ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 4, вып. 5, 1966

КОГЕРЕНТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ СПАРИВАНИЯ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ 0^+-ВОЗБУЖДЕНИЯ ЯДЕР

С. Т. БЕЛЯЕВ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

(Поступила в редакцию 21 марта 1966 г.)

Методом зависящего от времени самосогласованного поля исследуются коллективные возбуждения 0^+ в ядрах, связанные со взаимодействием в канале частица — частица. Найдены два класса возбуждений с различной временной четностью, представляющие собой когерентные флуктуации спаривания. T-четная ветвь (предсказывалась ранее Бором и Моттельсоном) характеризуется слабыми $E0$-переходами в основное состояние; T — нечетная ветвь, напротив, имеет большую вероятность $E0$-переходов. Рассмотрены также сечения возбуждения при (t, p)-реакции, которые оказываются одного порядка для ветвей обоих типов.

1. Введение

Среди низколежащих возбужденных состояний как сферических, так и деформированных ядер известно большое число уровней с моментом и четностью 0^+, количество которых быстро возрастает в настоящее время в связи с расширением экспериментальных исследований. Измеренные вероятности электромагнитных переходов, сечения (t, p)-реакции и т. д. показывают, что среди уровней 0^+ можно различать состояния различной коллективной природы, причем многие из них с достоверностью не относятся к уже известным типам (двухфононным состояниям в сферических ядрах или β-вибрационным — в деформированных).

Бор и Моттельсон [1)] [1] предложили другой механизм возбуждения ядра, в котором основную роль играет взаимодействие спаривания («парные колебания»). Бесом и Броглиа [2] для таких возбуждений были проведены количественные расчеты, из которых следует, что «парные колебания» могут практически реализоваться лишь в очень частных случаях.

В настоящей работе исследуется широкий класс коллективных возбуждений ядер (включающий и «парные колебания»), которые можно назвать когерентными флуктуациями спаривания.

При микроскопическом описании коллективных возбуждений задача нахождения их собственных энергий сводится к исследованию системы уравнений интегрального типа, ядром которых являются матричные элементы межнуклонного взаимодействия. Как подходить к проблеме, когда детальный вид взаимодействия неизвестен? Если ограничиться возбуждениями с определенными квантовыми числами (например, 0^+), то в задачу входят только два типа матричных элементов: характеризующие взаимодействие частицы и дырки в состоянии 0^+ и аналогичное взаимодействие для двух частиц (или двух дырок). Первый тип взаимодействия определяет обычные монопольные колебания ядер, энергии которых значительно больше одночастичных. Для состояний 0^+ представляет интерес канал частица — частица, для описания которого необходимо знать матричные элементы взаимодействия, перебрасывающие пару частиц с одного уровня на любой другой. В модельном взаимодействии спаривания все эти матрич-

---

1) Частное сообщение.

ные элементы считаются равными. Такое приближение достаточно для описания одночастичных возбуждений и в некоторой степени — для квадрупольных и октупольных коллективных колебаний. Но можно ли им ограничиться и в других случаях?

Спаривательное взаимодействие хорошо тем, что требует введения лишь одной феноменологической константы. Его усложнение путем введения новых феноменологических членов нельзя считать оправданным из-за большого произвола. Однако можно пытаться исправлять спаривание, следуя определенным общим принципам. По нашему мнению, таким принципом может служить требование градиентной инвариантности взаимодействия, что для нуклонов в ядре эквивалентно условию локальной галилеевской инвариантности [3]. Исходя из этого требования, можно исправить градиентно неинвариантное взаимодействие спаривания, не вводя при этом никаких новых констант.

Спектр коллективных возбуждений для исправленного взаимодействия значительно богаче, чем для простого спаривания. Целью настоящей работы является исследование свойств этих возбуждений. Мы будем использовать метод зависящего от времени самосогласованного поля в форме, предложенной ранее [4]. Во втором разделе даны необходимые результаты и сформулированы основные уравнения для поправки к матрице плотности. Там же приведена связь матрицы плотности с физическими характеристиками системы — вероятностью перехода и оператором, порождающим возбужденное состояние.

В третьем разделе проведена аппроксимация взаимодействия с помощью требования его градиентной инвариантности.

В четвертом разделе исследуются решения основного уравнения. Устанавливается два мозможных типа возбуждений с различными временными четностями («парные колебания» оказываются одной из T-четных ветвей).

В пятом и шестом разделах исследуются свойства найденных возбуждений — вероятности $E0$-переходов в основное состояние и возбуждение при (t, p)-реакции.

Настоящая работа не преследует цели проведения точных количественных расчетов и детального сравнения с экспериментом. Основная задача — качественное исследование свойств найденных возбуждений. Поэтому при необходимости будут использоваться такие упрощения и приближения, которые не имеют принципиального значения и не могут изменить качественных результатов.

2. Матрица плотности системы во внешнем поле

Вначале кратко сформулируем обозначения и некоторые результаты работы [4]. Введем обобщенную матрицу плотности системы:

$$\hat{\rho}(\nu\nu') = \begin{vmatrix} 2\langle a_\nu a_{\nu'}^+\rangle - \delta_{\nu\nu'} & -2i\langle a_\nu a_{\tilde{\nu}'}\rangle \\ 2i\langle a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\nu'}^+\rangle & 2\langle a_{\tilde{\nu}}^+ a_{\tilde{\nu}'}\rangle - \delta_{\nu\nu'} \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь a_ν^+ (a_ν) — операторы рождения (уничтожения) нуклона в состоянии ν; операция в угловых скобках означает усреднение по основному состоянию системы, а состояния $(\nu, \tilde{\nu})$ переходят друг в друга при отражении времени. Удобно ввести комбинированные операторы

$$\Psi(\nu) = \begin{pmatrix} a_\nu \\ ia_{\tilde{\nu}}^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi^+(\nu) = (a_\nu^+, \ -ia_{\tilde{\nu}}), \tag{2.2}$$

через которые $\hat{\rho}$ можно представить в виде

$$\langle\Psi\Psi^+\rangle = {}^1/_2(1 + \hat{\rho}). \tag{2.3}$$

Общая билинейная комбинация оператора a, a^+

$$R = \sum_{\nu\nu'} \{ - r^{(+)}_{\nu'\nu} (a_\nu a^+_{\nu'} - a^+_{\tilde{\nu}} a_{\tilde{\nu}'}) - r^{(-)}_{\nu'\nu} (a_\nu a^+_{\nu'} + a^+_{\tilde{\nu}} a_{\tilde{\nu}'}) +$$
$$+ \bar{r}^{(+)}_{\nu'\nu} (a_\nu a_{\tilde{\nu}'} + a^+_{\tilde{\nu}} a^+_{\nu'}) - \bar{r}^{(-)}_{\nu'\nu} (a_\nu a_{\tilde{\nu}'} - a^+_{\tilde{\nu}} a^+_{\nu'}) \} \tag{2.4}$$

в представлении (2.2) записывается как

$$R = -\mathrm{Tr}\{\hat{R}\Psi\Psi^+\}, \tag{2.5}$$

где матрица $\hat{R}(\nu'\nu)$ имеет вид

$$\hat{R}(\nu'\nu) = r^{(+)}_{\nu'\nu}\sigma^z - \bar{r}^{(+)}_{\nu'\nu}\sigma^y + r^{(-)}_{\nu'\nu} + i\bar{r}^{(-)}_{\nu'\nu}\sigma^x =$$
$$= \left| \begin{array}{cc} r^{(-)} + r^{(+)} & i(\bar{r}^{(-)} + \bar{r}^{(+)}) \\ i(\bar{r}^{(-)} - \bar{r}^{(+)}) & r^{(-)} - r^{(+)} \end{array} \right|_{\nu'\nu}, \tag{2.6}$$

а шпур (Tr) берется как по состояниям ν, ν', так и по матричным индексам $\hat{R}$ и $\Psi\Psi^+$. Среднее значение оператора (2.5) по основному состоянию согласно (2.3) равно

$$\langle R \rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\hat{R} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\{\hat{R}\hat{\rho}\}. \tag{2.7}$$

Уравнения для обобщенной матрицы плотности $\hat{\rho}$ в приближении самосогласованного поля имеют вид

$$i\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{S}\{\hat{\rho}\}, \hat{\rho}], \tag{2.8а}$$

$$\hat{\rho}^2 = 1, \tag{2.8б}$$

где $\hat{S}$ — самосогласованный гамильтониан.

