ПМТФ, № 2, 1967

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Г. М. Заславский

(Новосибирск)

В настоящей работе рассматривается динамическая система, поведение которой со временем описывается уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2_0(1 + \alpha x^2)\, x + F(t)x = 0 \tag{0.1}$$

где внешняя сила $F(t)$ очень близка к периодической с частотой $\Omega \ll \omega_0$. Хорошо известно [1,2], что подобного рода системы при достаточно малом параметре нелинейности α сохраняют условно периодическое движение. В дальнейшем такое движение будем называть устойчивым. Ниже исследуется вопрос: при каком условии система (1.1) представляет собой динамическую систему с перемешиванием в смысле [3,4]? Иными словами, каков критерий того, что динамическую систему (0.1) можно приближенно описывать статистическими законами. В дальнейшем это условие будем называть критерием стохастичности (КС) Следует сразу оговорить характер исследования, которое будет проведено ниже. Решение уравнения (0.1) может быть представлено в виде квазипериодического движения с существенно меняющейся фазой. Нахождение критерия связано с выяснением условия, при котором временные корреляции фаз экспоненциально убывают. Грубо говоря, необходимо указать, когда временную последовательность фаз можно приближенно рассматривать как последовательность случайных чисел. Ясно, что в этом случае речь идет о стохастичности движения системы не во всем фазовом пространстве, а в подобласти, в которой имеется эргодичность движения по фазе.

Определение критерия стохастичности связано с большими трудностями. В последнее время появился ряд работ, где этот критерий находится для простейших физических систем [5–8] [1]. Названия этих работ свидетельствуют о том круге физических вопросов, в котором проблема определения КС существенна. Следует также отметить, что уравнение типа (0.1) использовалось Р. З. Сагдеевым, Б. В. Чириковым и автором для исследования устойчивости магнитных силовых линий в системах замкнутого типа.

Ниже будет предложен асимптотический метод определения критерия стохастичности для движения типа (0.1), допускающий обобщение также для систем несколько более сложного типа, чем (0.1). К излагаемому методу неприменим термин «математически строгий». Отдельные места, возможно, нуждаются в более строгом обосновании, хотя с «физической» точки зрения они кажутся вполне естественными.

§ 1. Параметрическая сила «мгновенного» действия. Начнем изучение уравнения (0.1) в случае, когда параметрическая сила $F(t)$ имеет характер периодических толчков, длящихся бесконечно малое время

$$\ddot{x} + \omega^2_0(1 + \alpha x^2)\, x + a\sum \delta(t - t_k)\, x = 0 \tag{1.1}$$

Толчки t_k следуют через равные интервалы $T = \Omega^{-1}$. Между двумя последовательными толчками x будет решением уравнения

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,(1 + \alpha x^2)x = 0 \tag{1.2}$$

Это уравнение хорошо изучено при малой нелинейности

$$\alpha x^2 \ll 1 \tag{1.3}$$

[1] См. также: Чириков Б. В. Диссертация. Новосибирск, 1959.

Однако для дальнейшего удобнее представить решение уравнения (1.2) в виде асимптотических рядов ВКБ-приближения [9]. Используя неравенство (1.3), напишем, следуя [8],

$$x_{\pm} = \omega^{-1/2} \exp\left\{\pm i \int\limits^{t} \omega(t')\, dt'\right\} \qquad (\omega = \omega_0 \sqrt{1+\alpha x^2}) \tag{1.4}$$

Предполагается, что в дальнейшем в выражение для ω (1.4) будет подставлено некоторое приближение для $x(t)$. Например, в нулевом приближении

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1+\alpha x_0^2}, \qquad x_0 = A_0 \cos \omega_0 t \tag{1.5}$$

В действительности, приближение (1.5) недостаточно корректно. Действительно, если в (2.2) заменить частоту в соответствии с (1.5), то возникает параметрический резонанс, которого в действительности в исходном уравнении (1.2) нет. Эта неприятность легко устраняется, если в определении x_0 взять исправленную, в соответствии с обычной теорией [10], частоту

$$x_0 = A_0 \cos(\omega_0 + \Delta\omega)t, \qquad \Delta\omega = {}^3/_8 \alpha A_0^2 \tag{1.6}$$

В дальнейшем будет подразумеваться, что в выражении (1.5) для ω величина x_0 определена формулой (1.6).

