

СТРУКТУРА КОЛЛЕКТИВНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ПРОСТОЙ МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

С. Т. БЕЛЯЕВ, Б. А. РУМЯНЦЕВ

(Поступила в редакцию 29 июня 1965 г.)

В рамках модели со спариванием и квадрупольным взаимодействием нуклонов в осцилляторной потенциальной яме вычисляются массовые параметры коллективного гамильтониана деформированных ядер как функции β , γ и числа нуклонов в верхней незаполненной оболочке. Обсуждается соответствие полученного гамильтониана с гидродинамическим выражением, используемым в феноменологических методах.

1. Введение

Наиболее простым путем исследования коллективных возбуждений ядер является постулирование некоторого феноменологического гамильтониана, описывающего динамику ядра в терминах «коллективных переменных». Классическим примером является объяснение вращательных спектров деформированных ядер на основе гамильтониана О. Бора. В этом случае четкие закономерности в ядерных спектрах позволяют практически однозначно воссоздать коллективный вращательный гамильтониан. Для описания возбуждений другой природы необходимы более детальные предположения о структуре коллективного гамильтониана. Экспериментальные закономерности в ядерных спектрах не дают однозначных указаний о виде гамильтониана, а существенная необходимость введения дополнительных свободных параметров открывает при этом широкое возможности для различных спекуляций. В последние годы появилось большое число феноменологических моделей, часто основанных на совершенно различных и противоречащих друг другу предположениях [1, 2]. Хотя каждая из моделей в какой-то мере удовлетворительно описывает ограниченное число ядер (по крайней мере, одно ядро — идеально), отсутствие единой картины не может не вызвать разочарования. Понятны поэтому попытки обоснования вида коллективного гамильтониана из микроскопических представлений о движении нуклонов в самосогласованном поле и их взаимодействии. Так как основное различие между моделями связано с видом потенциальной энергии, то исследования были предприняты именно в этом направлении. Рядом авторов исследовалась равновесная форма ядер и вид потенциальной энергии в известной микроскопической модели, учитывающей спаривание и квадрупольное взаимодействие нуклонов [3]. Хотя полученные результаты позволяют сделать определенные заключения о правдоподобности некоторых феноменологических моделей (например, практически закрыть модель жесткого неаксиального ротатора [2]), они являются недостаточными для установления вида правильного коллективного гамильтониана.

Структура коллективных возбуждений ядра определяется не только формой потенциальной энергии, но и видом оператора кинетической энергии. Как правило, при решении последнего вопроса авторы всех феноменологических моделей проявляют единство, используя гидродинамическое выражение обобщенной модели Бора [4]. Насколько обоснованным является этот выбор? Ведь известно, в частности, что микроскопические

вычисления моментов инерции, дающие хорошее согласие с экспериментом для всех деформированных ядер [5], доказывают принципиально негидродинамическую природу моментов инерции.

Одним из авторов (С. Б.) был получен общий вид коллективного гамильтониана при произвольном межнуклонном взаимодействии [6]. Целью настоящей работы является исследование структуры оператора кинетической энергии коллективного гамильтониана для деформированных ядер в рамках модели с квадрупольным взаимодействием и спариванием нуклонов. Мы не ставим здесь целью количественное вычисление параметров кинетической энергии T для конкретных ядер. Основной задачей является анализ общих свойств оператора T в зависимости от числа нуклонов в верхней незаполненной оболочке и параметров взаимодействия. Поэтому в конкретных вычислениях мы ограничиваемся простой осцилляторной моделью одночастичных состояний, а отличия, связанные с реальной схемой уровней, обсуждаются лишь качественно.

2. Основные уравнения

Сформулируем кратко некоторые результаты работы [6], необходимые для дальнейшего. Кинетическую энергию для квадрупольных степеней свободы ядра можно записать в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\mu\mu'} B_{\mu\mu'} \dot{\alpha}_\mu \dot{\alpha}_{\mu'}, \quad (1)$$

где α_μ — скорости изменения тензора квадрупольной деформации α_μ . Квантовый оператор, соответствующий (1) и выраженный в угловых переменных (θ_i) и параметрах формы (β, γ) [4], имеет вид

$$T = -\frac{1}{2gR} \left\{ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial B_\gamma R}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial B_\beta R}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{R^4} \frac{\partial B_{\beta\gamma} R}{\partial R} \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{\beta \sin 3\gamma} \frac{\partial B_{\beta\gamma} R}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial \beta} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \beta} \right\} + \sum_{i=1,2,3} \frac{I_i^2}{2\mathcal{F}_i}, \quad (2)$$

где g и R определяются из соотношений

$$g^2 = B_\beta B_\gamma - B^2_{\beta\gamma}, \quad \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2 \mathcal{F}_3 = 4\beta^6 (\sin^2 3\gamma) R^2. \quad (3)$$

