиль будет состоять из цуга быстрых осцилляций в левой (правой) части профиля при  $\beta > 0$  ( $\beta < 0$ ) и некоторой последовательности солитонов, уходящих вправо (влево). В определенных случаях амплитуда быстрых осцилляций может быть пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой солитонов (рис. 1). При других начальных условиях решение дает волновой пакет (рис. 2, 4) с быстрыми осцилляциями, с одной стороны, и медленными — с другой. Оказывается, что можно получить некоторые общие асимптотические соотношения для быстроосциллирующей и «солитонной» частей решения (для последней, разумеется, лишь в том случае, когда число солитонов достаточно велико).

Для получения этих соотношений воспользуемся методикой, развитой Уитэмом в [12], где рассматриваются решения, характеризующиеся достаточно медленным изменением параметров осцилляций на расстояниях, больших по сравнению с их периодом. В этом случае профиль можно представить как квазипериодическую волну (1.5) с медленно меняющимися параметрами (амплитудой  $a$ , скоростью  $V$  и т. д.). Для уравнения (1.2) имеется три независимых параметра, в качестве которых можно выбрать, например, амплитуду  $a$ , волновое число  $k = 2\pi/\lambda$  и среднее значение  $\bar{u}$  (см. (1.5), (1.6)). При этом модуль эллиптической функции  $s$  связан с  $a$  и  $k$  следующим выражением:

$$sK(s^2) = (\pi/k)(a/3\beta)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Если  $s \rightarrow 0$ , то эллиптическая функция  $\text{dn } z$  в (1.5) приближается к тригонометрической, причем амплитуда колебаний при этом может оставаться конечной (при  $k \rightarrow \infty$ ); такой случай реализуется в быстроосциллирующей части профиля. В обратном предельном случае, когда  $s \rightarrow 1$  при  $a = \text{const}$ , волновое число  $k \sim \{1/\ln(1-s)\} \rightarrow 0$  и волну можно рассматривать как последовательность солитонов; этот случай реализуется в «солитонной» части профиля.

<sup>7)</sup> Разумеется, это относится к любой другой последовательности функций, стремящейся при  $l \rightarrow 0$  к  $\delta'(x)$ , например,

$$u(x, 0) = Cl^3 \frac{\partial}{\partial x} \{(x^2 + l^2)^{-1}\}$$

(решение при достаточно больших  $x$  и  $t$  не зависит от детального вида  $u(x, 0)$ ).

Уравнения Уитэма для «медленно» меняющихся параметров в удобной для нас форме имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(b_1 + b_2) + v_3 \frac{\partial}{\partial x}(b_1 + b_2) = 0, \dots, \quad (5.2)$$

где многоточие означает циклическую перестановку, а  $b_i(x, t)$  — величины, связанные с  $a, s, \bar{u}$  соотношениями

$$a = \frac{1}{2}(b_1 - b_2), \quad s^2 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}, \quad \bar{u} = \frac{2aE(s^2)}{s^2K(s^2)} + b_3 \quad (5.3)$$

(для единообразия величина  $\gamma$  в (1.5), (1.6) здесь обозначена через  $b_3$ ); скорости  $v_i(x, t)$  определяются формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= (V/6) - aK/9(K - E), \\ v_2 &= (V/6) - a(1 - s^2)K/9[E - (1 - s^2)K], \\ v_3 &= (V/6) + a(1 - s^2)K/9s^2E, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$V = 1/3(b_1 + b_2 + b_3)$  — скорость волны, определяемая выражением (1.5). Величины  $v_i(x, t)$  имеют смысл скоростей распространения «римановых инвариантов»  $b_{i1} + b_{i2}$  ( $i, i_2 \neq i$ ).

В общем случае уравнения (5.2) — (5.4) весьма сложны, однако в предельных случаях  $1 - s \ll 1$  и  $s \ll 1$  они существенно упрощаются. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Пусть  $1 - s \ll 1$  (последовательность солитонов). Тогда  $b_2 - b_3 \sim 1 - s$ , так что  $b_2 \approx b_3$ . Далее,  $b_3 = \gamma$  имеет смысл величины возмущения между солитонами; поэтому  $b_3 \approx 0$  (что можно получить также непосредственно из уравнений (5.2)) и величина  $\bar{u}$  оказывается логарифмически малой ( $\bar{u} \sim 1/\ln(1 - s)$ ).

