Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 52 *1967* *Вып. 5*

РАДИАЦИОННАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Н. Байер, В. М. Катков

Рассмотрен процесс поляризации электронов вследствие излучения в неоднородном магнитном поле с помощью операторной формулировки квазиклассического приближения. Получено общее выражение для вероятности радиационного перехода с переворотом спина в произвольном магнитном поле.

При движении в магнитном поле электроны и позитроны могут поляризоваться вследствие излучения. Поляризация возникает потому, что вероятность радиационного перехода с переворотом спина зависит от ориентации начального спина. На существование эффекта радиационной поляризации в однородном магнитном поле впервые указали Соколов, Тернов и сотрудники [1, 2]. Радиационная поляризация рассматривалась также в работе авторов [3], где был сформулирован подход, существенно учитывающий квазиклассический характер движения электронов высокой энергии в магнитном поле, позволяющий, в принципе, рассмотреть радиационную поляризацию в неоднородном магнитном поле.

В данной работе развит операторный метод исследования спиновых явлений в квазиклассическом приближении [1)]. Этот метод оказался адекватным нашей задаче и позволяет найти вероятность радиационного перехода с переворотом спина в произвольном магнитном поле, в то время как до настоящего времени эту задачу не удавалось решить даже в рамках теории возмущений по неоднородности поля.

Следует отметить, что характерное время радиационной поляризации одного порядка с временем работы ускорителей со встречными пучками, поэтому вопрос о радиационной поляризации в неоднородном магнитном поле имеет большой практический интерес.

Движение электрона высокой энергии в магнитном поле можно рассматривать квазиклассически, если энергия излучаемых фотонов много меньше энергии электрона

$$\hbar\omega \ll E, \qquad \omega \sim \omega_0\gamma^3, \tag{1}$$

где

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \omega_0 = \frac{v_t}{R}, \quad R = \frac{cp_t}{eH}, \tag{2}$$

R — мгновенный радиус кривизны, H — магнитное поле. В этом случае можно описывать движение электрона с помощью классических характеристик. Поскольку во всех существующих установках неравенство (1) выполняется с большим запасом, мы ограничимся рассмотрением этого случая.

Матричный элемент перехода из начального состояния частицы во внешнем электромагнитном поле $|i\rangle$ в соответствующее конечное состоя-

---

[1)] Подобная методика применялась Швингером [4] для нахождения квантовых поправок к интенсивности излучения электронов в магнитном поле.

ние $|f\rangle$ с излучением фотона в низшем порядке теории возмущений запишем в виде (в дальнейшем $c = 1$)

$$U_{fi} = -\left\langle f \left| \int \{j_\mu, A^\mu\} dt \right| i \right\rangle =$$

$$= \left\langle f \left| \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\hbar\omega}} \int e^{i\omega t} M(t)\, dt \right| i \right\rangle, \tag{3}$$

где

$$eM(t) = \{\mathbf{j}(t)\mathbf{e}, e^{-i\mathbf{kr}(t)}\}. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{j}(t)$, $\mathbf{r}(t)$ — соответственно операторы тока и координаты частицы, $\mathbf{e}$ — вектор поляризации фотона (выбрана калибровка с $e_0 = 0$), скобки $\{\ \ \}$ означают симметризованное произведение операторов.

Просуммировав вероятность перехода по всем конечным состояниям частицы, получаем следующее выражение для вероятности радиационного перехода:

$$dw = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \left\langle i \left| \int dt_1 \int dt_2 e^{i\omega(t_1 - t_2)} M(t_1) M^*(t_2) \right| i \right\rangle. \tag{5}$$

Приведенное выражение может быть использовано для изучения любых явлений при излучении фотона частицей во внешнем электромагнитном поле. В интересующем нас случае движения электронов (позитронов) во внешнем электромагнитном поле представим (4) в виде

$$M(t) = u^+(\zeta_f)(\alpha\mathbf{e}) e^{-i\mathbf{kr}(t)} u(\zeta_i), \tag{6}$$

где $u(\zeta_f)$, $u(\zeta_i)$ — решения уравнения Дирака в произвольном электромагнитном поле в операторной форме; ζ_i, ζ_f характеризуют начальное и конечное спиновые состояния.