Считаем, что в отсутствие внешнего поля система находится в стационарном состоянии, матрица плотности которого определяется из

$$[S^0, \hat{\rho}^0] = 0 \qquad \hat{\rho}^{0^2} = 1; \tag{2.9}$$
$$S^0 \equiv \hat{S}\{\hat{\rho}^0\}.$$

Вследствие сохранения временной (T) четности S^0 можно представить в виде

$$S^0 = \left| \begin{array}{cc} \varepsilon & i\Delta \\ -i\Delta & -\varepsilon \end{array} \right| = \varepsilon\sigma^z - \Delta\sigma^y, \tag{2.10}$$

где ε имеет смысл одночастичного гамильтониана, а Δ описывает куперовское спаривание (ε и Δ — эрмитовские операторы). Из (2.10) следует, что собственные векторы S^0 группируются в пары (φ, χ) с собственными значениями, отличающимися только знаком:

$$\begin{array}{lll} S^0\varphi = \varphi E, & \varphi^+ S^0 = E\varphi^+, & \chi = \sigma^x\varphi, \\ S^0\chi = -\chi E, & \chi^+ S^0 = -E\chi^+, & \chi^+ = \varphi^+\sigma^x. \end{array} \tag{2.11}$$

Матрица плотности основного состояния связана с собственными векторами S^0 соотношением

$$\hat{\rho}^0 = \varphi\varphi^+ - \chi\chi^+. \tag{2.12}$$

В модели с постоянным спариванием ($\Delta = \mathrm{const}$)

$$\varphi_\nu = |\nu\rangle \begin{pmatrix} u_\nu \\ -iv_\nu \end{pmatrix}, \qquad \chi_\nu = |\nu\rangle \begin{pmatrix} -iv_\nu \\ u_\nu \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где $|\nu\rangle$ есть собственные функции ε (с собственным значением ε_ν), а u, v — коэффициенты обычного преобразования Боголюбова. При этом собственные значения S^0 равны $E_\nu = (\varepsilon_\nu^2 + \Delta^2)^{1/2}$.

Поправка к матрице плотности от внешнего поля может содержать как T-четную, так и T-нечетную компоненты, которые с учетом (2.8б) и (2.12) можно представить в виде

$$\hat\rho^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\hat\rho^{(1)} \mp \sigma^x \hat\rho^{(1)} \sigma^x) = 2(\chi Z^{(\pm)} \varphi^+ \mp \varphi Z^{(\pm)} \chi^+). \tag{2.14}$$

Из (2.14) видно, что для определения матриц $\hat\rho^{(\pm)}$ достаточно определить «скалярные» функции $Z^{(\pm)}(\nu\nu')$.

В первом приближении по внешнему полю $V \sim e^{-i\omega t}$; полагая $\rho^{(\pm)} \sim \sim e^{-i\omega t}$ и используя развитую в работе [4] технику, нетрудно получить следующие уравнения для $Z^{(\pm)}$:

$$\omega Z^{(\mp)}(11') + E_{11'} Z^{(\pm)}(11') + 2\xi^{(\pm)}_{11'} \sum_{22'} \langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle \xi^{(\pm)}_{22'} Z^{(\pm)}(22') +$$

$$+ 2\eta^{(\pm)}_{11'} \sum_{22'} \langle 12'|G^{(\pm)}|21'\rangle \eta^{(\pm)}_{22'} Z^{(\pm)}(22') = \Phi^{(\pm)}_{11'}, \tag{2.15а}$$

$$\Phi^{(\pm)}_{11'} = (\chi_1^+ \hat V^{(\pm)} \varphi_{1'}), \tag{2.15б}$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$E_{\nu\nu'} = E_\nu + E_{\nu'},$$

$$\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'} = u_\nu u_{\nu'} \mp v_\nu v_{\nu'}, \quad \eta^{(\pm)}_{\nu\nu'} = u_\nu v_{\nu'} \pm v_\nu u_{\nu'}, \tag{2.16}$$

а $G^{(\pm)}$ означает T-четную и T-нечетную (относительно одной из частиц) часть взаимодействия в канале частица — дырка [2)].

Мы считаем, что внешнее поле V имеет самый общий вид и может содержать как члены, сохраняющие число частиц N (например, электромагнитное поле), так и меняющие N на две единицы (как, например, при (t, p)-реакции двойного срыва). Другими словами, V имеет вид (2.4) или (2.5), так что согласно (2.15б) и (2.13),

$$\Phi^{(\pm)}_{11'} = \pm i(\eta^{(\pm)}_{11'} V^{(\pm)}_{11'} - \xi^{(\pm)}_{11'} \bar V^{(\pm)}_{11'}). \tag{2.17}$$

Здесь $V^{(\pm)}$ и $\bar V^{(\pm)}$ имеют тот же смысл, что и $r^{(\pm)}$, $\bar r^{(\pm)}$ в (2.4) и (2.6) (V сохраняет число частиц, $\bar V$ — меняет). Отметим свойство симметрии для решения уравнений (2.15):

$$Z^{(\pm)}(\nu\nu'; \omega) = \mp[Z^{(\pm)}(\nu'\nu; -\omega)]^*. \tag{2.18}$$

Удобно наряду с (2.15) рассматривать уравнения для эффективного поля $(\mathcal{V}, \bar{\mathcal{V}})$, возникающего в системе при наложении внешних полей $(V, \bar V)$. Связь эффективных полей с величиной $Z^{(\pm)}$ имеет вид

$$\mathcal{V}^{(\pm)}(11') = V^{(\pm)}_{11'} \pm 2i \sum_{22'} \langle 12'|G^{(\pm)}|21'\rangle \eta^{(\pm)}_{22'} Z^{(\pm)}(22'),$$

$$\bar{\mathcal{V}}^{(\pm)}(11') = \bar V^{(\pm)}_{11'} \mp 2i \sum_{22'} \langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle \xi^{(\pm)}_{22'} Z^{(\pm)}(22'), \tag{2.19}$$

---

2) Если T — оператор инверсии времени, то $G^{\pm}_{12} = {}^1/_2(G_{12} \pm T_2^{-1} G_{12} T_2)$, так что $\langle 12'|G^{(\pm)}|21'\rangle = {}^1/_2(\langle 12'|G|21'\rangle \pm \langle 1\tilde{2}|G|\tilde{2}1'\rangle)$. Детали вывода уравнения и смежные вопросы см. в работе [4].

откуда с учетом (2.18) устанавливаем следующие свойства симметрии:

$$\mathscr{V}^{(\pm)}(\nu\nu';\,\omega) = [\,\mathscr{V}^{(\pm)}(\nu'\nu;\,-\omega)\,]^*,$$

$$\overline{\mathscr{V}}^{(\pm)}(\nu\nu';\,\omega) = \pm[\,\overline{\mathscr{V}}^{(\pm)}(\nu'\nu;\,-\omega)\,]^*. \tag{2.20}$$

Из (2.15) и (2.19) получаем следующие уравнения для эффективных полей [3]:

$$\mathscr{V}^{(\pm)}(11') = \overset{\circ}{V}{}^{(\pm)}_{11'} - 2\sum_{22'}\langle 12'\,|\,G^{(\pm)}|\,21'\rangle \frac{\eta^{(\pm)}_{22'}}{E^2_{22'}-\omega^2}\{E_{22'}\eta^{(\pm)}_{22'}\mathscr{V}^{(\pm)}_{(22')} + \omega\eta^{(\mp)}_{22'}\mathscr{V}^{(\mp)}(22') - E_{22'}\xi^{(\pm)}_{22'}\overline{\mathscr{V}}^{(\pm)}(22') - \omega\xi^{(\mp)}_{22'}\overline{\mathscr{V}}^{(\mp)}\},$$

$$\overline{\mathscr{V}}^{(\pm)}(11') = \overline{V}^{(\pm)}_{11'} - 2\sum_{22'}\langle 1\widetilde{1}'\,|\,G\,|\,\widetilde{2}'2\rangle \frac{\xi^{(\pm)}_{22'}}{E^2_{22'}-\omega^2}\{E_{22'}\xi^{(\pm)}_{22'}\overline{\mathscr{V}}^{(\pm)}(22') + \omega\xi^{(\mp)}_{22'}\overline{\mathscr{V}}^{(\pm)}(22') - E_{22'}\eta^{(\pm)}_{22'}\mathscr{V}^{(\pm)}(22') - \omega\eta^{(\mp)}_{22'}\mathscr{V}^{(\mp)}(22')\}. \tag{2.21}$$

Уравнение интегрального типа (2.15), определяющее поправку первого приближения к матрице плотности, является основным для дальнейшего рассмотрения.