Здесь I_i — операторы проекций момента на оси симметрии ядра. Моменты инерции \mathcal{F}_i , а также массовые коэффициенты $B_\beta, B_\gamma, B_{\beta\gamma}$, вообще говоря, являются сложными функциями β и γ . При использовании оператора (2) волновые функции следует нормировать в пространстве β, γ с элементом объема

$$d\tau(\beta, \gamma) = |gR\beta^4 \sin 3\gamma| d\beta d\gamma. \quad (4)$$

Из условия симметрии массовые коэффициенты в (2) могут быть выражены через функции только двух тензорных инвариантов β^2 и $\beta^3 \cos 3\gamma$. В частности, для моментов инерции имеем

$$\mathcal{F}_i = 4\beta^2 (B_0 - B_1 \cos \gamma_i - B_2 \cos 2\gamma_i) \sin^2 \gamma_i, \quad (5)$$

$$\gamma_i = \gamma - 2/3\pi i,$$

где B_n ($n = 0, 1, 2$) — «скалярные» функции от β^2 и $\beta^3 \cos 3\gamma$.

Параметры, входящие в (2), могут быть также выражены через компоненты тензора масс $B_{\mu\mu'}$ (см. (1)):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &\equiv \mathcal{F}_{xx} = -4\beta^2 (B_{1-1} + B_{11}) \sin^2 \gamma_1, \\ \mathcal{F}_2 &\equiv \mathcal{F}_{yy} = -4\beta^2 (B_{1-1} - B_{11}) \sin^2 \gamma_2, \\ \mathcal{F}_3 &\equiv \mathcal{F}_{zz} = 4\beta^2 (B_{2-2} - B_{22}) \sin^2 \gamma_3; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
B_{\beta} &= B_{00} \cos^2 \gamma + \sqrt{2} B_{20} \sin 2\gamma + (B_{2-2} + B_{22}) \sin^2 \gamma, \\
B_{\gamma} &= B_{00} \sin^2 \gamma - \sqrt{2} B_{20} \sin 2\gamma + (B_{2-2} + B_{22}) \cos^2 \gamma, \\
B_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2}(B_{2-2} + B_{22} - B_{00}) \sin 2\gamma + \sqrt{2} B_{20} \cos 2\gamma.
\end{aligned}
\tag{7}$$

В микроскопической модели с учетом спаривания и квадрупольного взаимодействия нуклонов элементы тензора $B_{\mu\mu'}$ выражаются через суммы по одночастичным состояниям $|\nu\rangle$. Если пренебречь несущественной зависимостью константы спаривания Δ от деформации, найдем ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned}
B_{\mu\mu'} &= 2\kappa^2 \sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu}E_{\nu'} - \varepsilon_{\nu}\varepsilon_{\nu'} + \Delta^2}{2E_{\nu}E_{\nu'}(E_{\nu} + E_{\nu'})^3} \left(\langle \nu | q_{\mu}^* | \nu' \rangle + \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\kappa} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_{\mu}} \right) \times \\
&\quad \times \left(\langle \nu' | q_{\mu'} | \nu \rangle + \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\kappa} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_{\mu'}} \right),
\end{aligned}
\tag{8}$$

где ε_{ν} — энергия одночастичных уровней (отсчитанных от химического потенциала системы λ), κ — параметр квадрупольного взаимодействия, $E_{\nu} = (\varepsilon_{\nu}^2 + \Delta^2)^{1/2}$. Члены с $\partial \lambda / \partial \alpha_{\mu}$ учитывают изменения химического потенциала при деформации и автоматически исключают вклад нефизического состояния. Из условия постоянства числа частиц следует

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_{\mu}} = -\kappa \sum_{\nu} \frac{\Delta}{E_{\nu}^3} \langle \nu | q_{\mu}^* | \nu \rangle \Big/ \sum_{\nu'} \frac{\Delta}{E_{\nu'}^3}.
\tag{9}$$

Для деформированных ядер выражение (8) можно упростить. В сумме (8) при одном фиксированном индексе (например, ν) другой (ν') пробегает ограниченное число значений, разрешаемых правилами отбора для матричных элементов. В квазиклассическом приближении $\langle \nu | q | \nu' \rangle$ можно считать функциями энергетических переменных $\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'}$ и $\varepsilon_{\nu'}$, причем при фиксированной разности $(\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'})$ величина $\langle \nu | q | \nu' \rangle$ является плавной функцией ε_{ν} , заметно меняясь лишь на ширине оболочки. Первый множитель в сумме (8) при $\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'} = \text{const}$ имеет резкий максимум шириной Δ у поверхности Ферми ($\varepsilon_{\nu} = 0$), причем

$$\int d\varepsilon_{\nu} \frac{E_{\nu}E_{\nu'} - \varepsilon_{\nu}\varepsilon_{\nu'} + \Delta^2}{E_{\nu}E_{\nu'}(E_{\nu} + E_{\nu'})^3} = \frac{1}{2\Delta^2} f\left(\frac{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right),
\tag{10}$$

где

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{\text{arsh } x}{x(1+x^2)^{1/2}} \right].
\tag{11}$$

