ВЛИЯНИЕ НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ ДВУМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ЕЕ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

С. С. Моисеев (Новосибирск)

1. Хорошо известно, что в неоднородной плазме появляются новые опасные неустойчивости, связанные с так называемыми дрейфовыми колебаниями (см., например, [1, 2]). Свойства этих неустойчивостей в случае, когда начальная неоднородность плазмы имеет одномерный характер, достаточно хорошо изучены. Однако в реальных условиях не всегда можно свести задачу к одномерной. В качестве примера здесь будет рассмотрена ситуация, характерная для так называемых дрейфово-температурных неустойчивостей (см., например, [3, 4]). Эти неустойчивости часто развиваются при определенном соотношении между начальными градиентами плотности n_0 и температуры T_0. Наиболее опасной из них считается [3]; в настоящее время неустойчивость, развивающаяся при $d \lg T_0 / d \lg n_0 > 2$ в области частот $\omega < k_z v_{Ti}$; здесь v_{Ti} — тепловая скорость ионов, k_z — проекция волнового вектора на направление магнитного поля H_0. Ее опасность связана с тем, что аномальная диффузия частиц, вызванная развивающимся неустойчивым режимом, остается большой даже при создании в установках такого стабилизирующего фактора, как перекрещенность силовых линий магнитного поля [5].

В работе [5] отмечено, что довольно трудно создать экспериментальные условия для выхода из неустойчивого диапазона градиентов плотности и температуры, так как суммарный поток частиц на стенку установки меньше потока тепла. Эти условия, естественно, могут только ухудшаться, если по какой-либо причине неустойчивая область градиентов увеличивается.

Как оказывается, к расширению области неустойчивости может привести возможная неколлинеарность градиентов плотности и температуры. Эта возможность может быть оправдана по ряду причин. Во-первых, в реальных установках не существует такой высокой степени симметрии, чтобы возможные градиенты плотности и температуры были только радиальными. Но тогда из общих условий равновесия отнюдь не следует обязательная коллинеарность ∇n_0 и ∇T_0.

Во-вторых, в ходе работы установки могут возникать дополнительные потоки частиц и тепла, рассасывание которых поперек поля затруднено ввиду замагниченности плазмы.

Наконец, конструктивные особенности даже симметричных установок могут приводить к появлению не только радиальных, но также и азимутальных градиентов. Примером может служить стелларатор.

На фигуре изображено сечение стелларатора, перпендикулярное силовым линиям H_0. Поскольку силовые линии представляют собой в первом приближении поверхность тора, то эффективная сила тяжести за счет их кривизны направлена в одну сторону и образует различный угол с радиальным градиентом плотности [1]. С другой стороны, сила тяжести дает проекцию также на азимутальное направление, и тогда из условий равновесия вытекает, что должен появиться азимутальный градиент плотности. Обратим внимание, что начальная неоднородность приобретает теперь существенно двумерный характер.

2. При выводе дисперсионного уравнения учтем зависимость плотности и температуры от координат x, y, т. е. $n_0(x, y)$, $T_0(x, y)$. Двумерный характер начальной неоднородности приводит к изменению дрейфовых частот. В самом деле, если положить $n_0 = n_0(x, y)$, $T_0 = \mathrm{const}$, то для возмущений порядка $\exp(-i\omega t + ikr)$ уравнения [2], описывающие дрейфовую волну, примут вид

$$-i\omega n + c\frac{E_y}{H_0}\frac{\partial n_0}{\partial x} - c\frac{E_x}{H_0}\frac{\partial n_0}{\partial y} = 0, \qquad -ik_z n T_0 - en_0 E_z = 0 \tag{2.1}$$

Уравнения (2.1) описывают равновесие электронов вдоль силовых линий магнитного поля H_0 и сохранение числа частиц. Здесь n — возмущенная плотность, c — скорость света, $E_{x,y,z}$ — компоненты электрического поля. Из (2.1) имеем

$$\omega = \frac{cT_0}{eH_0 n_0}\left(k_y\frac{\partial n_0}{\partial x} - k_x\frac{\partial n_0}{\partial y}\right) \equiv \omega_i \tag{2.2}$$

В общем случае в качестве исходного уравнения, описывающего движение зарядов, рассмотрим кинетическое уравнение для возмущенной поправки к функции рас-

---

[1] На существование такой естественной поперечной гофрировки на стеллараторе обратил внимание Р. З. Сагдеев.

[2] Здесь и далее предполагается, что начальные параметры меняются достаточно медленно, так что применимо квазиклассическое приближение [6].