Второе замечание относительно решений (1.4) связано с неравенством

$$\omega \gg \Omega \tag{1.7}$$

при котором будет исследоваться (1.1). Согласно (1.7), между двумя последовательными толчками будет находиться большое число точек $\operatorname{Re} t^*$ таких, что $\omega(t^*) = 0$. Вблизи точек t^* асимптотические решения (1.4) становятся неприменимыми вследствие явления Стокса. Последовательный учет всех особенностей t^* приведет к умножению решений (1.4) на медленно меняющийся со временем периодический множитель. Последним эффектом будем пренебрегать, если влияние толчков $F(t)$ существеннее (соответствующая оценка содержится в приложении 1). Между двумя последовательными толчками в точках t_{n-1} и t_n решение типа (2.4) запишем в виде

$$x_{\pm}^{(n)}\, t \approx \omega_n^{-1/2} \exp\left\{\pm i \int\limits_{t_n}^{t} \omega_n(t')\, dt'\right\}$$

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1+\alpha x_n^2}, \qquad x_n = A_n x_+^{(n)} + \bar{A}_n x_-^{(n)} \tag{1.8}$$

Здесь черта означает комплексное сопряжение. Используя непрерывность решения в точках t_n и уравнение (1.1), находим связь между A_n, $\bar{A}_n$ и A_{n+1}, $\bar{A}_{n+1}$ (1.9)

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ \bar{A}_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} (\beta_n^+ + i\varepsilon_n)\exp iS_{n+1} & (\beta_n^- + i\varepsilon_n)\exp iS_{n+1} \\ (\beta_n^- - i\varepsilon_n)\exp(-iS_{n+1}) & (\beta_n^+ - i\varepsilon_n)\exp(-iS_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_n = \frac{a}{\omega_{n+1}}, \quad S_{n+1} = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \omega_{n+1}(t')\, dt' = \int\limits_{t_n}^{t_n+T} \omega_{n+1}(t')\, dt', \quad \beta_n^{\pm} = 1 \pm \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}}$$

Уравнение (1.9) удобно переписать в сокращенном виде

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{M}_n \mathbf{A}_n \tag{1.10}$$

Матрица перехода M эквивалентна оператору сдвига на T, действующему на решения $x(t)$. Отметим также, что смысл проделанных преобразований заключался в замене исходного уравнения (1.1) эквивалентным уравнением (1.9) (или 1.10) в конечных разностях.

Из (2.9) нетрудно получить

$$\operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - S_{n+1}) = \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \operatorname{tg}\varphi_n + \varepsilon_n$$

$$\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|^2 + \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\left(1 - \beta_n^- \sin^2\varphi_n + \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}}\varepsilon_n \sin 2\varphi_n + \varepsilon_n^2\cos^2\varphi_n\right) \qquad (1.11)$$

$$A_n = |A_n| \exp i\varphi_n, \qquad A_{n+1} = |A_{n+1}| \exp i\varphi_{n+1}$$

Возможность использования формул (1.9) — (1.11) предполагает ограничение сверху на интенсивность толчка a. Действительно, условие (1.3) слабой нелинейности дает, согласно (1.11),

$$\alpha x_n^2 \max(\varepsilon_n, \varepsilon_n^2) \ll 1 \qquad (1.12)$$

Неравенство (1.12) означает, что в течение всего времени рассмотрения процесса нелинейность остается малой, и представление решений уравнения (1.1) в виде (1.8) имеет смысл.

Уравнение (1.11) устанавливает следующую связь между фазами[1] φ_n и φ_{n+1}:

$$\varphi_{n+1} = \left\{S_{n+1} + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\omega_n}{\omega_{n+1}}\operatorname{tg}\varphi_n + \varepsilon_n\right)\right\} \qquad (1.13)$$

где {...} означает дробную часть числа, стоящего в фигурных скобках.

Оценка интеграла S_{n+1} с учетом (1.7) дает вместо (1.13)

$$\varphi_{n+1} \approx \left\{\omega_0 T\left(1 + \frac{\alpha}{2\omega_0}|A_{n+1}|^2\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\omega_n}{\omega_{n+1}}\operatorname{tg}\varphi_n + \varepsilon_n\right)\right\} \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) можно сокращенно записать в виде

$$\varphi_{n+1} = \{kf(\varphi_n)\} \qquad (1.15)$$

где за счет большого значения k выражение $kf(\varphi_n) \gg 1$ почти для всех φ_n, исключая малые области $\Delta\varphi \sim k^{-1}$.

