



УДК 533.951.8

## О НИЗКОЧАСТОТНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЯХ ПЛАЗМЫ

Е. Я. Коган и С. С. Моисеев

### Введение

В последнее время довольно интенсивно изучалась неустойчивость плазмы в полях сложной геометрии (см., например, [1-3]). Особое внимание при этом было уделено случаю  $\omega \gg k_z v_{Ti}$  ( $k_z$  — проекция волнового вектора на направление магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ ;  $\omega$  — частота волны;  $v_{Ti}$  — тепловая скорость ионов). Именно для таких частот были обнаружены, например, опасные дрейфовые неустойчивости магнитного удержания плазмы. Однако в диапазоне частот  $\omega < k_z v_{Ti}$ , кроме дрейфово-температурной неустойчивости при  $\frac{d \ln T}{d \ln n} > 2$  [4], насколько нам известно, других неустойчивостей не было обнаружено ( $T$  — температура,  $n$  — плотность плазмы). В системах с непараллельными силовыми линиями  $\mathbf{H}_0$  условие  $\omega \gg k_z v_{Ti}$  для дрейфовых волн сводится к условию  $\Delta x \leq \frac{r_i}{\theta}$ , где  $\Delta x$  — размер области локализации возмущения;  $r_i$  — ларморовский радиус ионов;  $\theta$  — угол поворота силовых линий магнитного поля на расстоянии порядка размеров системы (shear). При достаточной величине  $\theta$  ( $\theta \geq \frac{1}{10}$ ) диффузия за счет дрейфовых неустойчивостей, развивающихся при  $\omega > k_z v_{Ti}$ , существенно падает [3] ( $D \sim \gamma \Delta x^2$ , где  $D$  — коэффициент диффузии, а  $\gamma$  — инкремент неустойчивости). Именно это обстоятельство явилось одним из весьма обнадеживающих факторов в пользу устойчивости тороидальных установок с shear.

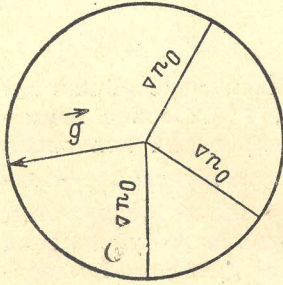
Вопрос об эффективности использования установок с shear в значительной степени сводится, как видим, к вопросу о том, насколько устойчивым в действительности является диапазон частот  $\omega < k_z v_{Ti}$ , повышенную устойчивость которого предполагали в связи с ожидаемым стабилизирующим действием ионного затухания Ландау (см. [1, 2]).

Можно, однако, указать на два фактора, учет которых представляет интерес в связи с исследованием устойчивости плазмы в области частот  $\omega < k_z v_{Ti}$ . Это, во-первых, роль электронного затухания Ландау для достаточно коротких длин волн  $k_{\perp} r_i \gg 1$  ( $k_{\perp}$  — проекция волнового вектора перпендикулярно  $\mathbf{H}_0$ ); во-вторых, выяснение вопроса о возможности расширения области  $\frac{d \ln T}{d \ln n}$ , в которой развивается дрейфово-температурная неустойчивость.

Уже в работе [3] было отмечено, что довольно трудно создать экспериментальные условия для выхода из неустойчивого диапазона градиентов плотности и температуры, поскольку суммарный поток частиц на стенку установки меньше потока тепла. Эти условия естественно могут только ухудшаться, если по какой-либо причине неустойчивая область градиентов увеличится.

Как оказывается, к расширению области неустойчивости может привести возможная неколлинеарность градиентов плотности и температуры. Эта возможность может быть оправдана по ряду причин. Во-первых, в реальных установках не существует такой высокой степени симметрии, чтобы возможные градиенты плотности и температуры были только радиальными. Но тогда из общих условий равновесия отнюдь не следует обязательная коллинеарность  $\nabla n$  и  $\nabla T$ . Во-вторых, в ходе работы установки могут возникать дополнительные потоки частиц и тепла, рассасывание которых поперек поля затруднено ввиду замагниченности плазмы.

Наконец, конструктивные особенности даже симметричных установок могут приводить к появлению не только радиальных, но также азимутальных градиентов. Примером может служить стелларатор.<sup>1</sup>



На рисунке изображено сечение стелларатора, перпендикулярное силовым линиям  $\mathbf{H}_0$ . Поскольку силовые линии в первом приближении лежат на поверхности тора, то эффективная „сила тяжести“ за счет их кривизны направлена в одну сторону и образует различный угол с радиальным градиентом плотности. С другой стороны, „сила тяжести“ дает проекцию также на азимутальное направление, и тогда из условий равновесия вытекает, что должен появиться азимутальный градиент плотности.

