Доклады Академии наук СССР
1967. Том 174, № 6

ДК 531.391.5+533.951.8+538.12.001.24

ФИЗИКА

Б. В. ЧИРИКОВ

ТОХАСТИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СТЕЛЛАРАТОРА

(Представлено академиком Г. И. Будкером 24 VIII 1966)

§ 1. Основной особенностью стеллараторных полей является наличие реднего угла прокручивания силовых линий $\omega(r)$, который обычно завит от (малого) радиуса. Поэтому «поведение» силовых линий в стелларатре аналогично движению нелинейного осциллятора. Вследствие замкнусти стелларатора возмущения имеют период L (периметр стелларатора). аиболее опасными являются резонансные возмущения. Из многочисленых работ по исследованию таких возмущений (см., например, ([1–3])) моет создаться впечатление, что увеличение нелинейности $(d\omega / dr)$ всегда едет к повышению устойчивости. Подобные надежды существовали и на ачальной стадии разработки сильнофокусирующих ускорителей. Хотя елинейность и стабилизирует резонансы, она приводит одновременно к оявлению новых неустойчивостей. Наиболее опасной из них является, о-видимому, так называемая стохастическая неустойчивость ([4–5]). При озникновении ее силовые линии располагаются квазислучайным образом относительно быстро выходят за пределы сепаратрисы.

Применительно к стелларатору стохастические процессы впервые расмотрены Сагдеевым и Заславским. В настоящей работе основное вниматие уделено критерию стохастичности, а также использованию этой неустойчивости для создания ловушки Скорнякова ([2]).

§ 2. Будем исходить из гамильтоновых уравнений «движения» магнитых силовых линий ([6]):

$$ds / dz = 2\varepsilon n s^{n/2} \sin n\theta, \quad \theta = \varphi - \alpha z, \quad s = (r / a)^2,$$
$$d\varphi / dz = \varepsilon n s^{n/2-1} \cos n\theta, \quad \varepsilon a = 4I / caH_z. \tag{1}$$

Здесь n — число заходов винтового поля с шагом $2\pi / \alpha$; a — радиус цилиндра, на котором расположены $2n$ проводников с током I в каждом; H_z — продольное поле; r, φ, z — цилиндрические координаты. Уравнения справедливы при εa, $s \ll 1$. Однако оценки по порядку величины, которые составляют основное содержания работы, справедливы в более широкой области, фактически везде за исключением непосредственной окрестности сепаратрисы. То же замечание относится и к другим сильным неравенствам в этой работе.

Уравнения (1) описывают как основное поле стелларатора ($\varepsilon = \mathrm{const}$), так и (постоянные во времени) возмущения (с параметрами ε_1, n_1, α_1). Предположим, что имеется набор коротких ($a \ll l \ll (n_1\alpha_1)^{-1}$) некоррелированных возмущений, т. е. параметры возмущения ε_1, n_1, α_1 постоянны на длине l (длина корреляции) и независимы на соседних участках.

Рассмотрим вначале действие одного такого участка. Вследствие периодичности возмущения система может быть описана разностными уравнениями

$$s_{N+1} = s_N\left(1 + \frac{2}{n_1}\xi_N \sin\psi_N\right),$$
$$\psi_{N+1} = \psi_N + \alpha L_1 \omega(s_{N+1}) + \xi_N \cos\psi_N, \tag{2}$$
$$L_1 = n_1 L, \quad \psi_N = n_1\varphi_N, \quad \xi_N = \varepsilon_1 n_1^2 l s_N^{n_1/2-1},$$

где N — номер оборота вокруг стелларатора; s_N, ψ_N — координаты силовой линии в зоне возмущения, причем магнитная поверхность считается цилиндрической ($s = \text{const}$). Уравнения (2) получены непосредственным интегрированием (1) для короткого возмущения, член $\alpha L_1 \omega$ описывает среднее прокручивание силовой линии в невозмущенной области.

§ 3. Поведение решения (2) качественно зависит от параметра растяжения фазы ($\xi \ll 1$):

$$K = d(\psi_{N+1} - \psi_N) / d\psi_N = \Omega_\phi^2 \cos \psi_N,$$
$$\Omega_\phi^2 = 2\alpha L s \omega' \xi, \quad \omega' \equiv d\omega(s) / ds.$$

$$\omega' \equiv d\omega(s) / ds. \tag{3}$$

При $|K| \ll 1$ разностные уравнения (2) могут быть заменены дифференциальными

$$\dot{s} = \frac{2}{n_1} s \xi \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \alpha L_1 (\omega - \omega_p) + \xi \cos \psi, \tag{4}$$

где $\omega_p = 2\pi m / \alpha L_1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — резонансные значения ω ([3]) *; точка обозначает дифференцирование по N.