Дальнейшее исследование сводится к изучению уравнения движения в конечных разностях (1.15) фаз осциллятора. В [11] было показано, что динамическая система, описываемая уравнением

$$\varphi_{n+1} = \{k\varphi_n\}, \qquad k \gg 1 \qquad (1.16)$$

является системой с перемешиванием, т. е. фазы φ_n можно с определенной степенью точности считать случайными. Это обстоятельство можно конкретизировать, вычисляя корреляцию фаз

$$R(1) = \left(\int_0^1\left(\varphi_{n+1} - \frac{1}{2}\right)\left(\varphi_n - \frac{1}{2}\right)d\varphi_n\right)\left[\int_0^1\left(\varphi_n - \frac{1}{2}\right)^2 d\varphi_n\right]^{-1} \qquad (1.17)$$

Интеграл (1.17) для уравнения типа (1.16) вычислялся в [6]. При $k \gg 1$ имеем

$$R(1) \approx C_1 / k \qquad (1.18)$$

Здесь константа $C_1 \sim 1$. Нетрудно показать, что

$$R(m) = \int_0^1\left(\varphi_{n+m} - \frac{1}{2}\right)\left(\varphi_n - \frac{1}{2}\right)d\varphi_n\left[\int_0^1\left(\varphi_n - \frac{1}{2}\right)^2 d\varphi_n\right]^{-1} \approx \frac{C_m}{k^m} \qquad (1.19)$$

---

[1] В дальнейшем для удобства фазы нормированы таким образом, что их изменение происходит в области (0.1).

Здесь по-прежнему $C_m \sim 1$. Уравнения (1.18), (1.19) означают, что вообще

$$R\ (n) \approx C\ (n) e^{-n \ln k} \tag{1.20}$$

где $C\ (n)$ — медленно меняющаяся функция от n по сравнению с экспоненциальным множителем. Последнее есть следствие условия $k \gg 1$. Очевидно, что результат (1.20) означает экспоненциальное расцепление корреляции фаз. Таким образом, условие $k \gg 1$ для задачи (1.16) можно рассматривать как [1] критерий стохастичности.

Аналогичный корреляционный анализ можно провести для уравнения (1.15). Подставляя (1.14) в (1.17) и опуская несложные оценки, получаем

$$R\ (1) \sim K^{-1}, \qquad K = \max\ (a / \omega,\ a^2 / \omega^2) \alpha G^2 \omega / \Omega \gg 1 \qquad 1.21$$

где G — амплитуда колебания. Неравенство (1.21) — критерий стохастичности для фаз нелинейного осциллятора, описываемого уравнением (2.1). Как уже отмечалось, имеются области фаз $\Delta\varphi_n \sim K^{-1}$, в которых критерий стохастичности не выполняется. В связи с этим более строгий анализ нуждается в оценке времени пребывания системы в таких областях (см. приложение 2). Условие (1.21) расцепления корреляций фаз можно записать в обычном виде

$$R\,(\tau) = \frac{\langle(\varphi\,(t) - {}^1/_2)\,(\varphi\,(t+\tau) - {}^1/_2)\rangle}{\langle(\varphi\,(t) - {}^1/_2)^2\rangle} \sim \exp\frac{-\tau}{\tau_0}, \qquad \tau_0 = \frac{T}{\ln K} = (\Omega \ln K)^{-1} \tag{1.22}$$

Здесь угловые скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по фазовому пространству $\varphi\ (t)$.

Неравенство (1.21) обеспечивается очень большим расстоянием между толчками и, следовательно, возможностью большого набега фазы между ними. При заданном большом параметре ω / Ω уменьшение параметра нелинейности α и интенсивности толчка a / ω приводит к нарушению неравенства (1.21) в соответствии с теоремой Колмогорова об устойчивости движения [1].