пределения без столкновительного интеграла

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f_j + \omega_{Hj}\left[\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{H}_0}{H_0}\right]\frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_j}{m_j}\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial f_j^0}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0 \tag{2.3}$$

Здесь ω_{Hj} — ларморовская частота частиц сорта j.

Равновесная функция распределения f_j^0 должна удовлетворять уравнению

$$(\mathbf{v}\nabla\cdot) f_j^0 + \omega_{Hj}\left[\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{H}_0}{H_0}\right]\frac{\partial f_j^0}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{2.4}$$

Решением этого уравнения будет произвольная функция интегралов движения, задаваемого уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_{Hj}\left[\mathbf{v}\times\frac{\mathbf{H}_0}{H_0}\right] \tag{2.5}$$

Первыми интегралами этой системы будут

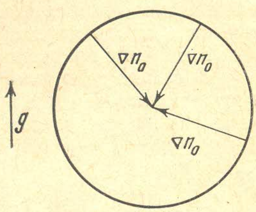
$$\varepsilon, \qquad \left(x + \frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right) \qquad \left(y - \frac{v_x}{\omega_{Hj}}\right)$$

Здесь ε — энергия. Естественно выбрать функцию распределения невозмущенной плазмы в виде

$$f_j^0 = \left[1 + \left(x + \frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(y - \frac{v_x}{\omega_{Hj}}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right] f_{0j}, \quad f_{0j} = n_0\left(\frac{m_j}{2\pi T_{0j}}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_j v^2}{2T_{0j}}\right) \tag{2.6}$$

Отметим, что ранее рассматривались функции распределения, зависящие только от ε и $(x + v_y / \omega_{Hj})$. Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$f_j = -\frac{e_j}{m_j}\int\limits_{-\infty}^{t}\left(\mathbf{E}\,\frac{\partial f_j^0}{\partial \mathbf{v}}\right) dt \tag{2.7}$$



Здесь интеграл берется по невозмущенным траекториям частиц сорта j, задаваемым уравнениями (2.5).

Дисперсионное уравнение $n_e = n_i$ (n_j — возмущенная плотность частиц сорта f_j) приобретает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_e d^3v = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i d^3v \tag{2.8}$$

Опуская промежуточные выкладки, подобные, например [3], приведем окончательный вид уравнения (2.8)

$$\frac{2n_0}{T_0} - \sum_j\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{T_0} - \frac{k_y}{m_j\omega_{Hj}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_x}{m_j\omega_{Hj}}\frac{\partial}{\partial y}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{0j}(v_z)\,dv_z}{\omega - k_z v_z - l\omega_{Hj}}\int\limits_0^{\infty} J^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Hj}}\right)\exp\left(-\frac{m_j v_\perp^2}{2T_{0j}}\right)\frac{m_j v_\perp}{T_{0j}}\,dv_\perp = 0 \tag{2.9}$$

При $\omega \ll \omega_{Hj}$ в сумме по l достаточно удержать лишь член с $l = 0$; учитывая, что

$$\int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\frac{m_j v_\perp^2}{2T_{0j}}\right) J^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{Hj}}\right)\frac{m_j v_\perp}{T_{0j}}\,dv_\perp = I_0\left(\frac{\theta_j^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{\theta_j^2}{2}\right) \quad \left(\theta_j = \frac{k_\perp v_{Tj}}{\omega_{Hj}}\right)$$

Здесь I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента, v_{Tj} — тепловая скорость частиц, уравнение (2.9) можно переписать следующим образом: (2.10)

$$2 - A\frac{\omega_T\omega}{(k_z v_{Ti})^2} + \frac{i\sqrt{\pi}}{k_z v_{Ti}}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,i\,\frac{\omega}{k_z v_{Ti}}\right)\left[\omega - \omega_i + \frac{1}{2}\,\omega_T(1+\delta)\right]A = 0$$

$$\omega_T = \frac{c}{eH_0}\left(k_y\frac{\partial T_0}{\partial x} - k_x\frac{\partial T_0}{\partial y}\right), \qquad A = \exp\left(-\frac{\theta_i^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\theta_i^2}{2}\right), \quad \delta = \theta_i^2\left[1 - \frac{I_1(^1/_2\,\theta_i^2)}{I_0(^1/_2\,\theta_i^2)}\right]$$

