

## ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ В ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев

Исследуются явления переноса в разреженной плазме, связанные с тороидальным дрейфом частиц. Показано, что наличие так называемых «запертых» частиц приводит к резкому возрастанию коэффициентов переноса приблизительно на фактор  $(R/r)^{3/2}$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно большой и малый радиусы тора.

### 1. Введение

Недавно в эксперименте с термически ионизованной цезиевой плазмой в тороидальной магнитной ловушке было показано, что существует область параметров, при которых время жизни плазмы, полностью оторванной от стенок, определяется классическими процессами переноса вследствие кулоновских соударений [1]. В тороидальных ловушках перемешивание плазмы вследствие дрейфового движения в тороидальном магнитном поле может приводить к значительному увеличению коэффициентов переноса по сравнению с обычным случаем диффузии плазмы поперек магнитного поля. Это явление впервые было рассмотрено Будкером [2]. Пфирц и Шлютер [3] провели количественный анализ для случая амбиполярной диффузии (см. также [4-6], где результаты Пфирца и Шлютера воспроизводятся иными способами). Шафрановым был найден коэффициент теплопроводности [7].

Таким образом, упомянутые работы подтвердили и уточнили предположение, высказанное в [2], а вычисленный коэффициент амбиполярной диффузии согласуется с экспериментальным [1].

В настоящей статье показано, что в действительности в достаточно разреженной плазме в тороидальных ловушках явления переноса вследствие парных соударений могут протекать существенно быстрее (на фактор порядка  $(R/r)^{3/2}$ ), чем это следовало бы из экстраполяции результатов работ [3-7] на случай очень редких столкновений. Это связано, как будет показано ниже, с эффективным увеличением частоты кулоновских соударений, имеющим место для «запертых» частиц.

### 2. Тороидальные дрейфы отдельных частиц

Рассмотрим простейшую модель магнитного поля тороидальной ловушки (см. рис. 1).

Здесь плоскость  $(r, \theta)$  содержит тороидальную ось  $AB$ , а расстояние вдоль периметра отсчитывается с помощью угловой координаты  $\zeta$ . Основное магнитное поле представляет собой поле прямого тока, протекающего вдоль оси  $AB$ :

$$\mathbf{H} \approx H_0 \left( 1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\zeta, \quad \varepsilon \equiv \frac{r}{R} \ll 1. \quad (1)$$

Дополнительное поле

$$\Delta H = -\frac{ir}{2\pi R} H_0 e_0, \quad \Theta \equiv \frac{ir}{2\pi R} \ll 1 \quad (2)$$

создает вращательное преобразование. Величина вращательного преобразования  $i(r)$  является функцией только координаты  $r$ . Изменением абсолютной величины основного магнитного поля  $H$  за счет добавочного мы пренебрежем при условии, что  $\Theta^2 \ll \varepsilon$ . Для выбранной нами конфигурации магнитные поверхности задаются уравнением  $r = \text{const}$ .

Давление плазмы, удерживаемой в этом поле, предполагается малым:

$$\beta \equiv 4\pi n(T_i + T_e)/H^2 \ll 1,$$

так что возмущением магнитного поля за счет присутствия плазмы можно пренебречь. Кроме того, ларморовский радиус частиц настолько мал, что искажение функции распределения частиц под действием тороидального дрейфа невелико и не приводит поэтому к возникновению заметных электрических полей вдоль магнитной поверхности. Это должно иметь место при условии (см. [8])

$$\frac{r_{ci} dn}{\Theta n dr} \ll 1, \quad (3)$$

где  $r_{ci}$  — ларморовский радиус ионов,  $n(r)$  — плотность частиц плазмы. Для описания движения частиц мы воспользуемся дрейфовым приближением. В силу тороидальной симметрии системы достаточно рассмотреть проекцию траекторий частиц на  $(r, \vartheta)$ -плоскость. Уравнения для «ведущего» центра частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  в радиальном электрическом поле с потенциалом  $\Phi(r)$  и магнитном поле (1) имеют хорошо известный вид:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\mu H_0/m + v_{\parallel}^2}{\omega_c R} \sin \vartheta, \quad \mu \equiv \frac{mv_{\perp}^2}{2H_{\zeta}^2}, \quad (4)$$

$$r \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\mu H_0/m + v_{\parallel}^2}{\omega_c R} \cos \vartheta + \frac{c}{H_{\zeta}} \frac{d\Phi}{dr} - \Theta v_{\parallel}, \quad (5)$$

где  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  — компоненты скорости, перпендикулярная и параллельная направлению магнитного поля,  $\omega_c = eH_0/mc$  — гирочастота. В правой части (5) кроме диамагнитного, центробежного и электрического дрейфов учтено вращение частицы вокруг основного магнитного поля  $H_{\zeta}$  при наличии вращательного преобразования. Используя постоянство энергии частицы  $E$  и сохранение адиабатического инварианта  $\mu = mv_{\perp}^2/2H_{\zeta}^2$ , мы можем найти продольную скорость частицы  $v_{\parallel}$  с заданными  $E$ ,  $\mu$ :

$$v_{\parallel} = \sigma \left\{ \frac{2}{m} [E - e\Phi(r) - \mu H_{\zeta}(r, \vartheta)] \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в систему уравнений движения (4), (5), получаем еще одну константу движения

$$J = \omega_c \int_0^r \Theta dr + v_{\parallel} (1 + \varepsilon \cos \vartheta). \quad (7)$$

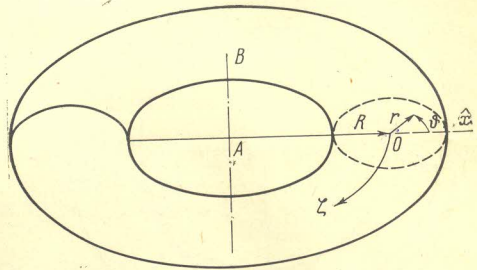


Рис. 1. Общий вид тороида

В полях с более сложной геометрией эта величина играет роль продольного адиабатического инварианта [9].