Таким образом, при достаточно большом расщеплении оболочечных уровней ($\gg \Delta$) можно в (8) произвести замену

$$\frac{E_{\nu}E_{\nu'} - \varepsilon_{\nu}\varepsilon_{\nu'} + \Delta^2}{E_{\nu}E_{\nu'}(E_{\nu} + E_{\nu'})^3} \rightarrow \frac{1}{2\Delta^2} f\left(\frac{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right) \delta(\varepsilon_{\nu}).
\tag{12}$$

В результате (8) принимает вид

$$\begin{aligned}
B_{\mu\mu'} &= \frac{\kappa^2}{\Delta^2} \sum_{\nu\nu'} f\left(\frac{\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right) \delta(\varepsilon_{\nu}) \left(\langle \nu | q_{\mu}^* | \nu' \rangle + \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\kappa} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_{\mu}} \right) \times \\
&\quad \times \left(\langle \nu' | q_{\mu'} | \nu \rangle + \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\kappa} \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_{\mu'}} \right).
\end{aligned}
\tag{13}$$

Матричные элементы квадрупольного момента отличны от нуля, во-первых, для переходов внутри одной оболочки, а во-вторых, через одну

оболочку ($\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'} \sim 2\omega_0$), причем их величина для переходов обоих типов примерно одна и та же. С другой стороны, функция $f(x)$ убывает при возрастании аргумента как x^{-2} , поэтому вкладом далеких переходов в (13) с точностью до $(\Delta/\omega_0)^2 \ll 1$ можно пренебречь.

Таким образом, $B_{\mu\mu'}$ определяется в основном свойствами одночастичных уровней у поверхности Ферми (в энергетическом интервале порядка Δ , так как, строго говоря, $\delta(\varepsilon_\nu)$ в (13) имеет именно такую ширину).

Прежде чем переходить к вычислению $B_{\mu\mu'}$ с использованием конкретной модели одночастичных уровней, проведем качественный анализ выражения (13). Во-первых, оценим вклад членов с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$. Как видно из (9), величина $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ зависит от степени усреднения матричного элемента $\langle v|q|v \rangle$ по группе уровней, лежащих на ширине Δ у поверхности Ферми. В осцилляторной модели $\langle nlm|q|nlm \rangle$ плавно меняется от уровня к уровню внутри оболочки (т. е. в энергетическом интервале $\sim n\omega_0\beta$), поэтому в случае $\Delta \ll n\omega_0\beta$ никакого усреднения на ширине Δ по существу не происходит. Количественные расчеты показывают, что в этом случае члены с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ в (13) практически полностью компенсируют основной член и $B_{\mu\mu'}$ оказывается очень малым. Осцилляторная модель представляет в этом смысле предельный случай максимального упорядочения уровней. В другом предельном случае естественно предположить полную хаотичность квантовых чисел для уровней внутри интервала Δ . Средняя величина $\langle v|q|v \rangle$ при этом оказывается малой, порядка деформации $\Delta R/R$, и вкладом членов с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ в (13) можно пренебречь, так как они приводят лишь к относительным поправкам $(\Delta R/R)^2 \sim A^{-2/3}$. Предположение о полной хаотичности уровней является слишком квазиклассическим для реальных ядер. Подобное наблюдалось бы лишь при деформациях $\Delta R/R \sim 1$, когда полностью исчезают всякие следы оболочечной структуры. Реальные ядра и в деформированном состоянии ($\Delta R/R \sim A^{-1/3}$) сохраняют некоторые следы упорядочения уровней. При этом члены с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$ в (13) могут давать заметный, хотя и не решающий вклад в массовый коэффициент¹⁾.

Имея в виду полукачественный характер анализа, ниже мы опускаем в (13) члены, содержащие $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$, и ограничиваемся исследованием основного члена:

$$B_{\mu\mu'}^0 = \frac{\kappa^2}{\Delta^2} \sum_{\nu\nu'} f\left(\frac{\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'}}{2\Delta}\right) \delta(\varepsilon_\nu) \langle v|q_\mu|v' \rangle \langle v'|q_{\mu'}|v \rangle. \quad (13a)$$

Когда квантовые числа ν в (13a) пробегает все значения внутри одной оболочки, то матричный элемент $\langle v|q|v' \rangle$ изменяется на полную амплитуду. Так, в аксиальном ядре $\langle v|q_0|v \rangle$ меняется от максимального отрицательного значения до максимального положительного, проходя через нуль вблизи середины оболочки. Естественно поэтому, что выражение (13a) очень чувствительно к квантовым числам состояний ν , лежащих у поверхности Ферми, т. е. к схеме одночастичных уровней. С другой стороны, функция f в (13a) зависит лишь от энергии перехода и поэтому мало чувствительна к модели. Не очень существенным, по-видимому, является также выбор одночастичных функций для вычисления матричных элементов $\langle v|q_\mu|v' \rangle$, если их квантовые числа фиксированы.

