ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 3, вып. 4, 1966

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В ТЕОРИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ВЕКТОРНОГО МЕЗОНА

В. В. СОКОЛОВ

(Поступила в редакцию 15 июля 1965 г.)

В теории нейтрального векторного мезона, взаимодействующего с сохраняющимся током, получены соотношения, выражающие его массу через спектральные функции обоих участвующих во взаимодействии полей. Анализ этих соотношений позволяет сделать некоторые выводы о перенормировочных константах заряда и массы.

Введение

Леман [1] с помощью введенных им спектральных представлений получил в псевдоскалярной мезонной теории простую формулу, связывающую затравочную и физическую массы мезона:

$$\mu_0^2 = \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho(\varkappa^2). \tag{1}$$

Здесь $\rho(\varkappa^2) > 0$ — спектральная функция мезона, удовлетворяющая правилу сумм

$$\int d\varkappa^2 \rho(\varkappa^2) = 1. \tag{2}$$

Иное положение имеет место в теории нейтрального векторного мезона, взаимодействующего с сохраняющимся током. Джонсон [2] отметил, что в этом случае формула (1) несправедлива. Вместо нее для массы векторного мезона, взаимодействующего с сохраняющимся током спинорных частиц, в работе [2] было получено соотношение

$$\frac{1}{\mu_0^2} = \int \frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2} d\varkappa^2, \tag{3}$$

причем спектральная функция $\rho(\varkappa^2) > 0$ по-прежнему удовлетворяет правилу сумм (2) [1)].

Формула (3), однако, значительно менее привлекательна, чем (1). Дело в том, что деление спектральной функции на $\varkappa^2$ определено лишь с точностью до члена вида $a\delta(\varkappa^2)$, где a — произвольное число. Эта неопределенность не играет роли, пока спектр масс начинается не с нуля. Если же в теории есть частицы нулевой массы, так что нижним пределом в спектральных интегралах служит нуль, то в формуле (3) появляется новое слагаемое a. В этом случае она уже не дает никаких сведений о массе векторного мезона и указывает только, как следует понимать деление на $\varkappa^2$. Это обстоятельство было продемонстрировано для случая $\mu_0 = 0$ в работе [3]. Аналогичная ситуация возникает в рассмотренной Тиррингом и Вессом [4] модификации двумерной модели квантовой электродинамики Швингера [5] с $\mu_0 \neq 0$, но нулевой массой спинорного поля.

1) См. также работу Вайнштейна, Соколова, Хрипловича [3], где дан вывод формулы Джонсона для случая сохраняющегося тока частиц произвольного спина. Фактически, в [3] было показано, что она является следствием только градиентной инвариантности.

В этой работе мы хотим показать, что формулы, аналогичные формуле (1), можно получить и в теории нейтрального векторного мезона. Они являются, однако, более сложными, чем формула Лемана. В разделах 1 и 2 рассматриваются соответственно случаи скалярных и спинорных частиц, взаимодействующих с нейтральным векторным мезоном градиентно-инвариантным образом (такую теорию мы будем условно называть электродинамикой, независимо от массы векторного поля). В Приложении 1 дается градиентно-инвариантная формулировка [6] скалярной электродинамики в формализме Дэффина-Кеммера и в этом формализме вновь получается массовая формула (19). Приложение 2 посвящено рассмотрению установленных массовых формул по теории возмущений.

1. Скалярная электродинамика

Мы начнем с уравнений движения в гейзенберговском представлении в формализме Прока [2]):

$$(D^{\lambda}D_{\lambda}+m^2)\varphi=0, \quad D_{\lambda}=\partial_{\lambda}-ieA_{\lambda}^{\perp}, \tag{4}$$

$$\partial^{\lambda}F_{\lambda\sigma}+\mu_0^2A_{\sigma}^{\perp}=j_{\sigma}, \quad F_{\lambda\sigma}=\partial_{\lambda}A_{\sigma}^{\perp}-\partial_{\sigma}A_{\lambda}^{\perp}, \tag{5}$$

$$j_{\sigma}=-\frac{ie}{2}\{\varphi^*\,\partial_{\sigma}\varphi-\varphi\,\partial_{\sigma}\varphi^*\}-e^2A_{\sigma}^{\perp}\{\varphi^*\varphi\}, \quad \partial^{\sigma}j_{\sigma}=0. \tag{6}$$

Значок $\perp$ у вектор-потенциала мы ставим, чтобы подчеркнуть, что в силу (5) и (6) он удовлетворяет условию поперечности: $\partial^{\lambda}A_{\lambda}^{\perp}=0$; фигурные скобки в (6) означают, что следует взять антикоммутатор.

Канонические перестановочные соотношения имеют вид

$$[\varphi(\mathbf{x}),\dot{\varphi}^*(0)]=[\varphi^*(\mathbf{x}),\dot{\varphi}(0)]=i\delta(\mathbf{x}), \tag{7}$$

$$[A_l^{\perp}(\mathbf{x}),F_{s0}(0)]=ig_{ls}\delta(\mathbf{x}); \tag{8}$$

остальные коммутаторы равны нулю. В частности,

$$[A_l^{\perp}(\mathbf{x}),\dot{\varphi}(0)-eA_0^{\perp}(0)]=0. \tag{9}$$

Напишем спектральное представление для вакуумного среднего от коммутатора векторного поля:

$$\langle[A_{\lambda}^{\perp}(x),A_{\sigma}^{\perp}(y)]\rangle=-i\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)\left(g_{\lambda\sigma}+\frac{\partial_{\lambda}\partial_{\sigma}}{\varkappa^2}\right)\Delta(x-y,\varkappa^2). \tag{10}$$