Обратим внимание на то, что начальная неоднородность приобретает теперь существенно двумерный характер.

§ 1. При выводе дисперсионного уравнения мы учтем зависимость плотности и температуры от координат  $x, y$ , т. е.  $n_0(x, y), T_0(x, y)$ . Двумерный характер начальной неоднородности приводит к изменению дрейфовых частот. В самом деле, если положить  $n_0 = n_0(x, y)$ , то для возмущений  $\sim \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$  уравнения, описывающие дрейфовую волну, примут вид

$$\left. \begin{aligned} -i\omega n + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial n_0}{\partial x} - c \frac{E_x}{H_0} \frac{\partial n_0}{\partial y} &= 0, \\ -ik_z n T_0 - en_0 E_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) описывают равновесие электронов вдоль силовых линий магнитного поля и сохранение числа частиц. Здесь  $n$  — возмущенная плотность;  $c$  — скорость света;  $E_{x,y,z}$  — компоненты электрического поля;  $T_0$  — невозмущенная температура.

Из (1.1) имеем

$$\omega = \frac{cT_0}{eH_0 n_0} \left( k_y \frac{\partial n_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial n_0}{\partial y} \right). \quad (1.2)$$

В качестве исходного уравнения, описывающего движение зарядов, рассмотрим кинетическое уравнение для возмущенной поправки к функции распределения бестолкновительного интеграла

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f_j + [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_{H_j}] \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_j}{m_j} \left( E \frac{\partial f_j^0}{\partial v} \right) = 0. \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> На существование такой естественной поперечной „гофрировки“ на стеллараторе обратил внимание Р. Э. Сагдеев.

Равновесная функция распределения  $f_j^0$  должна удовлетворять уравнению

$$(\mathbf{v}\nabla)f_j^0 + [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_{Hj}] \frac{\partial f_j^0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.4)$$

Решением этого уравнения является произвольная функция интегралов движения, задаваемого уравнениями

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_{Hj}]; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \quad (1.5)$$

Первыми интегралами этой системы являются

$$\varepsilon \text{ (энергия), } \left(x + \frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right), \left(y - \frac{v_x}{\omega_{Hj}}\right).$$

Естественно выбрать функцию распределения невозмущенной плазмы в виде

$$f_j^0 = \left[1 + \left(x + \frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(y - \frac{v_x}{\omega_{Hj}}\right) \frac{\partial}{\partial y}\right] f_{0j}, \quad (1.6)$$

где

$$f_{0j} = n_0 \left(\frac{m_j}{2\pi T_{0j}}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_j v^2}{2T_{0j}}\right).$$

Отметим, что ранее рассматривались функции распределения, зависящие только от  $\varepsilon$ ,  $\left(x + \frac{v_y}{\omega_{Hj}}\right)$ .

Решение уравнения (1.3) имеет вид

$$f_j = -\frac{e_j}{m_j} \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E} \frac{\partial f_j^0}{\partial \mathbf{v}}\right) dt, \quad (1.7)$$

где интеграл берется по невозмущенным траекториям частиц сорта  $j$ , задаваемым уравнениями (1.5).

Дисперсионное уравнение  $n_e = n_j$  ( $n_j$  — возмущенная плотность частиц сорта  $j$ ) приобретает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} f_j d^3v. \quad (1.7)$$

Опуская промежуточные выкладки, подобные, например [5], приведем окончательный вид уравнения (1.7)

$$2 \frac{n_0}{T_0} - \sum_j \sum_{e=0}^{\infty} \left( \frac{\omega}{T_0} - \frac{k_y}{m_j \omega_{Hj}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{k_x}{m_j \omega_{Hj}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{0j}(v_z) dv_z}{\omega - k_z v_z - e \omega_{Hj}} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{m_j v_{\perp}^2}{2T_{0j}}} J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Hj}} \right) \frac{m_j v_{\perp}}{T_{0j}} dv_{\perp} = 0. \quad (1.8)$$

( $m_j$ ;  $\omega_{Hj}$  — масса и циклотронная частота частиц  $j$ ).

При  $\omega \ll \omega_{Hj}$  в сумме по  $l$  достаточно удерживать лишь член с  $l=0$ , учитывая также, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{m_j v_{\perp}^2}{2T_{0j}}} J_0^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Hj}} \right) \frac{m_j v_{\perp}}{T_{0j}} dv_{\perp} = e^{-\frac{\theta_j^2}{2}} I_0 \left( \frac{\theta_j^2}{2} \right),$$