Основной интерес представляет зависимость массовых коэффициентов от γ . В предельном случае идеальной квазиклассики (описанном выше) зависимость правой части (13a) от μ и μ' вследствие полного усреднения

¹⁾ Согласно расчетам Беса [7], для случая β -колебаний эти члены дают поправку в B_β порядка 20—40%. Отметим, кстати, разницей в оценке членов с $\partial\lambda/\partial\alpha_\mu$, существующий в литературе. В работе [7] предварительная оценка проводится в осцилляторной модели. С другой стороны, Зарецкий и Урин [8] используют предположение о полной квазиклассичности, считая, что пространственное распределение частиц, населяющих уровни в ширине Δ у поверхности Ферми, совпадает с формой потенциала. Естественно, что эти оценки, соответствующие различным предельным случаям, дают противоположные результаты.

определяется лишь множителем $(-1)^{\mu'} \delta_{\mu, -\mu'}$. При этом инвариантные величины B_i ($i = 0, 1, 2$) в (5) и $B_{\beta\gamma}$ в (7) не будут зависеть от γ . Таким образом, вся зависимость этих величин от γ связана с остатками оболочечного упорядочения в деформированных ядрах. Ниже мы рассмотрим предельно упорядоченный случай — осцилляторную модель. Полученные в этой модели результаты позволят сделать качественные заключения о промежуточном случае реальных ядер.

3. Вычисления массовых коэффициентов в осцилляторной модели

Имея в виду тяжелые деформированные ядра, считаем осцилляторное квантовое число $n = n_1 + n_2 + n_3$ большим и пренебрегаем в дальнейшем членами $\sim 1/n$. Кроме того, будем пренебрегать при вычислении матричных элементов разностью частот по различным осям (т. е. членами $\sim (\omega_1 - \omega_2) / \omega_0 \sim A^{-1/3}$). Удобно считать квадрупольные моменты безразмерными, включив соответствующую размерную константу в параметр κ . При сделанных приближениях имеем для диагональных матричных элементов значения

$$\langle v | q_{20} | v \rangle = 3n_3 - n, \quad \langle v | q_{2\pm 2} | v \rangle = \sqrt{3/2} (n_1 - n_2). \quad (14)$$

Недиагональные элементы (внутри оболочки) отличны от нуля для переходов с изменением пары квантовых чисел на ± 1

$$\langle v | q_{2\pm 1} | v' \rangle = \begin{cases} \mp ({}^{3/2}n_1 n_3)^{1/2} & \text{для } |n_1 - n_1'| = 1, |n_3 - n_3'| = 1 \\ -i ({}^{3/2}n_2 n_3)^{1/2} & \text{для } |n_2 - n_2'| = 1, |n_3 - n_3'| = 1 \end{cases} \quad (14')$$

$$\langle v | q_{2\pm 2} | v' \rangle = \pm i ({}^{3/2}n_1 n_2)^{1/2} \text{ для } |n_2 - n_2'| = 1, |n_1 - n_1'| = 1;$$

Энергия одночастичных уровней в принятых обозначениях имеет вид

$$\epsilon_v = \epsilon(n_k) = \frac{2}{3} \kappa \beta \left(nu - \sum_k n_k \cos \gamma_k \right), \quad (15)$$

где константа u связана с химическим потенциалом системы и зависит от числа частиц в рассматриваемой оболочке.

Используя (14) и (15), легко провести вычисление $B_{\mu\mu'}$ в (13), а также удобно исследовать инвариантные комбинации компонент $B_{\mu\mu'}$. Для B_0, B_1 и B_2 , входящих в (5), имеем

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{2\kappa^2}{\Delta^2} \sum_n (f_1 \sin 2\gamma_1 n_2 n_3 + f_2 \sin 2\gamma_2 n_3 n_1 + f_3 \sin 2\gamma_3 n_1 n_2) \frac{\delta(\epsilon_v)}{\sin 3\gamma} \\ B_2 &= -\frac{2\kappa^2}{\Delta^2} \sum_n (f_1 \sin \gamma_1 n_2 n_3 + f_2 \sin \gamma_2 n_3 n_1 + f_3 \sin \gamma_3 n_1 n_2) \frac{\delta(\epsilon_v)}{\sin 3\gamma}, \quad (16) \\ B_0 &= \frac{\kappa^2}{\Delta^2} \sum_n (f_1 n_2 n_3 + f_2 n_3 n_1 + f_3 n_1 n_2) \delta(\epsilon_v), \end{aligned}$$

где $f_k = f(\omega_0 \beta \sin \gamma_k / \sqrt{3} \Delta)$. Для величин (7) находим

$$\begin{aligned} B_\beta &= \frac{4}{3} \frac{\kappa^2}{\Delta^2} \sum_n \delta(\epsilon_n) \left(\sum_\alpha n_\alpha \cos \gamma_\alpha \right)^2, \\ B_\gamma &= \frac{4}{3} \frac{\kappa^2}{\Delta^2} \sum_n \delta(\epsilon_n) \left(\sum_\alpha n_\alpha \sin \gamma_\alpha \right)^2, \quad (17) \\ B_{\beta\gamma} &= -\frac{4}{3} \frac{\kappa^2}{\Delta^2} \sum_n \delta(\epsilon_n) \left(\sum_\alpha n_\alpha \cos \gamma_\alpha \right) \left(\sum_\alpha n_\alpha \sin \gamma_\alpha \right) \end{aligned}$$