Исходя из (10), легко получить

$$\langle[A_{\lambda}^{\perp}(x),F_{\sigma\nu}(y)]\rangle=i(g_{\lambda\nu}\partial_{\sigma}-g_{\lambda\sigma}\partial_{\nu})\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)\Delta(x-y,\varkappa^2). \tag{11}$$

Беря дивергенцию от (11), находим с помощью (5)

$$\frac{\partial}{\partial y_{\sigma}}\langle[A_{\lambda}^{\perp}(x),F_{\sigma\nu}(y)]\rangle=-\mu_0^2\langle[A_{\lambda}^{\perp}(x),A_{\nu}^{\perp}(y)]\rangle+\langle[A_{\lambda}^{\perp}(x),j_{\nu}(y)]\rangle,$$

откуда

$$\langle[A_{\lambda}^{\perp}(x),j_{\nu}(y)]\rangle=i\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\left(g_{\lambda\nu}+\frac{\partial_{\lambda}\partial_{\nu}}{\varkappa^2}\right)\rho(\varkappa^2)\Delta(x-y,\varkappa^2)$$

и, в частности,

$$\langle[A_l^{\perp}(\mathbf{x}),j_0(0)]\rangle=-i\partial_l\delta(\mathbf{x})\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2}. \tag{12}$$

---

[2]) В работе используется метрика $g_{00}=-g_{kk}=1$; $\square=-\partial^{\lambda}\partial_{\lambda}$; греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские —1, 2, 3.

С другой стороны, из канонических перестановочных соотношений (9) следует, что

$$[A_l^{\perp}(\mathbf{x}), j_0(0)] = 0. \tag{13}$$

Сравнение (12) и (13) приводит с учетом правила сумм (2) к формуле (3).

Подействуем теперь на (11) оператором $\Box_x - \mu_0^2$:

$$(\Box_x - \mu_0^2)\,\langle[A_\lambda^{\perp}(x), F_{\sigma\nu}(y)]\rangle = -\langle[j_\lambda(x), F_{\sigma\nu}(y)]\rangle =$$

$$= i(g_{\lambda\nu}\partial_\sigma - g_{\lambda\sigma}\partial_\nu)\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\,\rho(\varkappa^2)\,\Delta(x-y,\varkappa^2).$$

Переходя к одинаковым временам, получаем отсюда

$$\langle[j_\lambda(\mathbf{x}), F_{s0}(0)]\rangle = -\,ig_{\lambda s}\delta(\mathbf{x})\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\,\rho(\varkappa^2). \tag{14}$$

Учитывая (6) и канонические перестановочные соотношения (8), имеем в то же время

$$[j_\lambda(\mathbf{x}),\ F_{s0}(0)] = -ie^2 g_{\lambda s}\delta(\mathbf{x})\,\{\varphi^*(0), \varphi(0)\}, \tag{15}$$

где e — неперенормированный заряд. Сравнивая (14) и (15), находим

$$\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\,\rho(\varkappa^2) = e^2\,\langle\{\varphi^*(0), \varphi(0)\}\rangle. \tag{16}$$

Воспользуемся, наконец, спектральным представлением антикоммутатора

$$\langle\{\varphi^*(x), \varphi(y)\}\rangle = \int d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2)\,\Delta_1(x-y,\varkappa^2). \tag{17}$$

Здесь $\rho_1(\varkappa^2)$ — спектральная функция мезонного поля, удовлетворяющая как и $\rho(\varkappa^2)$, условию

$$\int \rho_1(\varkappa^2)\,d\varkappa^2 = 1. \tag{18}$$

Хорошо известно также, что при $\mu_0 \neq 0$ $\rho_1(\varkappa^2) > 0$.

Сравнение (16) и (17) дает искомую массовую формулу:

$$\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\,\rho(\varkappa^2) = e^2\int d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2)\,\Delta_1(0,\varkappa^2). \tag{19}$$

Имея в виду переход к спинорному случаю, заметим теперь следующее. Как показали Огиевецкий и Полубаринов [7], формализм Прока описывает взаимодействие нейтрального векторного поля с сохраняющимся током в определенной калибровке. Мы можем перейти к произвольной калибровке, если введем вспомогательный вектор-потенциал A_λ, такой, что

$$A_\lambda^{\perp} = \left(g_{\lambda\sigma} + \frac{\partial_\lambda\partial_\sigma}{\mu_0^2}\right)A^\sigma, \qquad F_{\lambda\sigma} = \partial_\lambda A_\sigma - \partial_\sigma A_\lambda. \tag{20}$$

В силу (5) A_λ удовлетворяет уравнению

$$(\Box - \mu_0^2)A_\lambda = -j_\lambda. \tag{21}$$

Вектор A_λ может быть подвергнут градиентному преобразованию второго рода, если одновременно с этим подвергнуть поле φ градиентному преобразованию первого рода. Величины $A_\lambda^{\perp}$ и $F_{\lambda\sigma}$ остаются при градиентном преобразовании A_λ неизменными. Чтобы описывать градиентно-инвариантным образом и скалярное поле, введем, следуя Мандельштаму [6], величины (далее мы пользуемся обозначениями работы Мандельштама)

$$\begin{aligned}\Phi(x;P) &= \varphi(x)\exp\left\{-ie\int\limits_{-\infty}^{x} d\xi^\lambda A_\lambda(\xi)\right\},\\ \Phi^*(x;P) &= \varphi^*(x)\exp\left\{ie\int\limits_{-\infty}^{x} d\xi^\lambda A_\lambda(\xi)\right\}.\end{aligned} \tag{22}$$

Плотность тока (6) может быть переписана в терминах только градиентно-инвариантных величин:

$$j_\sigma = -\frac{ie}{2}\left\{\Phi^*\partial_\sigma\Phi - \Phi\partial_\sigma\Phi^*\right\}. \tag{23}$$