Прежде чем переходить к решению уравнения (2.15), отметим связь матрицы плотности во внешнем поле с физическими характеристиками системы.

Пусть на систему действует внешнее периодическое поле $V \sim e^{-i\omega t}$, среднее значение которого по невозмущенному состоянию системы равно нулю. В возмущенном состоянии среднее от V определится выражением

$$\langle V\rangle = \sum_n{}' \frac{|(\omega_n|V|0)|^2}{\omega-\omega_n},$$

где ω_n — энергии возбужденных состояний, отсчитанные от энергии основного состояния $|0)$. С другой стороны, среднее значение V может быть вычислено через матрицу плотности. Согласно (2.7) имеем

$$\langle V\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{\hat{V}\hat{\rho}^{(1)}\} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{\hat{V}^{(+)}\hat{\rho}^{(+)} + \hat{V}^{(-)}\hat{\rho}^{(-)}\}.$$

Используя (2.14) и определение $\Phi^{(\pm)}$ в (2.15), после простых преобразований (см. [4]) получаем

$$\langle V\rangle = 2\sum_{\nu\nu'}\{\Phi^{(+)}_{\nu'\nu}Z^{(+)}(\nu\nu') - \Phi^{(-)}_{\nu'\nu}Z^{(-)}(\nu\nu')\}. \tag{2.22}$$

Сравнивая (2.18) и (2.19), находим для матричного элемента перехода из основного состояния в возбужденное (энергия перехода ω_n)

$$|(\omega_n|V|0)|^2 = \left[\frac{\omega^2-\omega_n{}^2}{\omega_n}\sum_{\nu\nu'}\{\Phi^{(+)}_{\nu'\nu}Z^{(+)}(\nu\nu') - \Phi^{(-)}_{\nu'\nu}Z^{(-)}(\nu\nu')\}\right]_{\omega^2\to\omega_n{}^2}, \tag{2.23}$$

откуда видно, что вероятность перехода определяется вычетом в соответствующем полюсе $Z^{(\pm)}$.

Пусть возбужденное состояние $|\omega_n)$ имеет коллективную природу и порождается некоторым бозе-оператором $\mathfrak{A}^+$ (фононом), так что

$$(0|\mathfrak{A} = (\omega_n|,\quad \mathfrak{A}|0) = 0.$$

Тогда для матричного элемента перехода от оператора V имеем

$$(\omega_n|V|0) = (0|\mathfrak{A}V|0) = (0|[\mathfrak{A},V]|0) \equiv \langle[\mathfrak{A},V]\rangle$$

---

[3] Получение аналогичной системы уравнений методом функций Грина см. в монографии Мигдала [5].

или согласно (2.7)

$$(\omega_n|V|0) = -{}^1\!/_2 \, \mathrm{Tr}\,\{[\hat{\mathfrak{A}}, \hat{V}]\hat{\rho}\}. \tag{2.24}$$

Смысл компонент матрицы $\mathfrak{A}$ тот же, что и в (2.4) — (2.6). С помощью (2.12) и (2.15б) из (2.24) легко получить

$$(\omega_n|V|0) = 2i \sum_{\nu\nu'} \{A^{(+)}(\nu'\nu)\Phi^{(+)}_{\nu\nu'} - A^{(-)}(\nu'\nu)\Phi^{(-)}_{\nu\nu'}\}. \tag{2.25}$$

Здесь величины

$$A^{(\pm)}(\nu'\nu) = \frac{i}{2}[(\chi_{\nu'}{}^{+}\hat{\mathfrak{A}}\varphi_{\nu}) \pm (\varphi_{\nu'}{}^{+}\hat{\mathfrak{A}}\chi_{\nu})]$$

имеют смысл коэффициентов разложения фонона через операторы квазичастиц α, α^{+} [4]:

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu\nu'}\{A^{(+)}(\nu'\nu)(\alpha_{\nu}\alpha_{\tilde{\nu}'} - \alpha_{\tilde{\nu}}{}^{+}\alpha_{\nu'}{}^{+}) + A^{(-)}(\nu'\nu)(\alpha_{\nu}\alpha_{\tilde{\nu}'} + \alpha_{\tilde{\nu}}{}^{+}\alpha_{\nu'}{}^{+})\}. \tag{2.26}$$

Структура фонона (т. е. коэффициенты $A^{(\pm)}$) может быть определена из сопоставления выражений (2.23) и (2.25) для амплитуды перехода.

Таким образом, решение уравнения (2.15) позволяет найти энергии коллективного уровня, вероятность перехода в основное состояние и волновую функцию состояния (структуру фонона).

3. Следствия градиентной инвариантности взаимодействия

Решение уравнения (2.15) требует определенных предположений о межнуклонном взаимодействии. Как уже обсуждалось во Введении, взаимодействие в канале частица — дырка не является принципиальным для рассматриваемых здесь вопросов. Поэтому в дальнейшем мы его рассматривать не будем и ограничимся лишь членом с $\langle 1\hat{1}'|G|\hat{2}'2\rangle$. (Более строгий метод функций Грина приводит к уравнению, формально совпадающему с (2.15), если под $\langle 1\hat{1}'|G|\hat{2}'2\rangle$ понимать неприводимый четырехполюсник (амплитуду) в канале частица — частица.) Будем считать, что $\langle 1\hat{1}'|G|\hat{2}'2\rangle$ инвариантно относительно калибровочного преобразования одночастичных волновых функций

$$\varphi_{\nu}(\mathbf{r}) \to e^{i\beta\Phi(\mathbf{r})}\varphi_{\nu}(\mathbf{r}), \tag{3.1}$$

где β — постоянная, а $\Phi(\mathbf{r})$ — произвольная функция координат. Какие основания для такого предположения?

Исходное межнуклонное взаимодействие инвариантно относительно преобразования Галилея, при котором одночастичные функции трансформируются согласно

$$\varphi_{\nu}(\mathbf{r}) \to e^{i\mathbf{P}_0\mathbf{r}}\varphi_{\nu}(\mathbf{r}), \tag{3.2}$$

где $\mathbf{P}_0$ — постоянный вектор. Вследствие короткодействующего характера сил взаимодействие остается инвариантным и при локальном галилеевском преобразовании, когда вектор $\mathbf{P}_0$ в (3.2) является плавной функцией координат. Но тогда (3.2) переходит в калибровочное преобразование (3.1).

Точная двухчастичная амплитуда (неприводимый четырехполюсник), вообще говоря, не инвариантна относительно преобразований Галилея, так как возможна зависимость не только от разности импульсов входящих и выходящих концов, но и от их абсолютной величины. Но для частиц у поверхности Ферми галилеевская инвариантность амплитуды сохраняется.

---

[4] Как обычно, принимаем связь между частицами и квазичастицами в виде $a_{\nu} = u_{\nu}\alpha_{\nu} + v_{\nu}\alpha^{+}_{\tilde{\nu}}$, $a_{\tilde{\nu}} = u_{\nu}\alpha_{\tilde{\nu}} - v_{\nu}\alpha_{\nu}{}^{+}$.

если в (3.2) параметр P_0 много меньше граничного импульса Ферми p_F. Поэтому сохраняется и приближенная калибровочная инвариантность, по крайней мере, для достаточно плавных функций $\Phi(\mathbf{r})$ в (3.1) (мало меняющихся на расстояниях $\sim \hbar / p_F$).

Отметим, что калибровочная инвариантность взаимодействия обеспечивает справедливость уравнения непрерывности для тока частиц.