Уравнения (4) описывают нелинейный резонанс. При достаточно малом ξ (6) s совершает колебания с амплитудой ([8])

$$\Delta s / s \sim \sqrt{\xi / \alpha L s \omega'}. \tag{5}$$

Для стабилизации периферического резонанса ($\omega_p \neq 0$) необходимо, чтобы нелинейная расстройка (4) $\alpha L_1 (\omega - \omega_p) \sim \Omega_\phi$ ([8]) превышала ширину резонанса ξ:

$$\xi \lesssim 2\alpha L s \omega' = 2(n-2)\alpha L \omega = 4\pi (n-2) N_л (L), \tag{6}$$

где $N_л(L)$ — число оборотов силовой линии при обходе вокруг стелларатора (число вращения).

Условие стабилизации центрального резонанса ($\omega_p = 0$) получается из (4) аналогичным образом и имеет вид **

$$\xi \lesssim \alpha L_1 \omega = 2\pi n_1 N_л (L). \tag{7}$$

Оценка (7) совпадает с результатами исследования аналогичных резонансов в теории ускорителей ([7], [14]).

§ 4. В обратном предельном случае $\Omega_\phi^2 \gg 1$ переход от разностных уравнений (2) к дифференциальным (4) невозможен, а преобразование (2) является теперь (по отношению к фазе) растяжением почти всюду за исключением узких областей вблизи $\cos \psi = 0$ $(\Delta\psi \sim \Omega_\phi^{-2})$. Если пренебречь этими областями, что с физической точки зрения кажется вполне оправданным, то можно применить результаты работы ([9]), согласно которой динамическая система с растяжением является так называемой **К**-системой ([10]); последняя обладает всеми известными в настоящий момент атрибутами стохастичности: эргодичностью, перемешиванием и положительной колмогоровской энтропией.

Можно подойти к вопросу и несколько иначе. Легко показать, что решение (2) локально неустойчиво в каждой точке при условии:

$$|K| > 4. \tag{8}$$

---

* Резонансы высшего порядка $\omega^{(p)} = [(2\pi m / \alpha L) \pm pn] / (n_1 \pm pn)$; $p = 1, 2, \ldots$ ([1]), содержат дополнительно малый множитель вида $(\frac{\varepsilon}{\alpha} s^{n/2-1})^p$ и могут быть существенны лишь вблизи сепаратрисы.

** Заметим, что центральный резонанс наиболее опасен, так как приводит к разрушению области размером $r \sim \varepsilon_1^{1/(2n-3)}$ (при $n_1 = 1$), в то время как для периферического резонанса $\Delta r \sim \sqrt{\varepsilon_1}$ (5). Это является доводом в пользу выбора двухзаходного винтового поля, для которого $\omega(0) \neq 0$ и может быть выбрано между резонансами.

Термин «локально неустойчиво» означает в данном случае, что харак-ристические числа матрицы линеаризованного преобразования (2) $|\neq 1$ ($\lambda_1\lambda_2 = 1$). При $\Omega_ф{}^2 \gg 1$ это условие выполняется везде кроме х же узких областей $\cos\psi \approx 0$. Если опять-таки пренебречь ими, то из ультатов работ ([11], [12]) приходим к прежнему выводу.

Наконец, еще один подход, связанный с вычислением временных кор-яций, использован в ([13]) для системы, похожей на (2). В ([13]) приведе-также результаты численного интегрирования разностных уравнений, которых следует, что граница стохастичности соответствует $|K| = 4$ огласии с (8).

На основании сказанного определим границу стохастичности оценкой $^2 \sim 4$ или

$$\xi \sim 2 \,/\, \alpha L s \omega' = 1 \,/\, \pi (n-2) N_л(L). \tag{9}$$

авнивая (6) и (9), видим, что допустимое возмущение проходит через ксимум в районе

$$N_л(L) \sim 1 \,/\, 2\pi(n-2), \qquad \xi_{\max} \sim 1. \tag{10}$$

В стохастической области закон «движения» силовых линий носит ычный диффузионный характер и описывается некоторым кинетическим авнением. Простая оценка диффузии может быть получена непосред-венно из (2)

$$\overline{(\Delta s)^2} \sim \frac{\xi^2}{n_1^2} s^2 N. \tag{11}$$

§ 5. Возвращаясь к более общему случаю непрерывного возмущения, короткой длиной корреляции l (§ 2), можем сделать обычную среднеквад-ичную оценку ([14])

$$\xi \sim \varepsilon_1 n_1{}^2 s^{n_1/2-1} \sqrt{lL}. \tag{12}$$

В качестве примера приведем параметры возмущения от смещения про-дников винтового поля на величину δ: $n_1 = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\varepsilon_1 \sim \frac{\varepsilon\delta}{2a}\sqrt{2n}$.

Во избежание недоразумений подчеркнем, что некоррелированность змущений на соседних участках не имеет никакого отношения к стоха-ической неустойчивости, поскольку возмущение точно повторяется через риод L.