Квантовые эффекты, возникающие при движении ультрарелятивистского электрона во внешнем магнитном поле, бывают двух типов. Первый из них связан с квантовым характером самого движения электрона в магнитном поле. Учитывая, что в первом порядке по $\hbar$

$$[\mathbf{vv}] = i\frac{\hbar e}{E^2}[(1 - \mathbf{v}^2)\mathbf{H} + (\mathbf{vH})\mathbf{v}], \tag{7}$$

ясно, что неопределенность в определении компонент скорости электрона

$$\Delta v_1 \Delta v_2 \sim \hbar eH/E^2 = \hbar\omega_0/E. \tag{8}$$

Отсюда очевидно следует, что с ростом энергии движение электрона в магнитном поле становится все более «классическим», так как компоненты скорости становятся определенными [4].

Второй вызывается отдачей электрона при излучении фотона и имеет поэтому порядок $\hbar\omega / E$. Поскольку $\omega \sim \omega_0\gamma^3$ и нас в дальнейшем будет интересовать только главный член разложения по $\hbar$ и $1/\gamma$, то некоммутацией компонент скорости можно пренебречь и учитывать только некоммутацию операторов динамических переменных электрона с полем излученного фотона.

С учетом сказанного выше, операторное решение уравнения Дирака имеет вид

$$u(\zeta) = \sqrt{\frac{H + m}{2H}} \begin{pmatrix} \varphi(\zeta(t)) \\ \dfrac{\sigma\mathbf{P}(t)}{H + m}\varphi(\zeta(t)) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $H = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2}$, $\varphi(\zeta(t))$ — двухкомпонентный спинор, описывающий спиновые состояния электрона в момент времени t.

В данной работе нас интересует вероятность радиационного перехода с переворотом спина, поэтому оказывается удобным представить

$$\varphi(\zeta_f) = e^{i\sigma a\pi/2}\varphi(\zeta_i) = i(\sigma\mathbf{a})\,\varphi(\zeta_i), \tag{10}$$

где $\mathbf{a}$ — единичный вектор, перпендикулярный оси квантования спина $\zeta_i \equiv \zeta$.

Учитывая, что

$$\varphi_i\varphi_f^{+} = -{}^1/_2 i(\mathbf{a} + i[\zeta\mathbf{a}])\sigma \equiv -{}^1/_2 i(\mathbf{b}\sigma), \tag{11}$$

и выполняя необходимые коммутации, легко получить для матричного элемента

$$M(t) = \frac{\hbar}{2H} e^{-i\mathbf{kr}(t)}(\mathbf{b}(t)[\mathbf{q}(t)\mathbf{e}]), \tag{12}$$

где

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t)\,\omega/(H+m) - \mathbf{k}. \tag{13}$$

Видно, что выражение (12) для матричного элемента пропорционально $\hbar$, поэтому некоммутацией входящих операторов можно пренебречь, поскольку учет ее дает поправки высшего порядка по $\hbar$, которые нас не интересуют. Поэтому все операторы в формуле (5), стоящие в обкладках начального состояния, можно заменить на их классические значения.

В интеграле (5) перейдем к новым переменным

$$t = (t_1 + t_2)/2, \qquad \tau = t_2 - t_1. \tag{14}$$

Поскольку нас интересует вероятность перехода в единицу времени $dw\,/\,dt$, то в интеграле (5) (после интегрирования по конечным состояниям фотона) остается выполнить интегрирование только по относительному времени τ. Как будет видно в дальнейшем, основной вклад в вероятность перехода дает область $|\dot{\mathbf{v}}|\tau \sim 1\,/\,\gamma$ [2], по этой причине мы будем разлагать все входящие величины по степеням $|\dot{\mathbf{v}}|\tau$, что соответствует разложению по $1\,/\,\gamma$, и оставлять только старшие члены разложения. Кроме того, мы будем пренебрегать величинами

$$|\dot{\mathbf{H}}|\tau/|\mathbf{H}| \ll 1, \tag{15}$$

где $|\dot{\mathbf{H}}|$ характеризует изменение магнитного поля на траектории. Если поле описывать через показатель неоднородности n, то условие (15) имеет вид $n\,/\,\gamma \ll 1$.