Коммутаторы градиентно-инвариантных величин имеют вид

$$[\overset{(\cdot)}{\Phi}(\mathbf{x};\ P),\ A_l{}^{\perp}(0)] = [\overset{(\cdot)}{\Phi}{}^*(\mathbf{x};\ P),\ A_l{}^{\perp}(0)] = 0, \tag{24}$$

$$\begin{gathered}[\overset{(\cdot)}{\Phi}(\mathbf{x};\ P),\ F_{s0}(0)] = e\int\limits_{-\infty}^{\mathbf{x}} d\xi_s\delta(\xi)\,\overset{(\cdot)}{\Phi}(\mathbf{x};\ P),\\ [\overset{(\cdot)}{\Phi}{}^*(\mathbf{x};\ P),\ F_{s0}(0)] = -e\int\limits_{-\infty}^{\varkappa} d\xi_s\delta(\xi)\,\overset{(\cdot)}{\Phi}{}^*(\mathbf{x};\ P).\end{gathered} \tag{25}$$

Пользуясь этими перестановочными соотношениями и повторяя проделанные выше выкладки, мы снова придем к формуле (16) с

$$e^2\langle\{\Phi^*(0),\ \Phi(0)\}\rangle = e^2\langle\{\varphi^*(0),\ \varphi(0)\}\rangle$$

в правой части.

Отметим, что, поскольку на потенциал A_λ не наложено условие Лоренца (в отличие от $A_\lambda{}^{\perp}$), мы можем теперь непосредственно перейти к случаю $\mu_0 = 0$. Потенциал $A_\lambda{}^{\perp}$ в уравнение (5) при $\mu_0 = 0$ не входит; поэтому его вообще не нужно рассматривать. Формула (3), как показано в [3], переходит просто в $\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)/\varkappa^2 = a$. Соотношение же (19) остается справедливым и для $\mu_0 = 0$.

2. Спинорная электродинамика

В случае спинорного поля оказывается удобным с самого начала пользоваться градиентно-инвариантными обозначениями Мандельштама. Операторы Ψ и $\overline{\Psi}$ выражаются через ψ и $\overline{\psi}$ формулами (22), а их коммутаторы с операторами векторного поля даются формулами (24) и (25) (без точек сверху) [8].

Определим ток, в соответствии с [9], с помощью предельной процедуры:

$$j_\sigma = -\frac{e}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{Sp}\gamma_\sigma\left[\overline{\Psi}\left(\mathbf{x}-\frac{1}{2}\varepsilon\right),\ \Psi\left(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]. \tag{26}$$

Переход к пределу следует производить по всем пространственным направлениям сферически симметричным образом.

Получение формулы (3) в спинорном случае ничем не отличается от ее получения в скалярном случае и не представляет труда. Поэтому мы сразу перейдем к вычислению коммутатора тока с электрическим полем, используя для этой цели перестановочные соотношения (25):

$$\begin{aligned}[j_\lambda(\mathbf{x}),\ F_{s0}(0)] &= -\frac{e}{2}\operatorname{Sp}\gamma_\lambda\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left[\overline{\Psi}\left(\mathbf{x}-\frac{1}{2}\varepsilon\right),\ \Psi\left(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right],\ F_{s0}(0)\right] =\\ &= -\frac{e^2}{2}\operatorname{Sp}\gamma_\lambda\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\overline{\Psi}\left(\mathbf{x}-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\Psi\left(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]\varepsilon\nabla\int\limits_{-\infty}^{\mathbf{x}} d\xi_s\delta(\xi)\right) =\\ &= \frac{e^2}{2}\operatorname{Sp}\gamma_\lambda\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\varepsilon_s\left[\psi\left(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\varepsilon\right),\ \overline{\psi}\left(\mathbf{x}-\frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]\right)\delta(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{27}$$

Оператор, стоящий под знаком предела, представляется в некотором базисе гильбертова пространства состояний матрицей. Переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ нужно осуществлять в каждом матричном элементе. В результате мы получим матричные элементы интересующего нас оператора в правой части (27). В данном случае нам нужен только вакуумный матричный элемент:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon_s \left\langle \left[\psi\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right), \ \bar{\psi}\left(x - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]\right\rangle.$$

Но

$$\left\langle \left[\psi\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right), \psi\left(x - \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right]\right\rangle = \int d\varkappa^2 \{\rho_1(\varkappa^2) S_1(\varepsilon, \varkappa) + \rho_2(\varkappa^2)\Delta_1(\varepsilon, \varkappa^2)\}, \tag{28}$$

$$\int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) = 1;$$

поэтому

$$\langle [j_0(x), \ F_{s0}(0)]\rangle = 0,$$

$$\langle [j_l(x), F_{s0}(0)]\rangle = \frac{e^2}{2} \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon_s \int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \operatorname{Sp} \gamma_l S_1(\varepsilon, \varkappa)\, \delta(x) =$$

$$= 2ie^2 \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon_s \int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2)\, \partial_l \Delta_1(\varepsilon, \varkappa^2)\, \delta(x). \tag{29}$$

Для пространственноподобных интервалов

$$\Delta_1(\varepsilon, \varkappa^2) = \frac{\varkappa^2}{2\pi^2} \frac{K_1(z)}{z}, \qquad z = \varkappa \sqrt{\varepsilon^2} = \varkappa\varepsilon. \tag{30}$$