Суммы в (16) и (17), берущиеся по состояниям внутри одной оболочки, с точностью до $1/n$ можно записать в виде интегралов по двум инвариантным переменным

$$x = \frac{1}{n} \sum_k n_k \cos \gamma_k, \quad y = \frac{1}{n} \sum_k n_k \sin \gamma_k. \quad (18)$$

Тогда

$$\sum_n \delta(\epsilon_n) \dots \rightarrow \frac{2n^2}{3\sqrt{3}\kappa\beta} \iint \delta(u-x) \dots dx dy. \quad (18')$$

Область интегрирования в (18') имеет вид равностороннего треугольника (рис. 1), вписанного в окружность единичного радиуса, координаты вершин которого по осям x, y равны $\cos \gamma_k, \sin \gamma_k$. Пунктирной линией обозначена граница Ферми. Заштрихована занятая область.

В переменных (18) выражения для B_i ($i = 0, 1, 2$) принимают вид

$$B_0 = \frac{\kappa^2 n^4}{9\omega_0^2 \Delta^2} (\kappa\beta n \sqrt{3})^{-1} \iint dx dy \times \\ \times \delta(u-x) \left\{ x^2 \cos 3\gamma \sum_{\alpha} \frac{f_{\alpha}}{\cos \gamma_{\alpha}} - \right. \\ \left. - y^2 \sin 3\gamma \sum_{\alpha} \frac{f_{\alpha}}{\sin \gamma_{\alpha}} + 4xy \sum_{\alpha} f_{\alpha} \times \right. \\ \left. \times \sin 2\gamma_{\alpha} - 2x \sum_{\alpha} f_{\alpha} \cos \gamma_{\alpha} - \right. \\ \left. - 2y \sum_{\alpha} f_{\alpha} \sin \gamma_{\alpha} + \sum_{\alpha} f_{\alpha} \right\}. \quad (19)$$

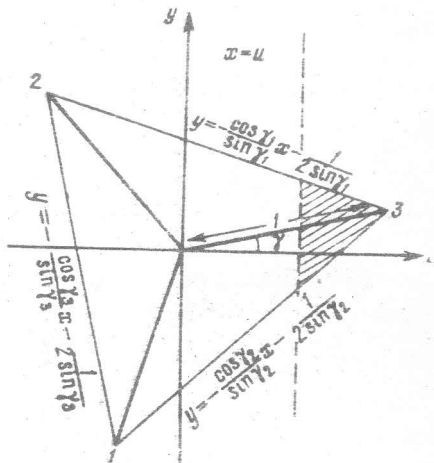


Рис. 1

Для B_1 и B_2 в (19) следует заменить функцию f_{α} соответственно на

$$-2f_{\alpha} \frac{\sin 2\gamma_{\alpha}}{\sin 3\gamma}, \quad -2f_{\alpha} \frac{\sin \gamma_{\alpha}}{\sin 3\gamma}.$$

Выражения (17) принимают вид

$$B_{\beta} = \frac{4}{3} \frac{\kappa^2 n^4}{\omega_0^2 \Delta^2} (\kappa\beta n \sqrt{3})^{-1} \iint dx dy \delta(u-x) x^2, \\ B_{\gamma} = \frac{4}{3} \frac{\kappa^2 n^4}{\omega_0^2 \Delta^2} (\kappa\beta n \sqrt{3})^{-1} \iint dx dy \delta(u-x) y^2, \\ B_{\beta\gamma} = -\frac{4}{3} \frac{\kappa^2 n^4}{\omega_0^2 \Delta^2} (\kappa\beta n \sqrt{3})^{-1} \iint dx dy \delta(u-x) xy. \quad (20)$$

После интегрирования в (20) находим

$$B_{\beta} = -\frac{4}{3} \frac{\kappa^2 n^4 u^2}{\omega_0^2 \Delta^2} (\kappa\beta n)^{-1} \sum_{\alpha} \frac{u - \cos \gamma_{\alpha}}{|u - \cos \gamma_{\alpha}|} \frac{\sin \gamma_{\alpha}}{\sin 3\gamma} (\cos \gamma_{\alpha} - u), \\ B_{\gamma} = -\frac{4}{9} \frac{\kappa^2 n^4}{\omega_0^2 \Delta^2} (\kappa\beta n)^{-1} \sum_{\alpha} \frac{u - \cos \gamma_{\alpha}}{|u - \cos \gamma_{\alpha}|} \frac{\sin \gamma_{\alpha}}{\sin 3\gamma} (\cos \gamma_{\alpha} - u) \times$$

$$\times \left\{ 16 \frac{\sin^4 \gamma_\alpha}{\sin^2 3\gamma} \left(2u \cos \gamma_\alpha - \frac{1}{2} \right)^2 + u^2 \operatorname{tg} \gamma_\alpha \operatorname{ctg} 3\gamma - u \frac{\sin 2\gamma_\alpha}{\sin 3\gamma} + \frac{\sin \gamma_\alpha}{\sin 3\gamma} \right\} \quad (21)$$

$$B_{\beta\gamma} = -\frac{4}{3} \frac{\kappa^2 n^4 u}{\omega_0^2 \Delta^2} (\kappa \beta n)^{-1} \sum_{\alpha} \frac{u - \cos \gamma_\alpha}{|u - \cos \gamma_\alpha|} \frac{\sin^3 \gamma_\alpha}{\sin^2 3\gamma} \times \\ \times (\cos \gamma_\alpha - u) (1 - 4u \cos \gamma_\alpha).$$

Интегрирование в (19) также проводится элементарно, но ввиду громоздкости результата мы его не выписываем, ограничиваясь графическим представлением.