§ 2. «Адиабатическая» параметрическая сила. Рассмотрим случай силы $F\ (t)$ в уравнении (1.1), являющийся в каком-то смысле обратным случаю § 1

$$\ddot{x} + \omega_0^2\ (1 + \alpha x^2) x - V \cos \Omega t x = 0 \tag{2.1}$$

где по-прежнему $\omega_0 \gg \Omega$. При таком условии осциллятор находится в адиабатических условиях, и изменение его адиабатического инварианта экспоненциально мало. Последнее не позволяет получить большого набега фазы и соответствует тому, что в уравнении типа (1.15) значение k всегда мало. Исключение составляет случай $V \sim \omega_0^2$. Как хорошо известно для линейного осциллятора, при $V \sim \omega_0^2$ относительное изменение адиабатического инварианта ~ 1. Естественно поэтому рассмотреть область

$$0 < \omega_0^2 - V \ll \omega_0^2 \tag{2.2}$$

более детально. Для того чтобы нелинейность можно было считать малой, положим

$$\alpha x^2 \ll (\omega_0^2 - V) / \omega_0^2 \tag{2.3}$$

---

[1] В действительности, как показано в [11], для стохастичности достаточно просто $k > 1$.

Неравенство (2.3) позволяет записать решение уравнения (2.1) в виде, аналогичном (1.8), с заменой

$$\omega_n(t) = \sqrt{\omega_0^2(1 + \alpha x^2{}_n) - V\cos\Omega t} \qquad (2.4)$$

Особыми точками асимптотического решения (1.8) будут точки, в которых $\omega_n(t) = 0$. Основной вклад в изменение адиабатического инварианта осциллятора дают те точки t_0 в комплексной плоскости t, которые наиболее близко расположены к действительной оси. Согласно (2.2), $\mathrm{Re}\, t_0 \sim \sim 2\pi / \Omega$. Точки $\mathrm{Re}\, t_0$ можно интерпретировать как «толчки» по аналогии со случаем, рассмотренным в предыдущем параграфе. Матрица перехода M через толчок аналогична (1.9) с заменой

$$\varepsilon_n = e^{-\delta}, \qquad \delta \approx \frac{\pi}{2}\frac{\omega_0^2 - V}{\omega_0^2}\frac{\omega_0}{\Omega} \qquad (2.5)$$

Условие стохастичности (1.21) принимает в рассматриваемом случае вид

$$K = e^{-\delta}\alpha G^2\omega / \Omega \gg 1 \qquad (2.6)$$

Однако, согласно (2.2), (2.3), неравенство (2.6) не может быть выполнено. При достаточно малых δ и на границе неравенства (2.3) можно получить $K \sim 1$. Это соответствует промежуточной области между устойчивостью системы и стохастичностью. Движение системы носит очень запутанный характер, и исследование его затруднено.

Движение осциллятора, близкое к стохастическому, можно получить, если заменить неравенство (2.2) на

$$0 < V - \omega_0^2 \ll \omega_0^2$$

и, следовательно, (2.3) — на

$$\alpha x^2\omega_0^2 \ll V - \omega_0^2 \qquad (2.7)$$

В этом случае имеются области, в которых $\omega_n^2(t) < 0$, и движение становится неустойчивым. Амплитуда осциллятора экспоненциально растет, и ее изменение после прохождения области обычной неустойчивости может оказаться достаточным для выполнения критерия стохастичности. Действительно, матрица перехода M в этом случае имеет вид [12]

$$M \approx \left(\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right)^{1/2}\begin{pmatrix} \sqrt{1 + e^{2|\delta|}} & \dfrac{ie^{|\delta|}}{\sqrt{1 + e^{2|\delta|}}} \\ -ie^{|\delta|} & \end{pmatrix}$$

Здесь δ определено выражением (2.5). Если теперь считать $\delta \gtrsim 1$, то неустойчивость развивается не очень сильно, $\Delta x_n / x_n \sim e^{|\delta|}$, и критерий стохастичности имеет вид

$$K = e^{|\delta|}\alpha G^2\omega / \Omega \gg 1 \qquad (2.8)$$

Нетрудно видеть из (2.8) и (2.7), что для не очень больших δ стохастическая неустойчивость того же порядка, что и неустойчивость в области $\omega^2 < 0$, а неравенство (2.8) является не очень сильным: $K > 1$. Случай же $K \gg 1$ можно обеспечить достаточно большими значениями δ, при которых рост амплитуды вследствие прохождения через область динамической неустойчивости много больше, чем рост амплитуды вследствие стохастической неустойчивости.