Далее,

$$\partial_l \Delta_1 = -\frac{\partial \Delta_1}{\partial \varepsilon}$$

и

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \varepsilon} = \frac{\varkappa^2}{2\pi^2} \varkappa \frac{d}{dz}\left(\frac{K_1(z)}{z}\right) = \frac{\varkappa^2}{\pi^2 \varepsilon} \varkappa^2 \frac{d}{d\varkappa^2}\left(\frac{K_1(z)}{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 \varepsilon}\left\{\frac{d}{d\varkappa^2}\left[\varkappa^4 \frac{K_1(z)}{z}\right] - 2\varkappa^2 \frac{K_1(z)}{z}\right\} = -\frac{2}{\varepsilon}\left(1 - \varkappa^2 \frac{d}{d\varkappa^2}\right) \Delta_1(\varepsilon, \varkappa^2). \tag{31}$$

Подставляя (31) в (29), учитывая, что при сферически симметричном переходе к пределу $\varepsilon_s \varepsilon_l / \varepsilon^2 \to -{}^1/{}_3 g_{sl}$, и сравнивая после этого (29) с (14), получаем

$$\int d\varkappa^2 (\varkappa^2 - \mu_0^2)\, \rho(\varkappa^2) = \frac{4}{3} e^2 \int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \left(1 - \varkappa^2 \frac{d}{d\varkappa^2}\right) \Delta_1(0, \varkappa^2). \tag{32}$$

Так же как и (19), эта формула справедлива при любых μ_0.

3. Анализ массовых формул

Остановимся прежде всего на формуле (3), предполагая, что в теории нет частиц нулевой массы. Перейдем к перенормированным величинам

$$\rho(\varkappa^2) = Z \rho_c(\varkappa^2), \qquad e^2 = Z^{-1} e_c^2; \tag{33}$$

Z — константа перенормировки заряда, удовлетворяющая условию

$0 \leqslant Z \leqslant 1$, так как

$$Z^{-1} = \int d\varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2). \tag{34}$$

Ясно, что $Z = 0$, только если интеграл от $\rho_c(\varkappa^2)$ расходится. Формула (3) имеет в перенормированных величинах вид

$$Z^{-1} = \int d\varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) = \mu_0^2 \int d\varkappa^2 \frac{\rho_c(\varkappa^2)}{\varkappa^2}. \tag{35}$$

Поскольку $\rho_c(\varkappa^2) > 0$, интеграл в правой части (35) всегда расходится слабее, чем интеграл (34). Это означает, что Z может равняться нулю, только если затравочная масса, а следовательно, и перенормировка массы «фотона» бесконечны, и наоборот, если $\delta\mu^2 = \infty$, то $Z = 0$. С другой стороны, так как

$$Z\mu_0^2 = \left[\int d\varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2)/\varkappa^2\right]^{-1},$$

то $0 \leqslant Z\mu_0^2 \leqslant \text{cosnt} < \infty$.

Любопытно, что сходный вывод можно сделать и в псевдоскалярной теории. Перепишем формулу (1) в перенормированных величинах:

$$\int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) = \mu_0^2 \int d\varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2). \tag{36}$$

Снова интеграл в левой части всегда расходится сильнее интеграла в правой части, так что $Z = 0$, только если $\mu_0^2 = \infty$; однако обратное утверждение уже несправедливо и Z может отличаться от нуля и при бесконечной перенормировке массы.

Переходя к формулам (19) и (32), отметим, что они являются лишь формальными соотношениями, поскольку стоящая в правых частях функция $\Delta_1(0, \varkappa^2)$ бесконечна. Чтобы придать им смысл, мы должны заменить Δ_1 на конечную функцию, что проще всего сделать, вводя обрезание по импульсам в интеграле Фурье. Обозначая импульс обрезания через Λ, получаем

$$\Delta_1(0, \varkappa^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp\, \delta(p^2 - \varkappa^2) = \frac{1}{8\pi^2} \left(\Lambda^2 - \varkappa^2 \ln \frac{\Lambda^2 + \varkappa^2}{\varkappa^2} \right) \tag{37}$$

и, следовательно,

$$\left(1 - \varkappa^2 \frac{d}{d\varkappa^2} \right) \Delta_1(0, \varkappa^2) = \frac{1}{8\pi^2} \Lambda^2 \frac{1}{1 + \varkappa^2/\Lambda^2}. \tag{38}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \Delta_1(0, \varkappa^2) = \frac{1}{8\pi^2} \left(\Lambda^2 - \int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \varkappa^2 \ln \frac{\Lambda^2 + \varkappa^2}{\varkappa^2} \right).$$

Предположим, что $\mu_0 \neq 0$, так что $\rho_1(\varkappa^2) > 0$. Тогда можно видеть, что второй член этого выражения не может скомпенсировать первый. В самом деле, нетрудно проверить, что $\varkappa^2 \ln [(\Lambda^2 + \varkappa^2)/\varkappa^2]$ — положительная функция, монотонно растущая от нуля при $\varkappa^2 = 0$ до Λ^2 при $\varkappa^2 \to \infty$. Поэтому

$$\int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \varkappa^2 \ln \frac{\Lambda^2 + \varkappa^2}{\varkappa^2} = \int^{\Lambda^2} d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \varkappa^2 \ln \frac{\Lambda^2 + \varkappa^2}{\varkappa^2} + \int_{\Lambda^2}^{\infty} d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \varkappa^2 \times$$

$$\times \ln \frac{\Lambda^2 + \varkappa^2}{\varkappa^2} \leqslant \Lambda^2 \ln 2 + \Lambda^2 \int_{\Lambda^2}^{\infty} d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \to \Lambda^2 \ln 2 < \Lambda^2,$$

поскольку в силу правила сумм (2)

$$\int_{\Lambda^2}^{\infty} d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \to 0.$$

Еще проще убедиться в квадратичной расходимости правой части формулы (32):

$$\int d\varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) \frac{1}{1+\varkappa^2/\Lambda^2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, переходя к перенормированным величинам, получаем следующие массовые формулы:

$$Z^2 \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) = Z\mu_0{}^2 + \theta_1 \frac{\alpha}{2\pi} \Lambda^2 \tag{39}$$

в скалярном случае и

$$Z^2 \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) = Z\mu_0{}^2 + \theta_2 \frac{2\alpha}{3\pi} \Lambda^2 \tag{40}$$

в спинорном случае. Здесь $\alpha = e_c{}^2/4\pi$ и $0 < \theta_1, \theta_2 \leqslant 1$.