Условие сохранения числа частиц в оболочке N в инвариантном виде записывается как

$$\chi \equiv 1 - \frac{\Delta N}{n^2} = \frac{4}{3 \sin 3\gamma} \sum_k \sin \gamma_k \frac{(u - \cos \gamma_k)^3}{|u - \cos \gamma_k|}, \quad (22)$$

откуда определяется u как функция γ и параметра заполнения χ . Для перехода к неинвариантной записи следует выбрать область изменения γ . При $0 < \gamma < \pi/3$ имеем всегда

$$\frac{u - \cos \gamma_2}{|u - \cos \gamma_2|} = 1, \quad \frac{u - \cos \gamma_3}{|u - \cos \gamma_3|} = -1,$$

а величина $u - \cos \gamma_1$ может менять знак в зависимости от γ и χ . Поэтому существуют две области, в которых функциональная зависимость $B(\gamma, \chi)$ имеет различный вид. Граница между областями определяется уравнением $u(\gamma, \chi) - \cos \gamma_1 = 0$. Переход от одной области к другой совершается путем преобразования

$$\chi \rightarrow -\chi, \quad \gamma \rightarrow \pi/3 - \gamma. \quad (23)$$

Из приведенных выше формул легко установить следующие свойства симметрии при преобразовании (23):

$$B_0 \rightarrow B_0, \quad B_1 \rightarrow -B_1, \quad B_2 \rightarrow B_2, \quad (24)$$

$$B_\beta \rightarrow B_\beta, \quad B_\gamma \rightarrow B_\gamma, \quad B_{\beta\gamma} \rightarrow -B_{\beta\gamma}.$$

Выражения (19) и (21) определяют массовые коэффициенты как функции параметров деформации β , γ и фактора заполнения оболочки χ . Зависимость от β определяется, во-первых, функциями f , а во-вторых, общим множителем β^{-1} . Происхождение этого множителя легко понять. Массовые коэффициенты пропорциональны плотности уровней у поверхности Ферми ρ , которая в рассматриваемой модели одной осцилляторной оболочки обратно пропорциональна β . Напомним, что при вычислении было использовано условие малости Δ по сравнению с расщеплением оболочки $n\omega_0\beta$, поэтому переход к пределу $\beta \equiv 0$ незаконен. Очевидно, что в реальной модели ρ практически не зависит от β , поэтому общий множитель β^{-1} мы в дальнейшем учитывать не будем. Более существенная зависимость от β содержится в аргументах функции f , где β входит в комбинации с большим множителем, образуя параметр

$$x = \omega_0 \beta / \sqrt{3} \Delta, \quad (25)$$

который для реальных ядер — порядка единицы. Ниже мы обсудим характер зависимости массовых коэффициентов, определяемых выражениями (19) и (21), от трех переменных γ , x и χ .

4. Обсуждение результатов

На рис. 2, а, б представлена зависимость B_0 , B_1 и B_2 от γ при двух значениях параметра заполнения χ , равных 0,2 и 0,6. С учетом симметрии (23) те же графики определяют также поведение этих функций при χ , равных $-0,2$ и $-0,6$. Рис. 3, а, б иллюстрируют зависимость B_0 , B_1 и B_2 от χ и x . Кривые 1, 2, 3 на всех рисунках соответствуют зависимостям B_0 , B_1 и B_2 .

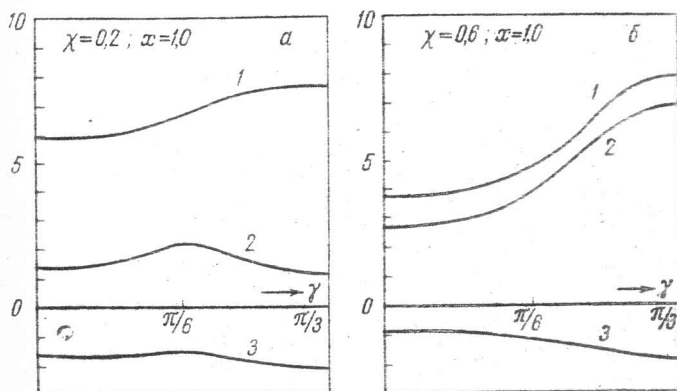


Рис. 2

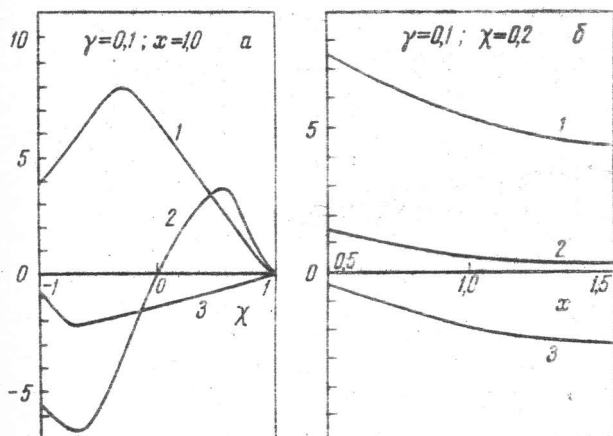


Рис. 3

Обратим внимание на следующие закономерности в поведении параметров кинетической энергии.