где  $I_0(\eta)$  — функция Бесселя мнимого аргумента;  $\theta_j = k_{\perp} r_j$ ,  $v_{Tj}$  — тепловая скорость частиц  $j$ ; (1.8) можно переписать следующим образом

$$2 - A \frac{\omega_T^* \omega}{(k_z v_{Ti})^2} + i \frac{\sqrt{\pi}}{k_z v_{Ti}} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} i \frac{\omega}{k_z v_{Ti}} \right) A \left[ \omega - \omega_i^* + \frac{1}{2} \omega_i^* (1 + \delta) \right] = 0. \quad (1.9)$$

Здесь

$$\omega_T^* = \frac{c}{eH_0} \left( k_y \frac{\partial T_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial T_0}{\partial y} \right); \quad \omega_i^* = \frac{cT_0}{eH_0 n_0} \left( k_y \frac{\partial n_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial n_0}{\partial y} \right),$$

$$A = \exp \left( -\frac{\theta_i^2}{2} \right) I_0 \left( \frac{\theta_i^2}{2} \right); \quad \delta = \theta_i^2 \left[ 1 + \frac{I_1 \left( \frac{\theta_i^2}{2} \right)}{I_0 \left( \frac{\theta_i^2}{2} \right)} \right].$$

В уравнении (1.9) мы пренебрегли вкладом от электронных токов, что законно при  $k_{\perp} r_i \ll 1$ , и учли, что  $\omega < k_z v_{Ti}$ .

Решая уравнение (1.9), найдем следующее выражение для инкремента

$$\begin{aligned} \text{Im } \omega = & -k_z v_{Ti} \times \\ & \times \frac{i \left\langle \frac{2}{A} \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} \left( \frac{\omega_i^*}{k_z v_{Ti}} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} (1 + \delta) - 1 \right] \left\{ \frac{\alpha}{\beta} + 2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} (1 + \delta) - 1 \right] \right\} \right\rangle}{\left( \frac{\omega_i^*}{k_z v_{Ti}} \right)^2 \left\{ \frac{\alpha}{\beta} + 2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} (1 + \delta) - 1 \right] \right\}^2 + \pi} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\alpha = \frac{1}{T_0} \left( k_y \frac{\partial T_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial T_0}{\partial y} \right); \quad \beta = \frac{1}{n_0} \left( k_y \frac{\partial n_0}{\partial x} - k_x \frac{\partial n_0}{\partial y} \right).$$

Условие неустойчивости  $\text{Im } \omega > 0$ , согласно (1.10), приобретает вид

$$\frac{\frac{\partial \ln T_0}{\partial x}}{\frac{\partial \ln n_0}{\partial x}} > \frac{2}{1 + \delta} \frac{\left( 1 - \frac{k_x}{k_y} \frac{\frac{\partial n_0}{\partial y}}{\frac{\partial n_0}{\partial x}} \right)}{\left( 1 - \frac{k_x}{k_y} \frac{\frac{\partial y}{\partial T_0}}{\frac{\partial T_0}{\partial x}} \right)}, \quad (1.11)$$

(1.11) показывает, что если  $\nabla n_0$  и  $\nabla T_0$  неколлинеарны, то область неустойчивости существенно расширяется в сравнении с [4]. Область неустойчивости включает в себя теперь случай, когда  $\frac{\partial T_0}{\partial x}$  и  $\frac{\partial n_0}{\partial x}$  имеют разные знаки; если  $\frac{\partial T_0}{\partial y} \equiv 0$ , то неустойчивость возможна при  $\frac{\frac{\partial \ln T_0}{\partial x}}{\frac{\partial \ln n_0}{\partial x}} < 1$ .

При этом если  $\frac{\partial n_0}{\partial y} \ll \frac{\partial n_0}{\partial x}$ , то  $k_x \gg k_y$ . Нужно, однако, иметь в виду, что минимальное значение  $\beta$ , которого мы еще можем достигнуть, не должно нарушать условие  $\omega_i^* \geq k_z v_{Ti}$ , так как

$$\text{Re } \omega \sim \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_i^*} < k_z v_{Ti}.$$

Следует отметить, что учет неколлинеарности  $\nabla n_0$  и  $\nabla T_0$  приводит к изменению области неустойчивости и в ряде других случаев. Например, нетрудно видеть, что расширяется область неустойчивости, свя-

занной с учетом теплопроводности вдоль силовых линий  $\mathbf{H}_0$  [4], граница области существенно перемещается в сторону положительных  $\frac{\partial \ln T_0}{\partial \ln n_0}$ .

§ 2. В связи с вопросом о стабилизирующих свойствах эффекта перекрещенности силовых линий магнитного поля (shear) особую важность приобретают условия развития неустойчивостей плазмы на возмущениях с  $k_z > \frac{\omega}{v_{Ti}}$ . В предыдущем параграфе была указана одна из возможностей развития неустойчивости в этом диапазоне. Оказывается, что возможным условием, приводящим к неустойчивости неоднородной плазмы с  $\omega < k_z v_{Ti}$ , является условие  $k_{\perp} r_i \gg 1$ .