Так как $Z\mu_0{}^2 \leqslant \mathrm{const}$, то правые части в (39) и (40) стремятся к бесконечности как Λ^2. Спектральные интегралы в левых частях этих соотношений должны поэтому расходиться (напомним, что $0 \leqslant Z \leqslant 1$). Обозначим параметр обрезания спектрального интеграла через L^2. Нетрудно показать, что левые части в (39) и (40) расходятся слабее, чем квадратично. Действительно, если $Z \neq 0$, то интеграл $\int d\varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2)$ сходится и в силу положительной определенности $\rho_c(\varkappa^2)$

$$\int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) < L^2.$$

Если же $Z = 0$, то и тогда

$$Z^2 \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) < L^2.$$

Чтобы проверить это, рассмотрим функцию

$$Z^{-1}(L^2) = \int^{L^2} d\varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2).$$

Дифференцируя по верхнему пределу, получаем

$$dZ^{-1}(\varkappa^2)\,/\,d\varkappa^2 = \rho_c(\varkappa^2).$$

Тогда

$$\int^{L^2} d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) = \int^{L^2} d\varkappa^2 \varkappa^2 \frac{dZ^{-1}(\varkappa^2)}{d\varkappa^2} = L^2 Z^{-1}(L^2) - \int^{L^2} d\varkappa^2 Z^{-1}(\varkappa^2),$$

$$Z^2 \int^{L^2} d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_c(\varkappa^2) \leqslant L^2 Z(L^2) < L^2,$$

так как $Z(L^2) > 0$ и $\lim\limits_{L^2 \to \infty} Z(L^2) = 0$.

Параметры обрезания Λ^2 и L^2 связаны между собой. Например, в спинорном случае в первом порядке теории возмущений $L^2 = 2\Lambda^2$ (см. Приложение 2). Если подобная пропорциональность сохраняется и в точных решениях, то соотношения (39) и (40) могут выполняться только в случае $\alpha \to 0$. Разумеется, нельзя исключить и другой возможности: в результате суммирования ряда теории возмущений окажется, что $\Lambda^2 / L^2 \to 0$, так что (39) и (40) будут выполнены при $\alpha \neq 0$.

Мы видели, что члены с затравочной массой μ_0 в массовых формулах дают несущественный вклад. Однако при $\mu_0 = 0$ возникает необходимость введения в пространстве состояний индефинитной метрики, в результате чего функции $\rho_1(\varkappa^2)$ перестают быть положительно определенными (однако по-прежнему $\rho_1(\varkappa^2) > 0$). В этом случае не исключена возможность уменьшения степени расходимости правых частей в (19) и (32).

В заключение автор выражает искреннюю признательность А. И. Вайнштейну, С. А. Хейфецу и И. Б. Хрипловичу за интерес к работе, ценные дискуссии и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Как известно, уравнение Клейна — Гордона для свободного скалярного поля φ можно с помощью обозначений

$$\psi^\lambda = \frac{1}{\sqrt{m}}\partial^\lambda\varphi, \qquad \psi^4 = \psi_4 = \sqrt{m}\,\varphi$$

представить в виде

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0. \tag{1.1}$$

Здесь

$$\hat{\partial} = \beta^\lambda\partial_\lambda, \qquad \beta^\lambda\beta^\sigma\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\sigma\beta^\lambda = g^{\sigma\lambda}\beta^\nu + g^{\sigma\nu}\beta^\lambda,$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\partial^0\varphi\\ \partial^1\varphi\\ \partial^2\varphi\\ \partial^3\varphi\\ m\varphi\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\partial^\lambda\varphi\\ m\varphi\end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Явный вид матриц β^λ следующий (не указанные матричные элементы равны нулю):

$$\begin{gathered}(\beta^0)_5{}^1 = -(\beta^0)_1{}^5 = -i, \qquad (\beta^1)_5{}^2 = (\beta^1)_2{}^5 = i,\\ (\beta^2)_5{}^3 = (\beta^2)_3{}^5 = i, \qquad (\beta^3)_5{}^4 = (\beta^3)_4{}^5 = i.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Плотность тока скалярных частиц равна

$$j_\sigma = -\frac{ie}{2}\{\varphi^*\partial_\sigma\varphi - \varphi\partial_\sigma\varphi^*\} = -\frac{e}{2}\{\bar{\psi}, \beta_\sigma\psi\}, \tag{1.4}$$

где

$$\bar{\psi} = \psi^+\eta_0 = \frac{1}{\sqrt{m}}(\partial_\lambda\varphi^* m\varphi^*), \qquad \eta_0 = 2\beta_0{}^2 - 1. \tag{1.5}$$

Нетрудно понять, что включение градиентно-инвариантного взаимодействия с нейтральным векторным полем следует производить с помощью замены

$$\partial_\lambda \to \partial_\lambda - ieA_\lambda,$$

$$\varphi(x) \to \Phi(x; P) = \varphi(x)\exp\left\{-ie\int_{-\infty} d\xi^\lambda A_\lambda(\xi)\right\}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered}\psi(x) \to \Psi(x; P) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{pmatrix}\partial^\lambda\Phi(x; P)\\ m\Phi(x; P)\end{pmatrix},\\ \bar{\psi}(x) \to \bar{\Psi}(x; P) = \frac{1}{\sqrt{m}}(\partial_\lambda\Phi^*(x; P)\, m\Phi^*(x; P)).\end{gathered} \tag{1.6}$$

Плотность тока окажется при этом равной

$$j_\sigma = -\frac{e}{2}\{\overline{\Psi}\beta_\sigma\Psi\} = -\frac{ie}{2}\{\Phi^*\partial_\sigma\Phi - \Phi\partial_\sigma\Phi^*\}, \tag{1.7}$$

как и должно быть.