§ 6. Стохастическая неустойчивость силовых линий может быть ис-льзована для создания ловушки Скорнякова ([2]), внутри которой имеет-«турбулентная» (стохастическая) область, окруженная «ламинарной» ластью регулярных магнитных поверхностей. Для обычных возмущений 2) величина $\Omega_ф{}^2$ быстро растет с радиусом, так что стохастическая ласть простирается до сепаратрисы, что приводит к нарушению термо-ляции. Эту трудность можно обойти, введя специальную резонансную мотку длины $l\,(\ll L)$, шаг винта которой совпадает с шагом силовой ли-и на некотором радиусе: $\alpha_1 = \alpha\omega(s_1)$. В результате возмущение будет йствовать эффективно лишь в некоторой полосе Δs:

$$\Omega = n_1 \alpha l \omega' \Delta s = 2\pi n_1 (n-2) N_л(l) \Delta s \,/\, s \sim 1. \tag{13}$$

Все прежние соотношения останутся без изменения с новым ξ:

$$\xi = \varepsilon_1 n_1{}^2 s^{n_1/2-1} l f(\Omega), \tag{14}$$

е $f(\Omega)$ — резонансный множитель, который при определенной конструк-и обмотки может убывать с Ω достаточно быстро, например, $f(\Omega) =$ $\exp\{-|\Omega|\}$. Это позволяет надеяться, что внешний «ламинарный» слой дет достаточно надежным.

Анализ оптимальных параметров резонансной обмотки показывает, что $^2 \lesssim 2L \,/\, l$; вместе с оценкой (13) это приводит к необходимости иметь носительно длинный стелларатор, по крайней мере $\pi(n-2) N_л(L) \gtrsim 1$.

Регулировка положения и размера стохастической области может производиться путем изменения токов в основной и резонансной обмотках стелларатора.

§ 7. Смысл ловушки Скорнякова состоит в надежде, что «турбулентная» (стохастическая) область магнитного поля поможет подавить плазменные неустойчивости. Исследование этой проблемы выходит за рамки настоящей работы. Приведем лишь некоторые оценки структуры магнитного поля в стохастической области, которые могут понадобиться в будущих исследованиях плазменных неустойчивостей.

Имеется по меньшей мере три фактора, способствующих подавлению плазменных неустойчивостей в стохастической области:

1. Близкие силовые линии расходятся экспоненциально: $\Delta(z) \sim \exp(hz / L)$ вдоль направления собственного вектора линеаризованного преобразования (2) с $\lambda > 1$. Угол этого направления с азимутом φ равен $\theta_p \approx \xi / \Omega_\phi^2$ и слабо зависит от ψ $(\Delta\theta_p \sim \theta_p / K)$. Скорость расходимости определяется оценкой

$$h = |\overline{\Delta_{N+1} / \Delta_N}| \approx \Omega_\phi^2 |\overline{\cos\psi}| \sim \Omega_\phi^2. \qquad (15)$$

2. При достаточно большом расстоянии между линиями $(\Delta \gtrsim r)$ они начинают «перемешиваться». Это приводит к экспоненциальной релаксации всякой неоднородности по φ и неоднородности по r с размером $\Delta r / r \lesssim \xi$, причем характерное «время» (длина) релаксации $\sim L / h$. На бо́льших расстояниях (по r) идет диффузия с коэффициентом $D \sim (\xi r)^2 / L$ (11), что эквивалентно затуханию на длине $\sim L / (\xi k_\perp r)^2$; $k_\perp$ — радиальная проекция волнового вектора возмущения плазмы.

3. В результате релаксации и диффузии по r могут существенно уменьшаться градиенты плотности и температуры невозмущенной плазмы.

Приношу искреннюю благодарность М. С. Рабиновичу и Р. З. Сагдееву, которые привлекли внимание автора к рассматриваемой проблеме; В. И. Волосову, Г. М. Заславскому, С. С. Моисееву и Ф. А. Цельнику за многочисленные полезные дискуссии и советы, а также В. К. Мельникову за критику.

Поступило
6 IV 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Коврижных, ЖТФ, 32, 526 (1962). [2] Г. В. Скорняков, ЖТФ, 32, 261, 777 (1962). [3] А. П. Попрядухин, Атомная энергия, 18, 96 (1965). [4] M. Hine, Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону, октябрь, 1958. [5] Б. В. Чириков, Атомная энергия, 6, 630 (1959). [6] А. И. Морозов, Л. С. Соловьев, Геометрия магнитного поля, Вопросы теории плазмы, в. 2, 1963. [7] A. Schoch, CERN Report, 57—21 (1958). [8] Б. В. Чириков, ДАН, **125**, 1015 (1959). [9] В. А. Рохлин, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 499 (1961). [10] А. Н. Колмогоров, ДАН, 119, № 5, 861 (1958). [11] Д. В. Аносов, ДАН, 151, 1250 (1963). [12] Я. Г. Синай, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, 15 (1966). [13] Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, ДАН, 159, 306 (1964). [14] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Теория циклических ускорителей, М., 1962.