1967 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том XXXVII, в. 1
1967 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. XXXVII, № 1

РАСПАДНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНЫ СО СЛУЧАЙНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ФАЗОЙ

Г. М. Заславский и *В. Е. Захаров*

Хорошо известно, что волны в плазме, а также в других нелинейных средах с дисперсией, могут быть неустойчивы относительно „распадов“, т. е. одновременного возбуждения пары волн, сумма частот которых близка к частоте исходной волны [1–3]. Уравнение, описывающее распадную неустойчивость, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{a} &= -iVe^{i\varepsilon t}c(t)\,b, \\ \dot{b} &= iV^*e^{-i\varepsilon t}c^*(t)\,a, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где a и b^* — комплексные амплитуды возбуждаемых волн, $c(t)$ — амплитуда волны, устойчивость которой исследуем.

$$\varepsilon = \omega_c - \omega_a - \omega_b, \tag{2}$$

V — матричный элемент взаимодействия волн.

Между волновыми векторами имеется соотношение: $k_c = k_a + k_b$. Обычно c не зависит от времени, что соответствует монохроматической волне.

В этом случае система (1) имеет решение вида

$$\left.\begin{aligned} |a|,\ |b| &\sim e^{\frac{\Gamma_0 t}{2}}, \\ \Gamma_0 &= \pm\sqrt{4|Vc|^2 - \varepsilon^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Неустойчивым решениям соответствуют достаточно малые ε, что возможно только при определенных законах дисперсии волн [3].

С другой стороны, известно, что в результате нелинейных взаимодействий волн их фазы являются случайными функциями времени. Это может привести к существенному изменению характера развития неустойчивости в зависимости от соотношения между Γ_0^{-1} и временем корреляции фаз волны $c(t)$.

Ниже приводится точное решение задачи о распадной неустойчивости волны конечной амплитуды,[1] фаза которой является случайной функцией достаточно общего вида.

Выделим в $c(t)$ фазовый множитель и перепишем (1) в виде

$$\dot{a} = -iFe^{i\varepsilon t + i\varphi(t)}b; \quad \dot{b} = iF^*e^{-i\varepsilon t - i\varphi(t)}a; \quad F = V|c|, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — известная случайная функция времени.

Предполагается, что в процесс (4) не вовлекаются новые степени свободы. Это верно, например, для распада волны в ограниченном

---

[1] Учет конечного времени корреляции фаз волны при изучении взаимодействия волн с частицами плазмы был проведен в [4].

объеме, если выполняется условие $\frac{d\omega}{dk} \ll L\varepsilon$ (L — характерный размер системы).

По внешним данным (4) аналогична задаче о релаксации двухуровневой системы под действием внешнего поля со случайной фазой. Отличие в том, что в последнем случае при малых ε величина Γ_0 чисто мнимая. Указанное сходство позволяет воспользоваться методом, развитым в [5]. Формальная сторона задачи связана с определением $\langle |a|^2 \rangle$, $\langle |b^2| \rangle$, усредненных по ансамблю, создаваемому случайным процессом $\varphi(t)$. Выберем сначала $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \alpha \int^{t} \sum_k \delta(t' - t_k)\, dt',$$

где точки t_k распределены по закону Пуассона: вероятность попадания t_k в интервал dt равна $\frac{dt}{\tau}$. Положим

$$\operatorname{Re} a = x_1, \ \operatorname{Im} a = x_2; \quad \operatorname{Re} \dot{a} = y_1; \quad \operatorname{Im} \dot{a} = y_2 \tag{5}$$

и введем функцию распределения $f(x_1, x_2, y_1, y_2, t)$, понимаемую в обычном смысле. Точное уравнение для f, получаемое тем же способом, что и в [5], имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial t} + (\varepsilon y_2 + |F|^2 x_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + (-\varepsilon y_1 + |F|^2 x_2)\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = \\ &= \frac{1}{\tau}\{f(x_1, x_2, y_1\cos\alpha + y_2 \sin\alpha, -y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha, t) - f\} \equiv \operatorname{St}\{f\}, \\ &\qquad\qquad f \equiv f(x_1, x_2, y_1, y_2, t). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Правая часть (6) имеет смысл обычного Stoss-члена. В случае, если величина α распределена с плотностью $w(\alpha)$ и $\tau = \tau(\alpha)$, в (4) $\operatorname{St}\{f\}$ заменяется на

$$\overline{\operatorname{St}\{f\}} = \int d\alpha w(\alpha) \operatorname{St}\{f, \alpha\}. \tag{7}$$