Требование градиентной инвариантности взаимодействия приводит к соотношению (вывод см. в Приложении)

$$\sum_{22'} \langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle \frac{E_{22'}}{2E_2E_{2'}} \langle 2|\Phi|2'\rangle = -\langle 1|\Phi|1'\rangle. \qquad (3.3)$$

Для $\Phi = \mathrm{const}$ это соотношение переходит в обычное уравнение для параметра Δ. Модельное взаимодействие спаривания определяется как

$$\langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle = -{}^1/_2 G\delta_{11'}\delta_{22'}. \qquad (3.4)$$

Очевидно, что взаимодействие (3.4) градиентно неинвариантно, так как для него (3.3) может выполняться только для $\Phi = \mathrm{const}$. Поставим задачу: дополнить правую часть (3.4) членами, которые обеспечат выполнение условия (3.3) для других функций координат $\Phi(\mathbf{r})$. С этой целью полагаем вместо (3.4)

$$\langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle = -\frac{1}{2}G' \sum_{\sigma=0,1\ldots} f_\sigma(11')f_\sigma(2'2), \qquad (3.5)$$

где

$$f_\sigma(\nu\nu') \equiv \langle\nu|f_\sigma(\mathbf{r})|\nu'\rangle$$

— одночастичные матричные элементы некоторых функций от $\mathbf{r}$. Причем первый — основной — член в сумме (3.5) совпадает с (3.4), т. е. $f_0 = 1$. Считая, что функции f_σ линейно независимы, потребуем выполнения (3.3) для каждой из них. В результате получаем следующее условие ортонормировки для f_σ:

$$G \sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}}{4E_\nu E_{\nu'}} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu') = \delta_{\sigma\rho}, \qquad (3.6)$$

которое в принципе однозначно определяет правую часть (3.5). Между прочим, для потенциальной ямы с четко выраженным краем (3.6) эквивалентно условию ортонормировки в координатном пространстве внутри ядра (объемом Ω)

$$\frac{1}{\Omega}\int d\mathbf{r}\, f_\sigma(\mathbf{r}) f_\rho(\mathbf{r}) = \delta_{\sigma\rho}, \qquad (3,6')$$

так как в этом случае уравнение для $\Delta = \mathrm{const}$ можно представить в виде [6]

$$G\Omega \sum_\nu |\nu\rangle \frac{1}{2E_\nu}\langle\nu| = 1.$$

Необходимо подчеркнуть смысл равенства (3.5). Это представление ни в коей мере не следует рассматривать как разложение реального взаимодействия. Подобно тому, как в (3.4) правая часть эквивалентна левой лишь в отношении одного свойства — спаривания, каждый член правой части (3.5) передает лишь определенное свойство истинного взаимодействия — градиентную инвариантность для определенной функции $\Phi(\mathbf{r})$ в (3.2). Таким образом, (3.5) следует рассматривать лишь как моделирование определенных матричных элементов взаимодействия относительно свойства градиентной инвариантности.

Подставляя (3.5) в (2.15), получаем уравнение с вырожденным ядром, которое приводится обычным способом к системе алгебраических уравнений:

$$\left\{\delta_{\sigma\rho} - G\sum_{\nu\nu'}\frac{E_{\nu\nu'}\xi^{(\pm)2}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}f_\sigma(\nu'\nu)f_\rho(\nu\nu')\right\}K_\rho^{(\pm)} +$$

$$+ G\sum_{\nu\nu'}\frac{\omega\xi^{(+)}_{\nu\nu'}\xi^{(-)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}f_\sigma(\nu'\nu)f_\rho(\nu\nu')K_\rho^{(\mp)} = L_\sigma^{(\pm)}; \tag{3.7а}$$

здесь

$$K_\rho^{(\pm)} = G\sum_{\nu\nu'}f_\rho(\nu'\nu)\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'}Z^{(\pm)}(\nu\nu'), \tag{3.7б}$$

$$L_\sigma^{(\pm)} = G\sum_{\nu\nu'}\frac{f_\sigma(\nu'\nu)\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}\{E_{\nu\nu'}\Phi^{(\pm)}_{\nu\nu'} - \omega\Phi^{(\mp)}_{\nu\nu'}\}, \tag{3.7в}$$

а величина $Z^{(\pm)}$, определяющая поправку к матрице плотности, дается выражением

$$(E^2_{\nu\nu'}-\omega^2)Z^{(\pm)}(\nu\nu') = f_\rho(\nu\nu')\{E_{\nu\nu'}\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'}K_\rho^{(\pm)} -$$

$$- \omega\xi^{(\mp)}_{\nu\nu'}K_\rho^{(\mp)}\} + E_{\nu\nu'}\Phi^{(\pm)}_{\nu\nu'} - \omega\Phi^{(\mp)}_{\nu\nu'}. \tag{3.8}$$

Для эффективного поля из (2.19) легко получить при этом

$$\mathcal{V}^{(\pm)}(\nu\nu') = V^{(\pm)}_{\nu\nu'}, \quad \overline{\mathcal{V}}^{(\pm)}(\nu\nu') = \overline{V}^{(\pm)}_{\nu\nu'} \pm if_\rho(\nu\nu')K_\rho^{(\pm)} \tag{3.8а}$$

(по дважды повторяющимся индексам σ, ρ везде понимается суммирование).

Величины $K^{(\pm)}$ — решения системы (3.7) — имеют полюса при значениях ω, равных собственным энергиям системы. Члены, не содержащие $K^{(\pm)}$ в (3.8), не имеют полюсов и поэтому не дают вклада в вероятность перехода (2.20). Сохраняя в (3.8) только члены с $K^{(\pm)}$, получаем

$$\sum_{\nu\nu'}\{\Phi^{(+)}_{\nu'\nu}Z^{(+)}(\nu\nu') - \Phi^{(-)}_{\nu'\nu}Z^{(-)}(\nu\nu')\} =$$

$$= K_\sigma^{(+)}\sum_{\nu\nu'}\frac{f_\sigma(\nu\nu')\xi^{(+)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}\{E_{\nu\nu'}\Phi^{(+)}_{\nu'\nu} + \omega\Phi^{(-)}_{\nu'\nu}\} -$$

$$- K_\sigma^{(-)}\sum_{\nu\nu'}\frac{f_\sigma(\nu\nu')\xi^{(-)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}\{E_{\nu\nu'}\Phi^{(-)}_{\nu'\nu} + \omega\Phi^{(+)}_{\nu'\nu}\},$$

что с учетом (3.7в) и (2.17) можно записать как

$$-\frac{1}{G}(K_{\sigma}^{(+)}L_\sigma^{(+)*} + K_\sigma^{(-)}L_\sigma^{(-)*}).$$

В результате из (2.20) находим для вероятности перехода

$$|(\omega_n|V|0)|^2 = \left[\frac{\omega_n^2-\omega^2}{G\omega_n}(K_\sigma^{(+)}L_\sigma^{(+)*} + K_\sigma^{(-)}L_\sigma^{(-)*})\right]_{\omega^2=\omega_n^2}. \tag{3.9}$$

Прежде чем переходить к решению уравнения (3.7), сделаем некоторые преобразования и упрощения. Воспользуемся соотношением (3.6) и исключим $\delta_{\sigma\rho}$ из первого члена (3.7а). В результате простых преобразований получаем

$$\delta_{\sigma\rho} - G\sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}\xi^{(\pm)2}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu') = g_{\sigma\rho} - (\omega^2 - 2\Delta^2 \mp 2\Delta^2) h_{\sigma\rho}, \quad (3.10а)$$

где введены обозначения

$$g_{\sigma\rho} = G\sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'})^2}{4E_\nu E_{\nu'}(E^2_{\nu\nu'} - \omega^2)} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu'), \quad (3.10б)$$

$$h_{\sigma\rho} = G\sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}}{4E_\nu E_{\nu'}(E^2_{\nu\nu'} - \omega^2)} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu'). \quad (3.10в)$$

Система (3.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \{g_{\sigma\rho} - (\omega^2 - 4\Delta^2) h_{\sigma\rho}\} K_\rho^{(+)} + r_{\sigma\rho} K_\rho^{(-)} &= L_\sigma^{(+)}, \\ r_{\sigma\rho} K_\rho^{(+)} + \{g_{\sigma\rho} - \omega^2 h_{\sigma\rho}\} K_\rho^{(-)} &= L_\sigma^{(-)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где в дополнение к (3.10) введено обозначение

$$r_{\sigma\rho} = G\sum_{\nu\nu'} \frac{\omega \xi^{(+)}_{\nu\nu'} \xi^{(-)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu'). \quad (3.11а)$$