Выполняя это разложение для величин в $\mathbf{b}(t_1)$ и в $\mathbf{b}(t_2)$ и оценивая высшие члены разложения с помощью уравнения движения спина $\zeta(t)$ во внешнем магнитном поле [5], легко показать, что эти члены дают вклад $\sim 1\,/\,\gamma$, так что можно положить

$$\mathbf{b}(t_1) = \mathbf{b}(t_2) = \mathbf{b}(t). \tag{16}$$

Естественно, что результат не зависит от направления вектора $\mathbf{a}$ в плоскости, перпендикулярной вектору ζ, поэтому оказывается удобным воспользоваться формулой суммирования

$${}^1/_2 \sum_{\lambda=1} b_i^{(\lambda)} b_j^{(\lambda)*} = \delta_{ij} - \zeta_i\zeta_j - i\varepsilon_{ijk}\zeta_k. \tag{17}$$

[2] Представляется более удобным вместо частоты обращения ω_0 пользоваться характеристикой $|\dot{\mathbf{v}}|$.

Выполняя также суммирование по поляризациям фотона, получаем

$$\sum M_1M_2^* = \frac{\hbar^2}{4E^2} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}\left\{ (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\left(1-\frac{(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{k})^2}{\omega^2}\right)+\frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{k})\cdot\right.$$
$$\left.\cdot[(\mathbf{q}_1\boldsymbol{\zeta})(\mathbf{q}_2\mathbf{k})+(\mathbf{q}_2\boldsymbol{\zeta})(\mathbf{q}_1\mathbf{k})]-i\left(\left(\boldsymbol{\zeta}-\frac{(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{k})\mathbf{k}}{\omega^2}\right)[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2]\right)\right\}, \qquad (18)$$

где индексы 1 и 2 означают соответственно зависимость от t_1 и t_2. Входящие в формулу (18) величины можно разложить следующим образом:

$$\mathbf{q}_1 = (\omega\mathbf{v}-\mathbf{k}) - \frac{\omega\tau}{2}\dot{\mathbf{v}} - \frac{\omega}{\gamma}\mathbf{v} + \ldots,$$
$$\mathbf{q}_2 = (\omega\mathbf{v}-\mathbf{k}) + \frac{\omega\tau}{2}\dot{\mathbf{v}} - \frac{\omega}{\gamma}\mathbf{v} + \ldots, \qquad (19)$$
$$\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 = \tau\mathbf{v} + \frac{\tau^3}{24}\ddot{\mathbf{v}} + \ldots$$

Для получения полной вероятности радиационного перехода с переворотом спина следует провести интегрирование по импульсу фотона. Последнее оказывается удобным выполнить до интегрирования по τ, воспользовавшись формулой

$$\int e^{-i(ky)} f(k_\mu)\frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\frac{4\pi}{(y_0-i\varepsilon)^2-\mathbf{y}^2}, \qquad (20)$$

где

$$y_0=\tau=t_2-t_1, \quad \mathbf{y}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \qquad (21)$$
$$y^2 = y_0^2-\mathbf{y}^2 = \tau^2\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\tau^2}{12}\dot{\mathbf{v}}^2\right)+\ldots$$

С учетом формул (19)—(21) после несложных выкладок можно получить следующее выражение для полной вероятности перехода:

$$W^{\zeta}(t) \equiv \frac{dw}{dt} = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar^2}{m^2}\gamma^5|\dot{\mathbf{v}}|^3\cdot$$
$$\cdot\oint\frac{dz}{(1+z^2/12)^3}\left[\frac{3}{z^4}-\frac{5}{12z^2}+\left(\frac{1}{z^4}+\frac{5}{12z^2}\right)(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{v})^2-\frac{2i}{z^3|\dot{\mathbf{v}}|}(\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}])\right], \qquad (22)$$