Прежде чем приступить к получению перестановочных соотношений операторов Ψ с тензором $F_{\lambda\sigma}$, напомним, что не все пять компонент ψ являются независимыми. В самом деле, ψ^0 и ψ_4 служат соответственно каноническими импульсами и координатой, в то время как остальные три компоненты получаются из ψ_4 дифференцированием по пространственным координатам. Иное положение имеет место в спинорном случае, где верхний спинор биспинора ψ служит канонической координатой, а нижний играет роль канонического импульса. Это особенно наглядно видно при переходе к двухкомпонентному уравнению Фейнмана — Гелл-Манна для спинорного поля [10] (подробное изложение квантовой электродинамики на основе уравнения Фейнмана — Гелл-Манна содержится, например, в [11].

Указанное обстоятельство приводит, как мы сейчас убедимся, к тому, что перестановочные соотношения между Ψ и $F_{\lambda\sigma}$ не будут уже иметь форму (25), а будут содержать дополнительные слагаемые в правой части. Чтобы установить искомые правила коммутации, проще всего использовать уже известные соотношения (25). Например,

$$[\Psi^0(\mathrm{x}; P), F_{s0}(0)] = \frac{1}{\sqrt{m}}[\dot{\Phi}(\mathrm{x}; P), F_{s0}(0)] = e\int\limits_{-\infty}^{\mathrm{x}} d\xi_s\delta(\xi)\Psi^0(\mathrm{x}; P).$$

Точно так же

$$[\Psi_4(\mathrm{x}; P), F_{s0}(0)] = e\int\limits_{-\infty}^{\mathrm{x}} d\xi_s\delta(\xi)\Psi_4(\mathrm{x}; P).$$

В то же время

$$[\Psi^k(\mathrm{x}; P), F_{s0}(0)] = \frac{e}{\sqrt{m}}\partial^k\left\{\int\limits_{-\infty}^{\mathrm{x}} d\xi_s\delta(\xi)\Phi(\mathrm{x}; P)\right\} =$$

$$= e\int\limits_{-\infty}^{\mathrm{x}} d\xi_s\delta(\xi)\Psi^k(\mathrm{x}; P) + \frac{e}{m}\delta_s{}^k\delta(\mathrm{x})\Psi_4(\mathrm{x}; P).$$

Таким образом,

$$[\Psi^\alpha(\mathrm{x}; P), F_{s0}(0)] = e\int\limits_{-\infty}^{\mathrm{x}} d\xi_s\delta(\xi)\Psi^\alpha(\mathrm{x}; P) + \frac{e}{m}\delta_s{}^\alpha\delta(\mathrm{x})\Psi_4(\mathrm{x}; P). \tag{1.8}$$

Индекс α пробегает здесь значения 0, 1, 2, 3, 4, в то время как s — значения 1, 2, 3.

Совершенно аналогичным образом находим, что

$$[\overline{\Psi}_\alpha(\mathrm{x}; P), F_{s0}(0)] = -e\int\limits_{-\infty} d\xi_s\delta(\xi)\overline{\Psi}_\alpha(\mathrm{x}; P) + \frac{e}{m}\delta_{\alpha s}\delta(\mathrm{x})\overline{\Psi}_4(\mathrm{x}; P). \tag{1.9}$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Найдем теперь коммутатор электрического вектора с током:

$$[j_\lambda(\mathrm{x}), F_{s0}(0)] = -\frac{e}{2}[\{\overline{\Psi}_\alpha(\mathrm{x}; P)(\beta_\lambda)_\beta{}^\alpha\Psi^\beta(\mathrm{x}; P)\}, F_{s0}(0)] =$$

$$= -\frac{e^2}{2m}\delta(\mathrm{x})((\beta_\lambda)_s{}^\alpha\{\overline{\Psi}_\alpha\Psi_4\} + (\beta_\lambda)_\beta{}^s\{\overline{\Psi}_4\Psi^\beta\}).$$

Используя явный вид β-матриц (см. (1.3)), получаем

$$\langle [j_\lambda(\mathbf{x}), F_{s0}(0)]\rangle = -\frac{ie^2}{m} g_{\lambda s}\delta(\mathbf{x})\langle\{\overline{\Psi}_4\Psi_4\}\rangle = -ie^2 g_{\lambda s}\delta(\mathbf{x})\langle\{\Phi^*\Phi\}\rangle. \quad (1.10)$$

Это совпадает с соотношением (15) раздела 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Прежде чем перейти к анализу массовых формул (19) и (32) по теории возмущений, мы рассмотрим в качестве примера предложенную Швингером [5] двумерную модель. Преобразования, вполне аналогичные описанным в разделе 2, приводят к результату

$$\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\rho(\varkappa^2) = -2e^2\int d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2)\varkappa^2\frac{d}{d\varkappa^2}\Delta_1(0,\varkappa^2) = e^2/\pi. \quad (2.1)$$

Учитывая, что в данном случае [4] $\rho(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2-\mu^2)$, немедленно получаем отсюда

$$\mu^2 = \mu_0^2 + e^2/\pi. \quad (2.2)$$

Деля эту формулу на $\mu^2\mu_0^2$, получаем

$$\frac{1}{\mu_0^2} = \frac{1}{\mu^2} + \frac{e^2}{\pi}\frac{1}{\mu^2\mu_0^2}.$$

Таким образом, деление на $\varkappa^2$ следует в рассматриваемом случае определять так:

$$\frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2} = \frac{\delta(\varkappa^2-\mu^2)}{\mu^2} + \frac{e^2}{\pi}\frac{1}{\mu^2\mu_0^2}\delta(\varkappa^2). \quad (2.3)$$

Формула (3) выполняется при этом тождественно.