4. Анализ основных уравнений

Нас будут интересовать возбуждения с моментом и четностью 0^+. Для этой цели достаточно рассматривать в качестве f_σ функции только $\mathbf{r}^2$, для которых отличны от нуля матричные элементы двух типов: либо диагональные, либо между достаточно удаленными состояниями (отличающимися значениями главного квантового числа не менее чем на две единицы), причем величина тех и других матричных элементов одного порядка. Для низкоэнергетических возбуждений ($\omega^2 \lesssim E^2$) в суммах (3.10в) и (3.11а) далекими переходами можно пренебречь, тогда как в (3.10б) дают вклад только далекие переходы и здесь можно пренебречь ω^2. Кроме того, в (3.10б) суммирование проводится по широкому интервалу и матричные элементы от различных функций $f_\sigma f_\rho$ в среднем погашают друг друга. Таким образом, приближенно можно положить

$$g_{\sigma\rho} \approx \delta_{\sigma\rho} G\sum_{\nu\nu'} \frac{(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'})^2}{4E_\nu E_{\nu'} E_{\nu\nu'}} |f_\sigma(\nu\nu')|^2, \quad (4.1а)$$

$$h_{\sigma\rho} \approx G\sum_\nu \frac{f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu)}{E_{\nu\nu}(E_{\nu\nu}{}^2 - \omega^2)}, \quad (4.1б)$$

$$r_{\sigma\rho} \approx G\sum_\nu \frac{2\varepsilon_\nu \omega}{E_{\nu\nu}(E_{\nu\nu}{}^2 - \omega^2)} f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu). \quad (4.1в)$$

Для грубой оценки $g_{\sigma\rho}$ заменим в (4.1а) величину $(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu'})^2$ на $E_{\nu\nu'}{}^2$ (при этом завышается вклад переходов между состояниями, лежащими по одну сторону границы Ферми). После этого сумма будет отличаться от (3.6) только отсутствием диагональных членов. В результате

$$g_{\sigma\sigma} \equiv g_\sigma \lesssim 1 - G \sum_\nu \frac{1}{2E_\nu} |f_\sigma(\nu\nu)|^2 \equiv 1 - \overline{f_{\sigma D}^2}, \tag{4.1г}$$

где $\overline{f_{\sigma D}^2}$ имеет смысл среднего квадрата диагональных матричных элементов. Если перенумеровать функции f_σ в порядке уменьшения плавности, начиная с $f_0 = 1$ (например, по числу узлов внутри ядра), то

$$0 = g_0 < g_1 < g_2 < \ldots < 1.$$

Правые части (3.10в) и (3.6) имеют вид средних от $f_\sigma f_\rho$, но с различными весами. В (3.6) суммирование идет по широкому интервалу, что обеспечивает ортонормированность функций f_σ. В (3.10в) и (3.11а) эффективная область суммирования значительно меньше ($\sim\Delta$) и зависит от ω^2. При предельной хаотичности одночастичных уровней $f_\sigma f_\rho$ будут усредняться уже на интервале $\sim\Delta$, и в этом случае $h_{\sigma\rho} \sim \delta_{\sigma\rho}$. Для реальных деформированных ядер следует ожидать лишь частичного погашения недиагональных $h_{\sigma\rho}$. В сферических ядрах диагональные и недиагональные элементы могут быть одного порядка.

Для деформированных ядер можно использовать квазиклассическое приближение, заменив суммы (4.1) интегралами. Так, в (4.1б) весовой множитель быстро убывает при удалении от границы Ферми на расстояния, большие Δ, поэтому можно произвести замену

$$\frac{1}{E_{\nu\nu}(E_{\nu\nu}^2 - \omega^2)} \to \frac{1}{4\Delta^2} \gamma\left(\frac{\omega}{2\Delta}\right) \delta(\varepsilon),$$

где функция $\gamma(x)$ при $x^2 < 1$ имеет вид

$$\gamma(x) = \frac{\arcsin x}{x(1-x^2)^{1/2}}.$$

В результате

$$h_{\sigma\rho} \approx \frac{G\rho_0}{(2\Delta)^2} \gamma\left(\frac{\omega}{2\Delta}\right) \overline{f_{\sigma D} f_{\rho D}}. \tag{4.2}$$

Здесь ρ_0 — плотность уровней у границы Ферми, а $\overline{f_{\sigma D} f_{\rho D}}$ — среднее значение (на ширине $\sim\Delta$ у границы Ферми) диагональных матричных элементов.

Перейдем к оценке (4.1а). Величина $\xi_{\nu\nu'}^{(+)}$, как видно из ее определения в (2.16), меняет знак при взаимной замене частичных и дырочных состояний ($u \leftrightarrow v$). Поэтому при симметричном относительно границы Ферми расположении одночастичных уровней (и величин матричных элементов) суммы, содержащие первые степени $\xi^{(+)}$, обращаются в нуль. В реальных случаях указанные суммы, как правило, оказываются очень малыми.

Если полностью пренебречь суммами от линейных по $\xi^{(+)}$ выражений, то (3.11) распадется на две независимых системы уравнений для $K^{(+)}$ и $K^{(-)}$. Соответствующие ветви возбуждения будем условно называть T-четными и T-нечетными (сохранив эти названия и для случая слабого перемешивания, когда $r_{\sigma\rho} \neq 0$, но мало).

Для полукачественного анализа решений (3.11) рассмотрим случай, когда недиагональными элементами $g_{\sigma\rho}$, $h_{\sigma\rho}$, $r_{\sigma\rho}$ можно пренебречь. Кроме того, мы сохраним лишь первые степени малых величин $r_{\sigma\sigma}$. В результате для решений (3.11) находим

$$\begin{aligned} K_\sigma^{(+)} &\approx \frac{1}{g_\sigma - (\omega^2 - 4\Delta^2) h_\sigma} \left[L_\sigma^{(+)} - \frac{r_\sigma}{g_\sigma - \omega^2 h_\sigma} L_\sigma^{(-)} \right], \\ K_\sigma^{(-)} &\approx \frac{1}{g_\sigma - \omega^2 h_\sigma} \left[L_\sigma^{(-)} - \frac{r_\sigma}{g_\sigma - (\omega^2 - 4\Delta^2) h_\sigma} L_\sigma^{(+)} \right], \end{aligned} \tag{4.3}$$

где для сокращения диагональные элементы $g_{\sigma\sigma}$, $h_{\sigma\sigma}$, $r_{\sigma\sigma}$ обозначены g_σ, h_σ, r_σ (в данном случае индекс σ нумерует также ветви возбуждений).

Энергии возбужденных состояний определяются для T-четных и T-нечетных ветвей соответственно из уравнений

$$\omega^2 - 4\Delta^2 = \frac{g_\sigma}{h_\sigma}, \tag{4.4а}$$

$$\omega^2 = \frac{g_\sigma}{h_\sigma}. \tag{4.4б}$$

Наинизшее значение ω^2 получается для $\sigma = 0$. Соответствующая T-четная ветвь имеет энергию $\omega_0^2 = 4\Delta^2$ $(g_0 = 0)$ [5]. Что касается аналогичного T-нечетного решения $\omega_0^2 = 0$, то оно не соответствует какому-либо физическому возбуждению, а отражает лишь факт несохранения числа частиц в принятом методе учета куперовского спаривания («ду́ховое состояние»). Физическим T-нечетным возбуждениям соответствуют решения с $\sigma \geqslant 1$.

Исследуем теперь энергетический спектр возбуждений с $\sigma \geqslant 1$. Рассмотрим поведение правой части (4.4) при изменениях ω^2. Как следует из (4.1б), величина h_σ положительна при $\omega^2 < \min E_{\nu\nu}{}^2$, в точках $\omega^2 = E_{\nu\nu}{}^2$ обращается в бесконечность, а в каждом промежутке между соседними $E_{\nu\nu}{}^2$ проходит через нуль. Таким образом, для каждого $\sigma \geqslant 1$ уравнения (4.4) определяют целый спектр возбуждений. Причем, для T-четных состояний спектр начинается выше 2Δ, а нижнее состояние T-нечетного спектра лежит ниже границы двухквазичастичных возбуждений $(\min \omega_\sigma < \min E_{\nu\nu})$.

Используя квазиклассическое приближение (4.2), для нижнего T-нечетного состояния находим

$$x^2\gamma(x) = \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{g}{G\rho_0 \overline{f_D{}^2}} \equiv B, \qquad x = \frac{\omega}{2\Delta}. \tag{4.5}$$

Решение этого секулярного уравнения очевидно дает $\omega < 2\Delta$ $(x < 1)$.