А. В середине оболочки ($|\chi| \ll 1$) B_0 значительно превосходит B_1 и B_2 . При приближении к краям оболочки B_2 остается малым, в то время как B_1 может достигать или даже превосходить B_0 .

Б. Зависимость всех рассматриваемых величин от γ является слабой в середине оболочки и становится более заметной (у B_0 и B_1) при приближении к краям.

В. Зависимость от x является плавной и не особенно существенной.

Г. Обращает на себя внимание резкая зависимость B_0 и B_1 от заполнения. Существенно, что B_1 имеет различный знак в начале и конце оболочки.

Перейдем теперь к анализу выражений для B_β , B_γ , $B_{\beta\gamma}$. Их зависимость от χ и γ (эти величины от x не зависят) представлена на рис. 4—7, из которых можно сделать следующие заключения.

Д. Относительная величина $B_{\beta\gamma}/B_\gamma$ оказывается очень малой не только при малых γ (что было бы естественно, так как при малых γ имеем $B_{\beta\gamma} \sim \gamma$), но и во всем интервале изменения γ . Величина B_β также заметно меньше B_γ , особенно вблизи середины оболочки, где в рассматриваемом приближении B_β обращается в нуль. Исключение составляет по-

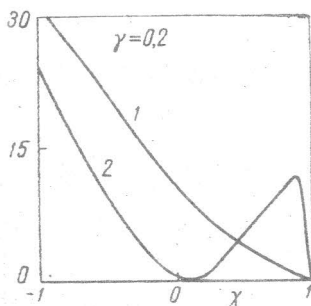


Рис. 4. Зависимость $B_\gamma(1)$ и $B_\beta(2)$ от заполнения оболочки

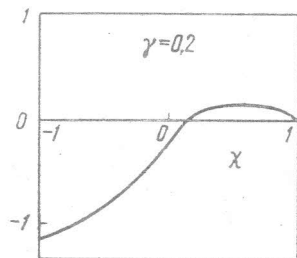


Рис. 5. Зависимость $B_{\beta\gamma}$ от заполнения оболочки

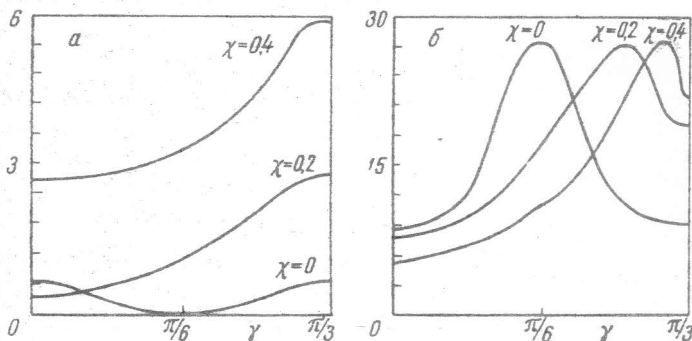


Рис. 6. B_β (а) и B_γ (б) как функции γ

следняя четверть оболочки при $\chi < 0$, либо первая при $\chi > 0$, где B_β обгоняет B_γ (см. рис. 4).

Е. Зависимость от γ оказывается очень сильной, особенно у B_γ , причем хорошей оказывается аппроксимация квадратным многочленом по $\cos 3\gamma$:

$$B_\beta = B_\beta^0(l_0 - l_1 \cos 3\gamma + \cos^2 3\gamma), \quad (26)$$

$$B_\gamma = B_\gamma^0(1 - K_1 \cos 3\gamma - K_2 \cos^2 3\gamma),$$

где $l_0 > 0$ и $K_2 > 0$, а K_1 и l_1 меняют знак в середине оболочки. Заметим, что в значительной части интервала изменения γ кривые могут быть интерполированы параболой. При положительном χ , в области малых γ :

$$B_\beta = B_\beta^0(1 + r_\beta \gamma^2), \quad B_\gamma = B_\gamma^0(1 + r_\gamma \gamma^2). \quad (27)$$

В рассмотренном приближении B_β и $B_{\beta\gamma}$ вблизи середины оболочки обращаются в нуль, что является простым следствием аналогичного поведения диагональных матричных элементов q_{μ} . Заметим, однако, что в области малых значений B_β , $B_{\beta\gamma}$ становятся существенными поправки к этим величинам, не учтенные ранее; поэтому следует учесть:

1) конечную ширину области одночастичных уровней, дающих вклад в B (среднее значение $|q|^2$ по области, шириной $\sim \Delta$, имеет конечную величину);

2) недиагональные переходы в соседнюю оболочку ($n \rightarrow n \pm 2$);

3) зависимость одночастичных волновых функций от деформации (эти поправки гидродинамической природы имеют порядок $A^{-2/3}B_\gamma$ и практически не содержат зависимости от γ и заполнения).