Обозначим

$$\xi_1 = |a|^2; \quad \xi_2 = |\dot{a}|^2; \quad \xi_3 = \operatorname{Re} a\dot{a}^*; \quad \xi_4 = \operatorname{Im} a\dot{a}^*. \tag{8}$$

Из (5), (6), (8) получаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle\xi_1\rangle = 2\langle\xi_3\rangle; \quad \frac{d}{dt}\langle\xi_2\rangle = 2|F|^2\langle\xi_3\rangle, \\ &\frac{d}{dt}\langle\xi_3\rangle = |F|^2\langle\xi_1\rangle + \langle\xi_2\rangle + \frac{1}{\tau}(\cos\alpha - 1)\langle\xi_3\rangle + \left(\varepsilon - \frac{\sin\alpha}{\tau}\right)\langle\xi_4\rangle, \\ &\frac{d}{dt}\langle\xi_4\rangle = -\left(\varepsilon - \frac{\sin\alpha}{\tau}\right)\langle\xi_3\rangle + \frac{1}{\tau}(\cos\alpha - 1)\langle\xi_4\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Отыскивая решение системы (7) в виде $e^{\Gamma t}$, имеем

$$\Gamma^3 + 2\frac{1-\cos\alpha}{\tau}\Gamma^2 + \Gamma\left[\left(\frac{1-\cos\alpha}{\tau}\right)^2 + \left(\varepsilon - \frac{\sin\alpha}{\tau}\right)^2 - 4|F|^2\right] - $$
$$- 4|F|^2\frac{1-\cos\alpha}{\tau} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) решает принципиально задачу (во избежание громоздких выражений мы не выписываем корни). Если α тоже случайный параметр, то величины $\frac{1-\cos\alpha}{\tau(\alpha)}$, $\frac{\sin\alpha}{\tau(\alpha)}$ следует усреднить аналогично (7). При $\tau = \infty$, либо $\alpha = 0, 2\pi$ из (8) следует результат (3) обычной распад ной теории. Уравнение (10) всегда имеет один корень $\Gamma_1 > 0$, соответствующий неустойчивости. Укажем только интересные предельные случаи при $\varepsilon = 0$

$$\Gamma_1 \approx 2\,|F|\left(1 - \frac{1-\cos\alpha}{2\tau\,|F|}\right); \quad \frac{\tau\,|F|}{1-\cos\alpha} \gg 1, \tag{11}$$

$$\Gamma_1 \approx \frac{2\,|F|^2\,\tau}{1-\cos\alpha}; \quad \frac{\tau\,|F|}{1-\cos\alpha} \ll 1. \tag{12}$$

В случае (12), соответствующем „приближению хаотических фаз“, инкремент неустойчивости очень мал. Если, например, величина α распределена равномерно, т. е. $w(\alpha) = \frac{1}{2\pi}$, то вместо (11), (12) получаем

$$\Gamma_1 = 2\,|F|\left(1 - \frac{1}{2\tau\,|F|}\right) = \Gamma_0\left(1 - \frac{1}{\tau\Gamma_0}\right); \quad \tau\Gamma_0 \gg 1;$$

$$\Gamma_1 = 2\,|F|^2\,\tau = \frac{1}{2}\Gamma_0^2\tau; \quad \tau\Gamma_0 \ll 1.$$

Литература

[1] В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. ЖТФ, *XXXII*, 1291, 1962. — [2] А. А. Галеев, В. И. Карпман. ЖЭТФ, *44*, 592, 1963. — [3] В. Н. Ораевский. Ядерный синтез, *4*, 263, 1964. — [4] Ф. Г. Басс, Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро. ЖЭТФ, *49*, 329, 1965. — [5] Г. Е. Векштейн, Г. М. Заславский. Препринт, ИЯФ СО АН СССР, № 3, 1966.

Поступило в Редакцию
6 марта 1966 г.