5. Вероятность переходов

Вблизи соответствующих полюсов величины (4.3) имеют следующий вид (здесь и ниже верхний знак — для T-четных, нижний — для T-нечетных ветвей):

$$\begin{aligned} K_\sigma^{(\pm)} &\approx \frac{1}{\omega_\sigma{}^2 - \omega^2}\frac{1}{h_\sigma\Lambda_\sigma}\left\{L_\sigma^{(+)} \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} L_\sigma^{(-)}\right\}, \\ K_\sigma^{(\mp)} &\approx \frac{1}{\omega_\sigma{}^2 - \omega^2}\frac{1}{h_\sigma\Lambda_\sigma}\frac{\pm r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} L_\sigma^{(+)}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь

$$\Lambda_\sigma = 1 - \frac{d}{d\omega^2}\left(\frac{g_\sigma}{h_\sigma}\right), \tag{5.2}$$

и все величины, определяющие вычеты, берутся при значении $\omega^2 = \omega_\sigma{}^2$. (Подчеркнем, что ω_σ, а следовательно, и все зависящие от ω^2 величины, вообще говоря, различны для T-четных и T-нечетных ветвей.)

В рассмотренном выше приближении для амплитуды перехода под действием внешнего поля находим из (3.9)

$$|(\omega_\sigma{}^{\pm}|V|0)|^2 = S_\sigma{}^2\left\{|L_\sigma^{(\pm)}|^2 \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\left(L_\sigma^{(+)*} L_\sigma^{(-)} + L_\sigma^{(-)*} L_\sigma^{(+)}\right)\right\} \approx$$

[5] Возбуждения этого типа подробно исследовались Бесом и Броглиа [2] и были названы ими парными колебаниями.

$$\approx S_\sigma{}^2 \left| L_\sigma^{(\pm)} \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} L_\sigma^{(\mp)} \right|^2, \tag{5.3}$$

$$S_\sigma = (G\omega_\sigma h_\sigma \Lambda_\sigma)^{-1/2}. \tag{5.4}$$

Отсюда с учетом (3.7в) (с точностью до произвольной фазы) получаем

$$(\omega_\sigma + | V | 0) = iS_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{f_\sigma(\nu'\nu)}{E^2_{\nu\nu'} - \omega_\sigma^2} \left\{ \left(E_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} \omega_\sigma \xi_{\nu\nu'}^{(\mp)} \right) \Phi_{\nu\nu'}^{(\pm)} - \right.$$

$$\left. - \left(\omega_\sigma \xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} E_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}^{(\mp)} \right) \Phi_{\nu\nu'}^{(\mp)} \right\}. \tag{5.5}$$

Рассмотрим более детально вероятность возбуждения найденных состояний конкретными внешними полями. Мы ограничимся двумя практически интересными случаями, рассмотрев электромагнитные переходы в основное состояние (имея в виду $E0$-переходы, т. е. T-четное поле $V^{(+)}$) и возбуждение данного состояния при двойном срыве ((t, p)-реакция, поле $\bar{V}$, меняющее число частиц на две).

$E0$-переходы в основное состояние. Соответствующая амплитуда дается выражениями (5.5) и (2.17). Учитывая только поле $V^{(+)}$, найдем для T-четных состояний

$$(\omega_\sigma^+ | V | 0) = -S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{\overset{(+)}{\eta}_{\nu\nu'} f_\sigma(\nu'\nu) V_{\nu\nu'}^{(+)}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2} \left[E_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}^{(+)} - \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} \omega_\sigma \xi_{\nu\nu'}^{(-)} \right] \tag{5.6}$$

и соответственно для T-нечетных состояний

$$(\omega_\sigma^- | V | 0) = S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{\overset{(+)}{\eta}_{\nu\nu'} f_\sigma(\nu'\nu) V_{\nu\nu'}^{(+)}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2} \left[\omega_\sigma \xi_{\nu\nu'}^{(-)} + \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} E_{\nu\nu'} \overset{(+)}{\xi}_{\nu\nu'} \right]. \tag{5.7}$$

Амплитуды (5.6) и (5.7) определяются двумя различными суммами по одночастичным состояниям от произведения матричных элементов f_σ и $V^{(+)}$. Пренебрегая в них далекими переходами и представляя внешнее поле в виде разложения

$$V^{(+)} = \sum_\rho v_\rho^{(+)} f_\rho, \tag{5.8}$$

получаем следующие оценки:

$$G \sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'} \overset{(+)}{\eta}_{\nu\nu'} \overset{(+)}{\xi}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega_\sigma^2} f_\sigma(\nu'\nu) V_{\nu\nu'}^{(+)} \approx$$

$$\approx \sum_\rho v_\rho^{(+)} G \sum_\nu \frac{4\Delta\varepsilon_\nu}{E_{\nu\nu}(E_{\nu\nu}{}^2 - \omega_\sigma^2)} f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu) \approx \sum_\rho \frac{2\Delta}{\omega_\sigma} r_{\sigma\rho} v_\rho^{(+)},$$

$$G \sum_{\nu\nu'} \frac{\overset{(+)}{\eta}_{\nu\nu'} \overset{(-)}{\xi}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega_\sigma^2} f_\sigma(\nu'\nu) V_{\nu\nu'}^{(+)} \approx$$

$$\approx \sum_\rho v_\rho^{(+)} G \sum_\nu \frac{2\Delta f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu)}{E_{\nu\nu}(E_{\nu\nu}{}^2 - \omega_\sigma^2)} \approx 2\Delta \sum_\rho h_{\sigma\rho} v_\rho^{(+)}.$$

Следуя принятому выше приближению и сохраняя лишь диагональные члены в $h_{\sigma\rho}$, $r_{\sigma\rho}$ (и при этом только первые степени $r_{\sigma\sigma}$), получаем, используя (4.4),

$$(\omega_\sigma^+|V|0) \approx v_\sigma^{(+)} g_\sigma S_\sigma \frac{2\Delta}{\omega_\sigma} \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}, \qquad (5.9а)$$

$$(\omega_\sigma^-|V|0) \approx v_\sigma{}^+ g_\sigma S_\sigma \frac{2\Delta}{\omega_\sigma}. \qquad (5.9б)$$

Из (5.9) видно, что вероятность перехода из T-четного состояния, по сравнению с аналогичным переходом из T-нечетного, содержит фактор запрета $(r_\sigma / 4\Delta^2 h_\sigma)^2$.

Возбуждение при (t, p)-реакции. Оператор, вызывающий переход в этом случае, можно представить в виде

$$V = 2\sum_{\nu'\nu} \overline{V}_{\nu'\nu} a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\nu'}^{+}, \qquad (5.10)$$

что в обозначениях, принятых в (2.4), эквивалентно условию $\overline{V}^{(+)} = \overline{V}^{(-)} = \overline{V}$, $V^{(\pm)} = 0$. Из (5.4) и (2.17) при этом следует

$$(\omega_\sigma^\pm|\overline{V}|0) = \pm S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{f_\sigma(\nu'\nu)\overline{V}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega_\sigma^2} \Big\{ E_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}^{(\pm)\,2} \mp$$

$$\mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} E_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}^{(\pm)2} + \left(1 \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\right) \omega_\sigma \xi_{\nu\nu'}^{(+)} \xi_{\nu\nu'}^{(-)} \Big\}. \qquad (5.11)$$

Разлагая $\overline{V}$ по функциям f_ρ аналогично (5.8) (с коэффициентами $\bar{v}_\rho$), приведем суммы по одночастичным состояниям в (5.11) к уже известным выражениям (см. (3.10), (3.11а)). Производя затем обычные приближения и используя (4.4), находим

$$(\omega_\sigma^\pm|\overline{V}|0) = \pm \bar{v}_\sigma S_\sigma \left(1 \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\right). \qquad (5.12)$$

Из (5.12) видно, что, в отличие от электромагнитных переходов, вероятность возбуждения T-четных и T-нечетных состояний при (t, p)-реакции одного порядка.