Таким образом,  $b_1 \approx 2a = u_0$  ( $u_0$  — амплитуда солитона),  $v_1 \approx 0$ ,  $v_2 \approx v_3 \approx 2u_0$ ; второе из уравнений (5.2) вырождается, а первое и третье принимают одинаковый вид:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{1}{3}u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0. \quad (5.5)$$

Общее решение уравнения можно написать в виде  $3x - u_0(t - t_0) = f(u_0)$ , где  $f(u_0)$  — произвольная функция, определяемая из условий в момент  $t_0$ , когда солитоны уже образовались. При увеличении  $t$  увеличивается крутизна профиля  $u_0(x, t)$ , и при достаточно больших  $t$  решение становится многозначным. В области многозначности решение теряет физический смысл, что связано с неприменимостью усредненных уравнений (5.2) — (5.4) при больших градиентах. В области однозначности решение при достаточно больших  $t - t_0$  принимает следующий асимптотический вид:

$$u_0(x, t) = 3x / (t - t_0), \quad (5.6)$$

т. е. при достаточно больших фиксированных  $t$  вершины солитонов должны лежать на прямой линии<sup>8)</sup>, угловой коэффициент которой убывает обратно пропорционально времени.

<sup>8)</sup> Это было замечено при анализе «экспериментальных» данных еще в [10].

Соотношение (5.6) справедливо, естественно, в том случае, когда число солитонов достаточно велико. Практически его точность, как показывает численное решение, оказывается вполне удовлетворительной уже для возмущения, распадающегося на шесть солитонов (рис. 1, б); при этом вершины самого большого и самого маленького солитонов несколько отклоняются от прямой, что связано, очевидно, с большими градиентами «средней» амплитуды в этих областях. Интересно, что соотношение (5.6) начинает выполняться с хорошей точностью еще до того, как солитоны пройдут расстояние, большое по сравнению с шириной области начального возмущения  $l$  (образование солитонов, вообще говоря, происходит очень быстро по сравнению с временем прохождения расстояния порядка  $l$ ).

Можно получить еще несколько интересных соотношений, характеризующих асимптотическое поведение величин  $k$  и  $\bar{u}$  для последовательности солитонов. Поскольку эти величины убывают при  $s \rightarrow 1$  (см. (5.1), (5.3)), то в уравнениях (5.2) необходимо учитывать малые члены, которыми до сих пор пренебрегались. Можно, однако, поступить проще, если воспользоваться «законом сохранения» для волнового числа [12]

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Vk) = 0, \quad (5.7)$$

который следует из точных уравнений (5.2). Ограничиваясь в выражении для  $V$  (1.5) членами, не исчезающими при  $s \rightarrow 1$ , получаем  $V = u_0/3$ . Воспользовавшись для  $u_0$  формулой (5.6), получаем из (5.7) простое уравнение, которое имеет общее решение вида  $k = t^{-1}f(x/t)$ , где  $f$  — произвольная функция. Как и при получении (5.6), мы должны потребовать, чтобы асимптотическое выражение для  $k$  не зависело от детального вида начальных условий. Волновое число  $k$  имеет размерность обратной длины, и этому требованию можно удовлетворить только при  $f(x/t) = Ct/x$ , где  $C$  — безразмерная постоянная. Поэтому при достаточно больших  $x$

$$k \approx C/x. \quad (5.8)$$

Таким образом, в фиксированной точке пространства среднее расстояние между солитонами не зависит от времени. Соотношению (5.8) можно придать более наглядную форму, если определить среднее расстояние между солитонами в окрестности точки, движущейся с каким-либо солитоном (имеющим, например, номер  $r$ ). Обозначая его амплитуду через  $u_0^{(r)}$ , получаем из (5.6) для координаты солитона выражение  $x = u_0^{(r)t}/3$ , откуда имеем

$$k_r \approx 3C/u_0^{(r)t}, \quad \lambda_r \approx 2\pi u_0^{(r)t}/3C, \quad (5.9)$$

где  $\lambda_r = 2\pi/k_r$  — среднее расстояние между солитонами. Оно увеличивается пропорционально времени, поскольку солитоны движутся равномерно, но с разными скоростями  $V = u_0/3$ .