Из уравнения (1.8) при  $T_0 = \text{const}$ ;  $\frac{\partial n_0}{\partial y} = 0$  нетрудно получить следующее уравнение

$$2 + \frac{i \sqrt{\pi}}{k_z v_{Ti}} W\left(\frac{\omega}{k_z v_{Ti}}\right) (\omega - \omega_i) \Gamma_0(k_{\perp}^2 r_i^2) + \frac{i \sqrt{\pi}}{k_z v_{Te}} W\left(\frac{\omega}{k_z v_{Te}}\right) (\omega + \omega_e) \Gamma_0(k_{\perp}^2 r_e^2) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $W(x)$  — функция Крампа,

$$\Gamma_0(x) = e^{-x} I_0(x),$$

$I_0(x)$  — функция Бесселя мнимого аргумента.

Нас интересует диапазон частот  $\omega < k_z v_{Ti}$  и  $k_{\perp} r_i > 1$  ( $k_{\perp} r_e \ll 1$ ).

С учетом этого уравнение (2.1) примет вид

$$2 + \frac{i \sqrt{\pi}}{k_z v_{Te}} (\omega + \omega_e) \left(1 + i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{k_z v_{Te}}\right) + i \frac{\omega - \omega_i}{\sqrt{2} k_{\perp} r_i k_z v_{Ti}} \left(1 + i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega}{k_z v_{Ti}}\right) = 0. \quad (2.2)$$

Из (2.2) находим

$$\text{Im } \omega \sim \text{Re } \omega \sim \frac{k_z^2 v_{Ti}^2}{\omega_i} k_{\perp} r_i. \quad (2.3)$$

Из предположения  $\omega < k_z v_{Ti}$  условие существования решения (2.3)

можно представить:  $k_{\perp} r_i \sim \sqrt{\frac{M}{m}}$ ;  $k_z < \frac{1}{n_0} \frac{\partial n_0}{\partial x}$  ( $M$  — масса ионов).

Отметим, что первое из этих соотношений позволяет учесть электронный полувычет наряду с ионным.

Рассмотрим диффузию, развивающуюся на этой неустойчивости. Воспользуемся для оценки коэффициента поперечной диффузии соотношением

$$D_{\perp} \sim \text{Im } \omega \lambda_x^2.$$

При  $k_x \sim k_y$  длина волны  $\lambda_x \sim r_e$  ( $r_e$  — ларморовский радиус электрона)

$$D_{\perp} \sim \frac{m}{M} \frac{r_i}{r} \frac{c T_0}{e H_0},$$

$r$  — поперечный размер системы.

Отношение данного коэффициента к классическому

$$\frac{D_{\perp}}{D_{\text{кл.}}} \sim \frac{v_{Ti}}{r \nu} \quad (2.4)$$

( $\nu$  — частота электронных столкновений).

Из (2.4) видим, что в высокотемпературном пределе диффузия существенно превышает классическую.

Таким образом, учет электронного затухания Ландау приводит к возможности появления универсальных неустойчивостей в диапазоне  $\omega < k_z v_{Ti}$ . Обратим внимание на то, что все подобные неустойчивости должны плохо стабилизироваться shear'ом. В самом деле, размер области поперечной локализации возмущения здесь  $\Delta x \sim \frac{r_e}{\theta}$ , а длины волн, на которых развиваются возмущения  $\lambda_x \sim r_e$ , и для стабилизации данной неустойчивости нужен shear  $\sim 1$ .<sup>2</sup>

Выражаем благодарность А. А. Галееву за полезную дискуссию.

#### Литература

- [1] В. Сорри, М. N. Rosenbluth. 2 Conf. Plasma Phys. and Nucl. Fusion, Paper № 21/105, Calham, 1965. — [2] N. A. Krall, M. N. Rosenbluth. Phys. Fluids, 8, 1488, 1965. — [3] Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуде. Доклад на 2-й Международной конференции по физике плазмы. Калэм, сентябрь, 1965. — [4] А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев. ЖЭТФ, 903, 1963. — [5] M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker. Conf. Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Res., Salzburg, Sept., 1961. — [6] А. Б. Михайловский, Л. В. Михайловская. ЖТФ, XXXIII, вып. 10, 1963.

Новосибирский государственный  
университет

Поступило в Редакцию  
17 марта 1966 г.

<sup>2</sup> А. Б. Михайловский обратил внимание одного из авторов на то, что существование рассмотренной нами неустойчивости при  $k_{\perp} r_i \gg 1$  может быть получено из соотношений работы [6]. Однако, насколько нам известно, анализ данной неустойчивости, позволивший обнаружить ее специфические особенности, приведен здесь впервые.