Переход в основное состояние конечного ядра при (t, p)-реакции определяется средним значением (5.10) по квазичастичному вакууму

$$(0|\overline{V}|0) = 2\sum_\nu \overline{V}_{\nu\nu} u_\nu v_\nu = \sum_\nu \overline{V}_{\nu\nu} \frac{\Delta}{E_\nu}. \qquad (5.13)$$

Вследствие условия ортогональности (3.6) в (5.13) дает вклад только нулевая компонента разложения $\overline{V}$ по f_σ. В результате

$$(0|\overline{V}|0) = \bar{v}_0 \frac{2\Delta}{G}. \qquad (5.14)$$

Из (5.12) и (5.14) находим относительную вероятность перехода в возбужденное и основное состояния при (t, p)-реакции:

$$\left| \frac{(\omega_\sigma^\pm|\overline{V}|0)}{(0|\overline{V}|0)} \right|^2 \approx \left(\frac{\bar{v}_\sigma}{\bar{v}_0}\right)^2 \left(\frac{G S_\sigma}{2\Delta}\right)^2 \left\{1 \mp \frac{r_\sigma}{2\Delta^2 h_\sigma}\right\}. \qquad (5.15)$$

Полученные общие формулы применим к конкретному случаю нижних состояний каждой ветви.

Для T-четной ветви наинизшему возбуждению ($\sigma = 0$) соответствуют значения параметров (см. (4.1) и (5.4))

$$f = 1, \quad g = 0, \quad \omega = 2\Delta, \quad \Lambda = 1,$$

$$h = G\sum_\nu \frac{1}{8E_\nu \varepsilon_\nu^2}, \qquad r = G\sum_\nu \frac{\Delta}{2E_\nu \varepsilon_\nu}, \qquad S = \frac{2}{G}\left(\sum_\nu \frac{\Delta}{E_\nu \varepsilon_\nu^2}\right)^{-1/2}. \qquad (5.16)$$

Из (5.15) и (5.16) находим (малой величиной r пренебрегаем)

$$\left| \frac{(\omega^{\pm}|\overline{V}|0)}{(0|\overline{V}|0)} \right|^2 \approx \left(\sum_{\nu} \frac{\Delta^3}{E_\nu \varepsilon_\nu^2} \right)^{-1} \sim \frac{1}{(\rho_0 \Delta)^2}. \tag{5.17}$$

Для деформированных ядер $\rho_0\Delta \sim 4-5$, поэтому сечение возбуждения данного состояния при (t, p)-реакции на порядок ниже, чем для перехода в основное состояние.

Амплитуда $E0$-перехода из наинизшего T-четного состояния, как следует из (5.9а), равна нулю в рассматриваемом приближении ($g_0 = 0$).

Для наинизшего T-нечетного уровня ($\sigma = 1$), к сожалению, нельзя получить столь простых оценок без дополнительных упрощений. Мы ограничимся квазиклассическим приближением (4.2). Используя секулярное уравнение (4.5), находим (при $\omega^2 = \omega_1^2$)

$$\begin{gathered} h = \frac{g}{\omega^2}, \quad h' \approx \frac{g}{32\Delta^4 B} \frac{(1+2B)x^2 - B}{x^4(1-x^2)}, \\ \Lambda = \frac{B + x^2}{2B(1-x^2)}, \quad S = \left[\frac{4\Delta B}{Gg} \frac{x(1-x^2)}{B+x^2} \right]^{1/2}, \end{gathered} \tag{5.18}$$

где, как и в (4.5), $x = \omega / 2\Delta$; $B = g / G\rho_0\overline{f_D^2}$. Из (5.18) и (5.15) следует

$$\left| \frac{(\omega^{-}|\overline{V}|0)}{(0|\overline{V}|0)} \right|^2 \approx \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_0} \right)^2 \frac{1}{\rho_0 \Delta \overline{f_D^2}} \frac{x(1-x^2)}{B+x^2}. \tag{5.19}$$

Численную оценку (5.19) можно сделать лишь после решения трансцендентного уравнения (4.5). Мы ограничимся двумя предельными случаями, допускающими аналитическое решение.

Случай $B \ll 1$. В этом случае $x^2 \approx B$ и последний множитель в (5.19) оказывается равным

$$\frac{x(1-x^2)}{B+x^2} \approx \frac{1}{2\sqrt{B}} \gg 1. \tag{5.20а}$$

Случай $B \gg 1$. При этом $x^2 \approx 1 - \pi^2/4B^2$ и

$$\frac{x(1-x^2)}{B+x^2} \approx \frac{\pi^2}{4B^3} \ll 1. \tag{5.20б}$$

Из (5.20) вытекает, что отношение (5.19) при вариации параметра B может меняться в широких пределах. Практически величина B — порядка единицы, поэтому сечение возбуждения состояния $\sigma = 1$ заметно меньше сечения с переходом в основное состояние.

Рассмотрим вероятность $E0$-перехода в основное состояние. Из (5.9б) и (5.18) имеем

$$|(\omega_1 - |V|0)|^2 \approx |v_1^{(+)}|^2 \cdot 4\rho_0 \Delta \overline{f_D^2} \frac{B^2(1-x^2)}{x(B+x^2)}. \tag{5.21}$$

В двух рассмотренных выше предельных случаях последний множитель в (5.21) мал:

$$\frac{B^2(1-x^2)}{x(B+x^2)} \approx \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{B}, & B \ll 1 \\ \dfrac{\pi^2}{4B}, & B \gg 1 \end{cases} \tag{5.22}$$

Однако для $B \sim 1$ величина (5.21) может достигать (или даже превосходить) единицу. Это означает, что амплитуда $E0$-перехода из T-нечетного состояния в основное не содержит каких-либо факторов запрета и может достигать R^2 (R — радиус ядра).

Формула (5.5), следствия которой мы рассматривали в этом разделе, позволяет вычислять переходы только из данного состояния в основное. Вероятность перехода в другие возбужденные состояния (например, $E2$-переходы в первый уровень 2^+ вращательного мультиплета основного состояния, или γ-вибрационную полосу) можно вычислить, имея явное выражение для оператора фонона (см. следующий раздел).

6. Природа T-четных и T-нечетных возбуждений

Природу возбужденных состояний можно непосредственно усмотреть из вида соответствующего фононо-порождающего оператора. Сравнивая выражения (5.5) и (2.25), находим коэффициенты, определяющие оператор фонона:

$$A_\sigma^{(\pm)}(\nu'\nu) = \pm\frac{1}{2}S_\sigma G\frac{f_\sigma(\nu'\nu)}{E^2_{\nu\nu'}-\omega_\sigma^2}\left[E_{\nu\nu'}\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\omega_\sigma\xi^{(\mp)}_{\nu\nu'}\right],$$
$$A_\sigma^{(\mp)}(\nu'\nu) = \pm\frac{1}{2}S_\sigma G\frac{f_\sigma(\nu'\nu)}{E^2_{\nu\nu'}-\omega_\sigma^2}\left[\omega_\sigma\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}E_{\nu\nu'}\xi^{(\mp)}_{\nu\nu'}\right]. \qquad (6.1)$$

Подставляя (6.1) в (2.26), получаем разложение оператора фонона по квазичастичным операторам:

$$\mathfrak{A}_\sigma = \pm\frac{1}{2}S_\sigma G\sum_{\nu\nu'}f_\sigma(\nu'\nu)\left\{\frac{1}{E_{\nu\nu'}-\omega_\sigma}\left(\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\xi^{(\mp)}_{\nu\nu'}\right)\alpha_\nu\alpha_{\tilde{\nu}'} \mp \right.$$
$$\left. \mp\frac{1}{E_{\nu\nu'}+\omega_\sigma}\left(\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'} \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\xi^{(\mp)}_{\nu\nu'}\right)\alpha^+_{\tilde{\nu}}\alpha^+_{\nu'}\right\}. \qquad (6.2)$$

Пренебрегая для простоты анализа малыми членами $\sim r_\sigma$ и используя (2.16), имеем

$$\mathfrak{A}_\sigma = \pm\frac{1}{2}S_\sigma G\sum_{\nu\nu'}f_\sigma(\nu'\nu)\,(u_\nu u_{\nu'} \mp v_\nu v_{\nu'})\left\{\frac{\alpha_\nu\alpha_{\tilde{\nu}'}}{E_{\nu\nu'}-\omega_\sigma} \mp \frac{\alpha^+_{\tilde{\nu}}\alpha^+_{\nu'}}{E_{\nu\nu'}+\omega_\sigma}\right\}. \qquad (6.3)$$

Из (6.3) видно, что в фононный оператор набирается из широкой области квазичастичных состояний, вклад которых при удалении от границы Ферми спадает медленно ($\sim E^{-1}$). При этом вклады частичных и дырочных состояний в T-четный фонон имеют противоположные знаки, а в T-нечетный — одинаковые. Таким образом, с «микроскопической» точки зрения механизм найденных возбуждений состоит в когерентных переходах квазичастичных пар между уровнями в широкой области около границы Ферми.