В уравнении (2.10) пренебрегается вкладом от электронных токов, что законно при $k_\perp v_{Tj} / \omega_{Hj} \ll 1$, и учитывается, что $\omega < k_z v_{Ti}$. Решая уравнение (2.10), найдем

$$\operatorname{Im}\omega = -ik_z v_{Ti} \left\langle \frac{2}{A} \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} \frac{\omega_i^2}{(k_z v_{Ti})^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} (1+\delta) - 1 \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{\alpha}{\beta} + 2 \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} (1+\delta) - 1 \right] \right\} \right\rangle \left\{ \frac{\omega_i^2}{(k_z v_{Ti})^2} \left[\frac{\alpha}{\beta} + 2 \left(\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} (1+\delta) - 1 \right) \right]^2 + \pi \right\}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{T_0} \left(k_y \frac{\partial T_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial T_0}{\partial y} \right), \qquad \beta = \frac{1}{n_0} \left(k_y \frac{\partial n_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial n_0}{\partial y} \right) \tag{2.11}$$

Условие неустойчивости $\operatorname{Im}\omega > 0$, согласно (2.10) приобретает вид

$$\frac{n_0 \partial T_0 / \partial x}{T_0 \partial n_0 / \partial x} > \frac{2}{1+\delta} \left(1 - \frac{k_x}{k_y} \frac{\partial n_0 / \partial y}{\partial n_0 / \partial x} \right) \left(1 - \frac{k_x}{k_y} \frac{\partial T_0 / \partial y}{\partial T_0 / \partial x} \right)^{-1} \tag{2.12}$$

Из этого неравенства вытекает, что если ∇n_0 и ∇T_0 неколлинеарны, то область неустойчивости существенно расширяется по сравнению с областью, указанной в работе [3]. Область неустойчивости включает в себя теперь случай, когда $\partial T_0 / \partial x$ и $\partial n_0 / \partial x$ имеют разные знаки; если $\partial T_0 / \partial y = 0$, то неустойчивость возможна при

$$\vartheta = \frac{\partial \lg T_0 / \partial x}{\partial \lg n_0 / \partial x} \ll 1$$

При этом, если $\partial n_0 / \partial y \ll \partial n_0 / \partial x$, то $k_x \gg k_y$. Нужно, однако, иметь в виду, что минимальное значение β, которого можно еще достигнуть, не должно нарушать условие $\omega_i \gtrsim k_z v_{Ti}$, так как

$$\operatorname{Re}\omega \sim k_z^2 v_{Ti}^2 / \omega_i < k_z v_{Ti}$$

Следует отметить, что неколлинеарность ∇T_0 и ∇n_0 приводит к изменению области неустойчивости и в ряде других случаев. Например, нетрудно видеть, что расширяется область неустойчивости [3], связанной с учетом теплопроводности вдоль силовых линий H_0; граница области существенно перемещается в сторону положительных ϑ.

В самом деле, как следует из приведенного выше рассмотрения, критерий развития дрейфово-температурных неустойчивостей может быть записан в виде соотношения между ω_i, определенной по формуле (2.2), и величиной ω_T, определяемой аналогично

$$\omega_T = \frac{c}{eH_0} \left(k_y \frac{\partial T_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) \tag{2.13}$$

Тогда критерий развития неустойчивости, связанной с учетом теплопроводности вдоль H_0, может быть записан в виде

$$\omega_T / \omega_i < 0 \tag{2.14}$$

В случае коллинеарности ∇T_0 и ∇n_0 получается критерий [3] $d \lg T_0 / d \lg n_0 < 0$. В противном случае имеем

$$\frac{(k_y \partial T_0 / \partial x - k_x \partial T_0 / \partial y)}{k_y \partial n_0 / \partial x} < 0 \tag{2.15}$$

Выражение (2.15) для простоты записано в случае, когда $\partial n_0 / \partial y = 0$. Отсюда и следует высказанное выше утверждение.

Поступила 27 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайловский А. Б. Колебания неоднородной плазмы. Сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1963, т. III, стр. 141.
2. Галеев А. А., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Теория неустойчивости неоднородной плазмы и аномальная диффузия. Атомная энергия, 1963, т. 15, № 6, стр. 451.
3. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Универсальная неустойчивость плазмы. Ж. экспер. и теор. физ., 1963, т. 44, № 3, стр. 903.
4. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы. Сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1964, т. IV, стр. 188.
5. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Неустойчивость и связанные с ней макроскопические эффекты в тороидальных разрядах. Материалы конференции по термоядерным исследованиям, Калэм, сентябрь, 1965.
6. Силин В. П. К теории колебаний слабо неоднородной плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 45, № 4, стр. 879.