Таким образом, в рассматриваемом случае (2.1) область значений начальных амплитуд, в которой может развиваться стохастическая неустойчивость, весьма мала.

Стохастическая неустойчивость системы (2.1), по-видимому, не может долго развиваться. Это связано с тем, что вследствие неустойчивости растет нелинейность и система выходит из области сильных резонансов.

§ 3. Внешняя сила «мгновенного» действия. Метод получения критерия стохастичности, рассмотренный в двух предыдущих параграфах, может быть обобщен и для систем, отличных от (0.1). Пусть, например, сила $F(t)$ «толчкового» типа, введенная в § 1, является внешней [5]

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + \alpha x^2)x = \omega_0 P \sum_k \delta(t - t_k) \tag{3.1}$$

где толчки t_k следуют через равные интервалы $T = \Omega^{-1}$. Между двумя последовательными толчками, как и в § 1, имеем решения в виде (1.8). В точке t_n связь между амплитудами и фазами следующая:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega_n}} |A_n| \cos\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\omega_{n+1}}} |A_{n+1}| \cos(\varphi_{n+1} - S_{n+1})$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{n+1} - S_{n+1}) = \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \operatorname{tg}\varphi_n + \varepsilon_n,$$

$$\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|^2 = \frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\left[1 - \beta_n^{-} \sin^2\varphi_n + 2\varepsilon_n^0 \frac{\omega_n}{\omega_{n+1}} \sin\varphi_n + (\varepsilon_n^0)^2\right] \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_n^0}{\cos\varphi_n}, \qquad \varepsilon_n^0 = \frac{P}{A_n} \frac{\sqrt{\omega_n}}{\omega_{n+1}}$$

Формулы (3.2) показывают, что рассмотрение аналогично § 1 с заменой ε_n в матрице перехода (1.9). В данном случае параметр ε_n зависит от амплитуды A_n и фазы φ_n, и поэтому матрица перехода является нелинейной.

Аналогично (1.21), получаем критерий стохастичности

$$K = \max\ (\varepsilon_n^0,\ (\varepsilon_n^0)^2)\ \alpha G^2 \omega / \Omega \gg 1 \tag{3.3}$$

или, подставляя значение ε_n^0 из (4.2),

$$K = \alpha G P \omega / \Omega \gg 1 \quad (P \ll G), \qquad K = \alpha P^2 \omega / \Omega \gg 1 \quad (P \gg G) \tag{3.4}$$

В последнем неравенстве уравнения (3.4) предполагается выполненным условие малости нелинейного члена αx^2 в уравнении (3.1)

$$\alpha P^2 \ll 1$$

§ 4. Заключительные замечания. 1. Различные случаи, рассмотренные в §§ 1—3, показывают, что общая идея получения критерия стохастичности связана с построением матрицы перехода, соответствующей оператору сдвига во времени, и в определении эффективного параметра ε, характеризующего относительное изменение адиабатического инварианта системы. Ясно, что легко провести вывод критерия на случай малой нелинейности произвольного вида и для $F(t)$ такой, что

$$F^{(n)}(t) = Q \sum_k \delta(t - t_k) \tag{4.1}$$

где порядок производной n любой.

2. В случае, когда $F(t) = A \sin \Omega t$, рассмотренном в § 2, роль $F(t)$ может играть другой осциллятор y с настолько большой инерцией, чтобы влиянием осциллятора x на y в первом порядке можно было пренебречь. Подобного рода задача рассматривалась в [8].

3. Последнее замечание связано с очень серьезным вопросом о времени, в течение которого можно применять полученные результаты. При выполнении критерия стохастичности можно описывать поведение системы кинетическим уравнением. Однако по истечении большого времени нелинейность в среднем становится большой, и для исследования задачи необходимы другие методы. Вопрос об оценке такого времени остается открытым.

В заключение благодарю Р. З. Сагдеева, обратившего внимание автора на круг рассмотренных задач, Б. В. Чирикова — за полезные советы и замечания.