С макроскопической точки зрения коллективные колебания можно характеризовать эффективным полем, возникающим в системе в ответ на внешнее воздействие. Как видно из (3.8а), внешнее поле обычного вида ($V^{(\pm)}$) проникает в систему без искажений[6], а поле, меняющее число частиц $\bar{V}^{(\pm)}$, вызывает соответствующую поляризацию в системе. Характер этой поляризации очевиден: на фоне однородного спаривания ($\Delta = \text{const}$) возникают флуктуации $\Delta(\mathbf{r})$, пространственные распределения которых определяются функциями $f_\sigma(\mathbf{r})$. Несмотря на одинаковое пространственное распределение, T-четные и T-нечетные возбуждения формируются по-разному, что и приводит к резкому различию их свойств (слабые $E0$-переходы в основное состояние для T-четных и сильные — для T-нечетных состояний).

[6] Этот результат является следствием пренебрежения взаимодействием в канале частица — дырка. При его учете возникают также искажения $V^{(\pm)}$, однако они не играют принципиальной роли.

Выше мы нигде не конкретизировали вид функций $f_\sigma(\mathbf{r})$, определенных лишь условием ортонормировки (3.6). В принципе можно использовать различные полные наборы функций, которые будут менять коэффициенты уравнений (3.11), но не их решения (это справедливо, естественно, для точных решений, но не для приближенных (4.3)). Разумно использовать в качестве f_σ полиномы по r^2, для которых найдем

$$f_0 = 1, \quad f_1 = [\overline{r^4} - (\overline{r^2})^2]^{-1/2}(r^2 - \overline{r^2}), \ldots, \qquad (6.4)$$

где черта означает обычное усреднение (3.6′) по объему ядра [7]

$$(\overline{r^2} = {}^3/_5 R^2, \ \overline{r^4} = {}^3/_7 R^4, \ldots).$$

В этой работе мы имеем в виду в основном деформированные ядра, однако рассмотренные возбуждения могут осуществляться и в сферических ядрах, но из-за специфических условий этот случай требует дополнительных исследований и более аккуратных оценок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод условия градиентной инвариантности взаимодействия (3.3)

В матричном представлении типа (2.2) малое градиентное преобразование имеет вид

$$\Psi \to (1 - i\beta\hat{\phi})\Psi, \qquad (\text{П}.1)$$

где $\hat{\phi} = \phi(\mathbf{r})\sigma^z$. Условие инвариантности взаимодействия относительно (П.1) принимает вид

$$\hat{G}_{12}(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) - (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2)\hat{G}_{12} = 0. \qquad (\text{П}.2)$$

Умножаем (П.2) на матрицу плотности $\hat{\rho}_2{}^0$ и берем шпур по переменной 2:

$$\mathrm{Tr}_2\{\hat{G}_{12}\hat{\rho}_2{}^0\}\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_1 \mathrm{Tr}_2\{\hat{G}_{12}\hat{\rho}_2{}^0\} = \mathrm{Tr}_2\{\hat{G}_{12}(\hat{\rho}_2{}^0\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2\hat{\rho}_2{}^0)\}. \qquad (\text{П}.3)$$

Воспользуемся теперь выражением для самосогласованного гамильтониана $\hat{S}^0$ (см. работу [4], формулу (2.21)):

$$\hat{S}_1{}^0 = \hat{\mathscr{E}}_1 - \mathrm{Tr}_2\{\hat{G}_{12}\hat{\rho}_2{}^0\} \qquad (\text{П}.4)$$

(здесь $\hat{\mathscr{E}} = \mathscr{E}\sigma^z$ — кинетическая энергия). Из (П.3) и (П.4) получаем

$$\mathrm{Tr}_2\{\hat{G}_{12}(\hat{\rho}_2{}^0\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2\hat{\rho}_2{}^0)\} = (\hat{\phi}_1\hat{S}_1{}^0 - \hat{S}_1{}^0\hat{\phi}_1) - (\hat{\phi}_1\hat{\mathscr{E}}_1 - \hat{\mathscr{E}}_1\hat{\phi}_1). \qquad (\text{П}.5)$$

Рассмотрим матричную структуру (П.5). Так как $\hat{\phi}$, $\hat{\mathscr{E}} \sim \sigma^z$, а T-четные величины $\hat{S}^0$ и $\hat{\rho}^0$ содержат только члены с σ^z и σ^y (см. (2.10)), то второй член правой части (П.5) пропорционален единичной матрице, а первый содержит, кроме того, член $\sim \sigma^x$. Таким образом, (П.5) эквивалентно двум независимым соотношениям. Члены $\sim \sigma^x$ в (П.5) согласно (2.10) имеют вид

$$\mathrm{Tr}_2\{(\phi_2 G_{12}{}^x + G_{12}{}^x\phi_2)\sigma_x{}^y\rho_2{}^0\} = \phi_1\Delta_1 + \Delta_1\phi_1, \qquad (\text{П}.6)$$

где введено обозначение $G_{12}{}^x\sigma_1{}^x\sigma_2{}^x$ для соответствующего члена во взаимодействии $\hat{G}_{12}$. Заметим, что (см. формулы (2.33) и (2.4) работы [4])

$$\langle 12|G_{12}{}^x|2'1'\rangle = {}^1/_2\langle 1\widetilde{1'}|G|\widetilde{2}2'\rangle. \qquad (\text{П}.7)$$

---

[7] К сожалению, использование осцилляторной модели (или модели Нильссона) для расчетов с функциями (6.4) из-за случайного вырождения (матричные элементы от r^2 в этих моделях не зависят от l) недопустимо.

Для постоянного спаривания ($\Delta = \text{const}$), подставляя в (П.6)

$$\hat{\rho}^0 = \frac{\varepsilon}{E}\sigma^z - \frac{\Delta}{E}\sigma^y, \tag{П.8}$$

после очевидных преобразований находим

$$\sum_2 \langle 2|\phi_2^2 G_{12}^x + G_{12}^x \phi_2|2\rangle \frac{1}{E_2} = -\phi_1, \tag{П.9}$$

откуда с учетом (П.7) следует (3.3).

Заметим, что требование сохранения тока частиц в произвольном внешнем поле $V(\mathbf{r})$ приводит вместо (П.5) к уравнению

$$\mathrm{Tr}_1 \{\hat{\rho}_1^{(1)} [\mathrm{Tr}_2 \{\hat{G}_{12} (\hat{\rho}_2^c \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2 \hat{\rho}_2^v)\} - (\hat{\phi}_1 \hat{S}_1^0 - \hat{S}_1^0 \hat{\phi}_1) + (\hat{\phi}_1 \hat{\mathscr{E}}_1 - \hat{\mathscr{E}}_1 \hat{\phi}_1)]\} = 0. \tag{П. 10}$$

Литература

[1] A. Bohr. Cong. Intern. de Phys. Nucl., Paris, 1964. Ed. Centre National de la Recherche Scientifique, 1, 1965, p. 487.
[2] D. R. Bés, R. A. Broglia. Preprint NORDITA, sept., 1965.
[3] S. T. Belyaev. «Selected Topics in Nuclear Theory», Intern. Atomic Energy Agency Vienna, 1963.
[4] S. T. Belyaev. Nucl. Phys., 64, 17, 1965.
[5] А. Б. Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер, Изд. «Наука», 1965.
[6] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 37, 249, 1959; Nucl. Phys., 13, 655, 1959.

COHERENT PAIRING FLUCTUATIONS AND COLLECTIVE 0+-EXCITATIONS OF NUCLEI

S. T. BELYAEV

The collective O+ excitations in nuclei, connected with the interaction in the particle-particle channel are investigated in the framework of the self-consistant time-dependent field method. Two classes of excitations with different time parities were found, both being coherent pairing fluctuations. The T-even branch (predicted earlier by Bohr and Mottelson) is characterized by weak $E0$-transitions to the ground state whereas the T-odd branch has a large $E0$-transition probability. The excitation cross sections in the (t, p)-reaction are considered and they prove to be of the same order of magnitude for both types of branches.