С учетом отмеченных поправок следует считать, что величина B_β вблизи середины оболочки стремится не к нулю, а к некоторой малой постоянной величине.

Обсудим в заключение, насколько закономерным с точки зрения полученных результатов является использование в феноменологических моделях гидродинамического выражения для оператора кинетической энергии. Последнее получается из (2) в предположениях

$$\mathcal{F}_i = 4\beta^2 b_0 \sin^2 \gamma_i, \quad (28a)$$

$$B_{\beta\gamma} = 0, \quad (28б)$$

$$B_\beta = B_\gamma = b_0, \quad (28в)$$

где b_0 — некоторая константа.

С точки зрения зависимости от γ предположение (28a) оказывается довольно хорошим для середины оболочки, где величина B_0 значительно превосходит B_1 и B_2 , и очень слабо зависит от γ (см. заключения А, Б), так что общее выражение (5) переходит в (28a). Ближе к краям оболочки подобная аппроксимация становится сомнительной, так как заключения А и Б теряют силу.

Предположение (28б) оправдывается довольно хорошо практически во всем интервале изменений γ и параметра заполнения χ (см. заключение Д). Постоянство массовых коэффициентов B_β и B_γ можно оправдать (при $\chi \geq 0$) лишь в узкой области вблизи $\gamma = 0$. Для реальных амплитуд γ -колебаний зависимость B_β и B_γ от γ становится существенной и особенно сильной для B_γ во второй половине оболочки, т. е. при $\chi < 0$ (параметр r_γ в (27) при этом значительно больше единицы). Таким образом, ни одно из равенств (28в) не может быть оправданным²⁾.

Предположения гидродинамической модели (28) оправдываются в предельном случае идеальной квазиклассики. Рассмотренный же случай осцилляторной модели представляет собой обратный предельный случай полного упорядочения одночастичных уровней.

Полученные результаты позволяют поэтому сделать заключения о степени и характере нарушений гидродинамических условий (28) для реальных ядер. Основными из них являются: отсутствие универсальной связи между параметрами $B_\beta B_\gamma$ и моментами инерции и сильная зависимость B_β , и особенно B_γ , от γ .

Литература

- [1] G. Scharff-Goldhaber, J. Weneser. Phys. Rev., **98**, 219, 1955.
- [2] L. Wilets, M. Jean. Phys. Rev., **107**, 788, 1959. Т. Tamura, L. G. Komai. Phys. Rev. Lett., **3**, 344, 1959. Т. Tamura, H. Yoshida. Nucl. Phys., **38**, 616, 1962. А. С. Давыдов, Г. Ф. Филиппов. ЖЭТФ, **35**, 440, 1958.
- [3] S. T. Beljaev. Selected Topics in Nuclear Theory, Intern. Atomic Energy, Agency, Vienn, 1963, p. 291.
- [4] A. Bohr, Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **26**, 14, 1952.
- [5] S. T. Beljaev. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **31**, 11, 1959. А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, **37**, 249, 1959; Nucl. Phys., **13**, 655, 1959. L. Griffin, M. Rich. Phys. Rev., **118**, 850, 1960. S. G. Nilsson, O. Prior. Mat.-Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **32**, 16, 1960.

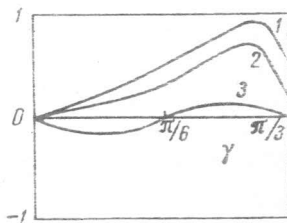


Рис. 7. $B_{\beta\gamma}$ как функция γ для значений $\chi=0$ (1), $\chi=0,2$ (2) и $\chi=0,4$ (3)

²⁾ Следует отметить, однако, точное соотношение $\mathcal{F}_3 \approx 4\beta^2 \gamma^2 B_\gamma$, справедливое при $\gamma \rightarrow 0$, и аналогичное соотношение при $\pi - \gamma \rightarrow 0$, которые следует учитывать при практической аппроксимации B_β и γ .

- [6] S. T. Beljaev. Nucl. Phys., 64, 17, 1965.
[7] D. Bés. Nucl. Phys., 49, 544, 1963.
[8] Д. Ф. Зарецкий, М. Урин. ЖЭТФ, 43, 1021, 1962.
-

STRUCTURE OF THE COLLECTIVE KINETICAL ENERGY IN A SIMPLE MICROSCOPICAL NUCLEAR MODEL

S. T. BELYAEV, B. A. RUMYANTSEV

The mass parameters of the collective hamiltonian for deformed nuclei are calculated as functions of β and γ and the number of nucleons in the highest unfilled shell, using a model taking pairing and quadrupole interactions in an oscillator potential well into account. The connection between the obtained hamiltonian and the hydrodynamical expression, used in phenomenological methods, is discussed.