Найдем теперь  $\bar{u}$  для рассматриваемой области. Учитывая (5.1) и (5.3) и пренебрегая величиной  $b_3$ , получаем  $\pi^2 \bar{u}^2 \approx 6\beta u_0 k^2$ , откуда следует

$$\bar{u} \approx (18C^2\beta/\pi x t)^{1/2}. \quad (5.10)$$

Наконец, рассмотрим еще область быстрых осцилляций в профилях, аналогичных изображенным на рис. 2 и 4. В этой области  $s^2 \ll 1$ . Тогда из (5.2) — (5.4) следует:

$$\frac{\partial}{\partial t}(4\bar{u} - 6\beta k^2) + (\bar{u} - 3\beta k^2) \frac{\partial}{\partial x}(4\bar{u} - 6\beta k^2) = 0, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{u} + \frac{a^2}{12\beta k^2} \right) + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{u} + \frac{a^2}{12\beta k^2} \right) = 0, \quad (5.12)$$

$$a = 3\beta k^2 s^2 / 2$$

При  $s^2 \ll 1$  в уравнении (5.11) можно положить  $\bar{u} = 0$ , после чего получаем, что при достаточно больших  $x$  и  $t$  имеет место асимптотическое соотношение

$$k^2 \approx -x / 3\beta t. \quad (5.13)$$

Знак минус здесь означает, что область быстрых осцилляций находится в задней ( $x < 0$ ) или передней ( $x > 0$ ) частях профиля в зависимости от знака  $\beta$  (см. соответственно рис. 2 и 4; начало координат выбрано в центре начального возмущения).

Если теперь учесть, что полное решение имеет вид  $u(x, t) = u(x - Vt)$  и что при  $s \ll 1$  можно написать  $u(x) \approx a \sin(kx + \alpha)$ ,  $V = -\beta k^2$ , то

$$u(x, t) \approx a(x, t) \sin \left[ (2/3) (-x^3 / 3\beta t)^{1/2} + \alpha \right], \quad (5.14)$$

где  $a(x, t)$  — амплитуда, определяемая из начальных условий. Соотношение (5.14) имеет в определенном смысле универсальный характер; оно справедливо для любой быстроосциллирующей части профиля, где  $\bar{u}$  достаточно мало (амплитуда при этом не обязательно должна быть малой). Поэтому естественно, что асимптотика автомодельного решения при больших  $x$ , найденная в [4], имеет вид (5.14).

Новосибирский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
11 июня 1966 г.

#### Литература

- [1] Р. З. Сагдеев. Вопросы теории плазмы, 4, Атомиздат, 1964.
- [2] D. J. Korteweg, G. de Vries. Phil. Mag., 39, 442, 1895.
- [3] C. S. Gardner, G. K. Morikawa. Courant Institute of Math. Science, Report NYO 9082, 1960.
- [4] Ю. А. Березин, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 46, 1880, 1964.
- [5] K. W. Morton. Phys. Fluids, 7, 1801, 1964.
- [6] В. Е. Захаров. ПМТФ, 3, 167, 1964.
- [7] C. S. Gardner, G. K. Morikawa. Comm. Pure Appl. Math., 18, 35, 1965.
- [8] Ю. А. Березин. ПМТФ, 6, 26, 1965.
- [9] M. D. Kruskal, N. J. Zabusky. J. Math. Phys., 5, 231, 1964.
- [10] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal. Phys. Rev. Lett., 15, 240, 1965.
- [11] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954.
- [12] G. B. Whitham. Proc. Roy. Soc., A283, 238, 1965.

#### NONLINEAR EVOLUTION OF DISTURBANCES IN PLASMAS AND OTHER DISPERSIVE MEDIA

*Yu. A. Berezin, V. I. Karpman*

The nonstationary solutions of the Korteweg — de Vries equation which describes the evolution of nonlinear disturbances in a plasma or other dispersive media are investigated. The conditions for disintegration of disturbances into «solitons» are found. The physical meaning of the selfsimilar solution of the Korteweg — de Vries equation is elucidated. Some general asymptotic relations for nonstationary solutions are obtained.