Если масса спинорного поля m не равна нулю, то точного решения швингеровской модели найти не удается. Перенормировка массы векторного мезона при $m\neq 0$ в низшем порядке теории возмущений рассматривалась в работе [12]. Авторы этой работы получили в случае $m=0$ отличный от (2.2) результат: $\delta\mu^2 = e^2/2\pi$. Нетрудно понять, что это произошло из-за неправильного определения поляризационного оператора. В самом деле, вычисленный в [12] поляризационный оператор (формула (2)) не является поперечным, что противоречит градиентной инвариантности теории (при $m\neq 0$ формула (2) вообще ошибочна, в чем легко убедиться, свернув обе ее части по индексам ρ и σ). Правильное градиентно-инвариантное выражение для поляризационного оператора имеет вид ($m\neq 0$)

$$\Pi_{\lambda\sigma}(k) = \left(g_{\lambda\sigma} - \frac{k_\lambda k_\sigma}{k^2}\right) i\Pi(k^2); \quad (2.4)$$

$$\Pi(k^2) = k^2\pi(k^2),$$

$$\pi(k^2) = \frac{e^2}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2\frac{\lambda(\varkappa^2)}{\varkappa^2-k^2}, \quad (2.5)$$

$$\lambda(\varkappa^2) = \frac{2m^2}{\varkappa^4\sqrt{1-4m^2/\varkappa^2}}.$$

Чтобы найти спектральную функцию, нужно произвести вычитания, соответствующие перенормировкам массы и заряда:

$$\Pi_c(k^2) = \Pi(k^2) - \Pi(\mu_0^2) - (k^2 - \mu_0^2)\Pi'(\mu_0^2) =$$
$$= k^2(\pi(k^2) - \pi(\mu_0^2)) - \mu_0^2(k^2 - \mu_0^2)\pi'(\mu_0^2). \tag{2.6}$$

После несложных преобразований получаем

$$\Pi_c(k^2) = \frac{e^2}{\pi}(k^2 - \mu_0^2)^2 \int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2 \frac{\varkappa^2 \lambda(\varkappa^2)}{(\varkappa^2 - \mu_0^2)^2} \frac{1}{\varkappa^2 - k^2}.$$

Отсюда мы заключаем, что регулярная часть спектральной функции имеет вид

$$\sigma(\varkappa^2) = \frac{e^2}{\pi} \frac{\varkappa^2 \lambda(\varkappa^2)}{(\varkappa^2 - \mu_0^2)^2} \theta(\varkappa^2 - 4m^2). \tag{2.7}$$

Константа перенормировки заряда Z равна (см., например, [13])

$$Z = 1 - \frac{d}{dk^2}\Pi(k^2)\,|_{k^2=\mu_0^2} = 1 - \pi(\mu_0^2) - \mu_0^2\pi'(\mu_0^2) =$$

$$= 1 - \frac{e^2}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2 \frac{\lambda(\varkappa^2)}{\varkappa^2 - \mu_0^2} - \mu_0^2 \frac{e^2}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2 \frac{\lambda(\varkappa^2)}{(\varkappa^2 - \mu_0^2)^2} = 1 - \int_{4m^2}^{\infty} \sigma(\varkappa^2)\, d\varkappa^2$$

в соответствии с правилом сумм (2).

Масса векторного поля определяется из уравнения

$$\mu^2 - \mu_0^2 + \mu^2\pi(\mu^2) = 0, \tag{2.8}$$

так что в низшем порядке

$$\delta\mu^2 = -\mu_0^2\pi(\mu_0^2).$$

Далее получаем

$$\int d\varkappa^2(\varkappa^2 - \mu_0^2)\rho(\varkappa^2) = Z\delta\mu^2 + \int d\varkappa^2(\varkappa^2 - \mu_0^2)\sigma(\varkappa^2) =$$

$$= -\mu_0^2\pi(\mu_0^2) + \int d\varkappa^2(\varkappa^2 - \mu_0^2)\sigma(\varkappa^2) = \frac{e^2}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2\lambda(\varkappa^2) = e^2/\pi$$

в полном соответствии с (2.1). С другой стороны, деля (2.8) на $\mu^2\mu_0^2$, находим

$$\frac{1}{\mu_0^2} = \frac{1}{\mu^2}\left(1 - \int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2 \frac{\lambda(\varkappa^2)}{\varkappa^2 - \mu_0^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left(1 - \int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2 \frac{\sigma(\varkappa^2)(\varkappa^2 - \mu_0^2)}{\varkappa^2}\right) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2} d\varkappa^2,$$

что совпадает с (3). Неопределенность деления на $\varkappa^2$ здесь, разумеется, не сказывается.