где сделана замена $z=\tau\gamma|\dot{\mathbf{v}}|$, а контур интегрирования проходит ниже вещественной оси. Отсюда видно, что основной вклад в интеграл дает область $|\dot{\mathbf{v}}|\tau\sim1/\gamma$. Входящие в формулу (22) контурные интегралы легко получаются из следующей универсальной формулы:

$$I_{nm} \equiv \oint\frac{dz}{z^n(1+z^2/12)^m} =$$
$$= \frac{i^n\pi(\sqrt{12})^{1-n}}{(m-1)!}\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n+1}{2}+m-2\right),$$
$$m \geqslant 1. \qquad (23)$$

В итоге получаем следующую формулу для полной вероятности радиационного перехода с переворотом спина в единицу времени:

$$W^{\zeta} = \frac{5\sqrt{3}}{16}\alpha\frac{\hbar^2}{m^2}\gamma^5|\dot{\mathbf{v}}|^3\left\{1 - \frac{2}{9}(\zeta\mathbf{v})^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15|\dot{\mathbf{v}}|}(\zeta[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}])\right\}. \tag{24}$$

В однородном магнитном поле выражение (24) переходит в известную вероятность радиационного перехода с переворотом спина для случаев поперечной поляризации $(\zeta\mathbf{v}) = 0$ и продольной поляризации $(\zeta\mathbf{v}) = 1$ для электронов $e < 0$ и позитронов $e > 0$ [2]. В неоднородном магнитном поле сохраняется вывод, что для продольной поляризации вероятность радиационного перехода с переворотом спина не зависит от ориентации спина, для поперечной поляризации такая зависимость, вообще говоря, имеет место.

Как мы видим из приведенного расчета, неоднородность магнитного поля n входит в задачу в виде комбинации n/γ и, коль скоро рассматривается случай $n/\gamma \ll 1$, процесс излучения носит такой же характер, как в однородном поле. Это связано с тем, что излучение фотона происходит на длине, много меньшей характерной длины неоднородности магнитного поля.

Выражение (24) содержит величины, зависящие от времени. Нас же, естественно, интересуют средние по времени. Для общего анализа радиационной поляризации в конкретных условиях необходимо решить классические уравнения движения частицы и вектора спина [5], подставить их в (24) и провести усреднение по времени. В случае аксиально симметричного слабофокусирующего неоднородного магнитного поля среднее по времени выражение для вероятности радиационного перехода с переворотом спина с точностью до поправочных членов $a^2/\bar{R}^2$ (a — амплитуда поперечных колебаний, $\bar{R}$ — средний радиус кривизны орбиты) имеет такой же вид, как в однородном магнитном поле (в качестве радиуса входит $\bar{R}$). Величины $a^2/\bar{R}^2$ весьма малы (10^{-3}—10^{-4}) для всех современных установок.

Таким образом, эффект радиационной поляризации, вообще говоря, имеет место и в неоднородном поле и, следовательно, может наблюдаться в современных накопителях, если устранить влияние деполяризующих факторов [6].

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 26 декабря 1966 г.

Литература

[1] А. А. Соколов, И. М. Тернов. ДАН СССР, **153**, 1052, 1963.

[2] И. М. Тернов, В. Г. Багров, Р. А. Рзаев. Вестник МГУ, серия III, № 4, 1964.

[3] В. Н. Байер, В. М. Катков. Ядерная физика, **3**, 81, 1966.

[4] J. Schwinger. Proc. Nat. Acad. Sci., **40**, 132, 1954.

[5] D. Fradkin, R. Good. Rev. Mod. Phys., **33**, 343, 1961.

[6] В. Н. Байер, Ю. Ф. Орлов. ДАН СССР, **165**, 783, 1965.

RADIATIVE POLARIZATION OF ELECTRONS IN A MAGNETIC FIELD

V. N. Bayer, V. M. Katkov

Electron polarization due to radiation in a nonuniform magnetic field is investigated by applying the operator formulation of the quasiclassical approximation. A general expression is obtained for the radiative transition probability involving spin flip in an arbitrary magnetic field.