Приложение 1. Оценим влияние на решения (2.4) точек t^* таких, что $\omega(t^*) = 0$. В соответствии с (1.5) и (1.6), особенности t^* удовлетворяют уравнению

$$1 + \alpha G^2 \cos^2\omega t^* = 0 \qquad (A.1.1)$$

Отсюда следует, что корни (А. 1.1) лежат в комплексной плоскости очень далеко от действительной оси и периодически следуют вдоль действительной оси с частотой ω. Вклад такого рода особенностей в изменение амплитуды решения экспоненциально мал и порядка

$$\exp\left\{-\frac{1}{\beta}\right\} \ll 1, \qquad \beta = \frac{d\ln\omega}{dt}\left(\frac{d\ln x}{dt}\right)^{-1} \ll 1 \qquad (A.1.2)$$

Здесь β — «параметр медленности».

Оценивая β согласно (1.2), (А.1.2), легко находим $\beta \sim \sqrt{\alpha G^2}$. Отсюда полное изменение амплитуды ΔG между двумя последовательными толчками равно

$$\frac{\Delta G}{G} \sim \frac{\omega}{\Omega}\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\alpha G^2}}\right\} \qquad (A.1.3)$$

С другой стороны, изменение вследствие толчка $\Delta G / G \sim \varepsilon = a / \omega$. Это

$$\frac{\omega}{\Omega}\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{\alpha G^2}}\right\} \ll \frac{a}{\omega} \qquad (A.1.4)$$

Неравенство (А.1.4) благодаря экспоненциальной малости левой части легко может быть выполнено одновременно с критерием стохастичности (1.21).

Приложение 2. Пусть на каком-то шагу фаза осциллятора $\varphi_0 \ll K^{-1}$. Оценим время пребывания системы в области, в которой критерий стохастичности не выполняется, т. е. $\varphi \lesssim K^{-1}$. Эта оценка, вследствие малости размеров области ($K^{-1} \ll 1$), очевидно, равным образом относится к уравнениям (1.15), (1.16). В соответствии с этими уравнениями движения, для φ имеем

$$\varphi_1 = K\varphi_0, \quad \varphi_2 = K^2\varphi_0, \ldots, \quad \varphi(t) \sim K^{\Omega t}\varphi_0 \quad (\Omega t \gg 1) \qquad (A.2.1)$$

Из условия достижения границы стохастичности и (А.2.1) получаем время t_0 пребывания системы в области $\varphi_0 K \ll 1$

$$t_0 \sim \frac{\ln\varphi_0^{-1}}{\Omega\ln K} \sim \tau_0\ln\frac{1}{\varphi_0}$$

Из (А.2.2) и (1.22) следует, что $t_0 \gg \tau_0$. Отсюда — вероятность подобной флюктуации с $\varphi_0 \ll K^{-1}$ экспоненциально мала ($\sim \exp(-t_0 / \tau_0)$). Если $\varphi_0 \lesssim 1$, то из (А.2.1) видно, что система за несколько толчков достигает стохастической области.

Отличие уравнения (1.16) от (1.15) сказывается, в частности, в том, что в первом случае имеются три области, вероятность попадания системы в которые экспоненциально мала. В особом исследовании, которое здесь проводиться не будет, нуждается оценка времени пребывания системы в области φ, в которой $|K\cos\varphi| < 1$.

Поступила 20 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Докл. АН СССР, 1954, т. 98, № 4.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. н., 1963, т. 18, № 1, стр. 91.
3. Синай Я. Г. О потоках с конечной энтропией. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 6, стр. 1200.
4. Синай Я. Г. Вероятностные идеи в эргодической теории. Тр. Международного конгресса по математике, 1962, стр. 540.
5. Чириков Б. В. Резонансные процессы в магнитных ловушках. Атомная энергия, 1959, т. 6, стр. 630.
6. Заславский Г. М., Чириков Б. В. О механизме одномерного ускорения Ферми. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 2, стр. 306.
7. Израйлев Ф. М., Чириков Б. В. Статистические свойства нелинейной струны. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 1, стр. 57.
8. Заславский Г. М. Асимптотический метод изучения неравновесных систем. ПМТФ, 1966, № 2.
9. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов. Изд. «Мир», 1965.
10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
11. Рохлин В. А. Точные эндоморфизмы пространства Лебега. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, т. 25, № 4, стр. 499.