Обратимся теперь к случаю спинорной квантовой электродинамики. Поляризационный оператор в низшем порядке теории возмущений можно представить в форме

$$\Pi(k^2) = k^2\frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + k^2\int_{4m^2}^{\infty} d\varkappa^2 \frac{\lambda(\varkappa^2)}{\varkappa^2 - k^2}\right),$$
$$\lambda(\varkappa^2) = \frac{1}{\varkappa^2}\left(1 + \frac{2m^2}{\varkappa^2}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{\varkappa^2}}. \tag{2.9}$$

Вычислив $\Pi_c(k^2)$ по формуле (2.6), убеждаемся, что

$$\sigma(\varkappa^2)=\frac{\alpha}{3\pi}\frac{\varkappa^4\lambda(\varkappa^2)}{(\varkappa^2-\mu_0^2)^2}\theta(\varkappa^2-4m^2). \tag{2.10}$$

Добавка к массе векторного поля равна

$$\delta\mu^2=-\frac{\alpha}{3\pi}\mu_0^2\left(\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\mu_0^2\int\limits_{4m^2}^{\infty}d\varkappa^2\frac{\lambda(\varkappa^2)}{\varkappa^2-\mu_0^2}\right). \tag{2.11}$$

Поэтому

$$\int d\varkappa^2(\varkappa^2-\mu_0^2)\rho(\varkappa^2)=-\frac{\alpha}{3\pi}\mu_0^2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{\alpha}{3\pi}\mu_0^2\int\limits_{4m^2}^{\infty}d\varkappa^2\lambda(\varkappa^2)+$$

$$+\frac{\alpha}{3\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}d\varkappa^2\varkappa^2\lambda(\varkappa^2)\approx-\frac{\alpha}{3\pi}\mu_0^2\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\frac{\alpha}{3\pi}\mu_0^2\ln\frac{L^2}{m^2}+\frac{\alpha}{3\pi}L^2. \tag{2.12}$$

В правую часть формулы (32) в низшем порядке следует подставить $\rho_1(\varkappa^2)=\delta(\varkappa^2-m^2)$, так что она равна просто $(2\alpha/3\pi)\Lambda^2$. Отсюда мы заключаем, что во втором порядке по e имеет место равенство $L^2=2\Lambda^2$. Полученный результат не противоречит, конечно, сделанному в разделе 3 утверждению, что при пропорциональности параметров образования L^2 и Λ^2 соотношения (39) и (40) могут выполняться лишь при $\alpha\to 0$, поскольку ограничиваться низшим порядком теории возмущений можно только до тех пор, пока параметр обрезания удовлетворяет условию $(\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)\ll 1$. Поэтому мы не можем сделать предельного перехода к $\Lambda^2\to\infty$. При таком переходе, например, константа перенормировки заряда, равная в этом порядке $Z=1-(\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)$ стала бы отрицательной и бесконечной, вместо того чтобы удовлетворять неравенству $0\leqslant Z\leqslant 1$.

Решение уравнений квантовой электродинамики в низшем порядке по e, справедливое при любых параметрах обрезания, было найдено в [14]. К сожалению, оно не может быть непосредственно использовано для анализа формулы (32), так как не удовлетворяет спектральным теоремам. В частности, при $\Lambda^2\to\infty$ $Z=1-(\alpha/3\pi)\ln(\Lambda^2/m^2)\to-\infty$. Вместо него мы воспользуемся модификацией этого решения, предложенной Редмондом [15] и состоящей в итерации мнимой части поляризации вакуума с последующим восстановлением полной функции Грина с помощью представления Лемана. При этом оказывается, что

$$Z=\frac{\alpha}{3\pi},\quad \sigma_c(\varkappa^2)\approx\frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{\varkappa^2}{m^2}\right)^2\right]^{-1}(\varkappa^2\to\infty), \tag{2.13}$$
$$\rho_1(\varkappa^2)=\delta(\varkappa^2-m^2).$$

Подставляя (2.13) в (32) (при $\mu_0=0$), получаем следующее соотношение между параметрами обрезания:

$$L^2\Big/\left(\ln\frac{L^2}{m^2}\right)^2=\Lambda^2.$$

Впрочем, это равенство нельзя принимать слишком серьезно, так как решение Редмонда недостаточно хорошо аргументировано. Рассмотрение скалярного случая не добавляет к сказанному выше ничего нового и мы его опускаем.

Литература

[1] H. Lehmann. Nuovo Cim., 11, 342, 1954.
[2] K. Johnson. Nucl. Phys., 25, 435, 1961.
[3] А. И. Вайнштейн, В. В. Соколов, И. Б. Хриплович. ЯФ, 1, 908, 1965.
[4] W. Thirring, I. Wess. Ann. of Phys., 27, 331, 1964.
[5] J. Schwinger. Theoretical Physics, Vienna, 1963, стр. 89.
[6] S. Mandelstam. Ann. of Phys., 19, 1, 1962.
[7] В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов. ЖЭТФ, 41, 247, 1961.
[8] A. Sarker. Ann. of Phys., 24, 19, 1963.
[9] J. Schwinger. Phys. Rev. Lett., 3, 296, 1959.
[10] R. Feynmann, M. Cell-Mann. Phys. Rev., 109, 193, 1958.
[11] И. Бялыницки-Бируля. Зимняя школа при ОИЯИ, 1964, 3, стр. 132.
[12] E. Marx, I. Saavedra. Nucl. Phys., 60, 337, 1964.
[13] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, Физматгиз, 1959.
[14] Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников. ДАН СССР, 95, 497, 773, 1177; 96, 261, 1954.
[15] P. Redmond. Phys. Rev., 112, 1404, 1958.

MASS-FORMULAE IN THE NEUTRAL VECTOR MESON THEORY

V. V. SOKOLOV

Relations are obtained in the theory of a neutral vector meson, interacting with a conserved current, connecting the meson mass with the spectral functions of both interacting fields. An analysis of these relations makes it possible to draw some conclusions about the charge and mass renormalization constants.