В пределе (3) отклонение частиц от магнитной поверхности очень мало и мы можем разложить величину  $J$  по этому отклонению. Выбирая в качестве начала отсчета точку  $(r_0, 0)$  и разлагая  $J(r, \vartheta)$  вплоть до второго порядка по радиальному отклонению частицы, получаем уравнение траектории в виде [8]

$$r - r_0 \cong \{ \Delta v \pm [(\Delta v)^2 + 2r_0 \omega_c v_g (\cos \vartheta - 1)]^{1/2} \} / \omega_c \Theta, \quad (8)$$

где

$$\Delta v(r_0, 0) = v_{\parallel}(r_0, 0) - v_E(r_0) / \Theta,$$

$$v_E \equiv \frac{c}{H} \frac{d\Phi}{dr},$$

$$v_g = \frac{\mu H_0 / m + v_E^2 / \Theta^2}{\omega_c R}.$$

Отсюда видно, что в тороидальном магнитном поле с вращательным преобразованием частицы со скоростями  $(\Delta v)^2 < 4r_0 \omega_c v_g$  оказываются «запертыми». Это связано с тем, что силовая линия магнитного поля за счет вращательного преобразования

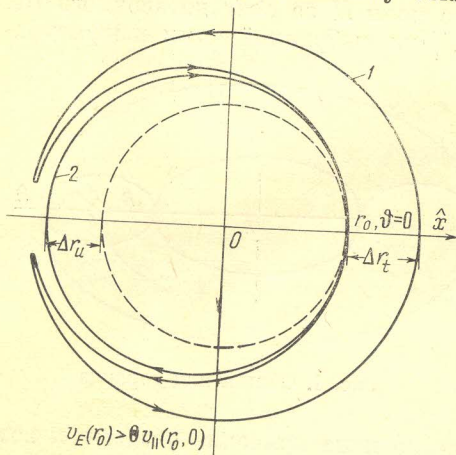


Рис. 2. Траектории «запертых» (1) и пролетных (2) частиц

переходит с внутренней части тороидальной трубы на внешнюю и наоборот. Поэтому величина магнитного поля оказывается переменной вдоль силовой линии (на внутренней части тороида больше, а на внешней меньше). Наибольшее смещение от магнитной поверхности имеют слабо захваченные частицы

$$\Delta r_t(\vartheta = 0) = 4[\mu H_0 / m + v_E^2 \Theta^{-2}]^{1/2} / \omega_c \Theta$$

(см. рис. 2). Пролетные же частицы, близкие к захвату, имеют вдвое меньшее смещение  $\Delta r_u = 0,5 \Delta r_t$ . Смещение пролетных частиц со скоростью  $\Delta v \sim v$  оказывается малым, порядка  $\varepsilon^{1/2}$ , по сравнению со смещением захваченных частиц.

Движение частиц во времени описывается уравнением движения по координате  $\vartheta$ . Пренебрегая тороидальным дрейфом, мы переписываем его в безразмерных переменных [10]:

$$r \frac{d\vartheta}{dt} = -\sigma_* \Theta \left[ \left( v^2 + \frac{v_E^2}{\Theta^2} \right) \varepsilon \right]^{1/2} [2\kappa^2 - 1 + \cos \vartheta]^{1/2}, \quad (9)$$

где

$$v^2 = 2(E - e\Phi(r)) / m, \quad \sigma_* = \text{sign} \Delta v(r, \vartheta), \\ 2\kappa^2 = [\Delta v(r_0, 0)]^2 / (v^2 + v_E^2 \Theta^{-2}) \varepsilon.$$

Отсюда следует, что движение захваченных частиц можно описать в терминах эллиптических функций с модулем  $\kappa^2 < 1$ . Период колебания захваченных частиц вдоль замкнутой траектории есть

$$\tau = \frac{4r}{[\Theta^2 v^2 + v_E^2]^{1/2} \varepsilon^{1/2}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{[2(\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2))]^{1/2}} = \\ \frac{4\sqrt{2}rK(\kappa)}{\Theta [\varepsilon (v^2 + v_E^2 \Theta^{-2})]^{1/2}} \quad (10)$$

где  $K(x)$  — полный эллиптический интеграл первого рода, а  $\vartheta_0$  — нуль подкоренного выражения.

Наша задача теперь заключается в том, чтобы учесть влияние столкновений на рассмотренное дрейфовое движение и показать, каким образом возникают процессы переноса в такой плазме.

### 3. Процессы переноса в разреженной максвелловской плазме

Мы воспользуемся кинетическими уравнениями Больцмана в дрейфовом приближении со столкновительным членом в форме Ландау

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + [\mathcal{H}, f_j] = \text{St} \{f_j\}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, f_j] &\equiv \left\{ -\frac{\mu H_0/m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj}R} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} + \left( -\Theta v_{\parallel} + \frac{c}{H_0} \frac{d\Phi}{dr} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mu H_0/m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj}R} \cos \vartheta \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \Theta \frac{\mu H_0/m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj}R} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right\} f_j, \\ \text{St} \{f_j\} &\equiv - \sum_{j'} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} 2\pi \lambda \frac{e_j^2 e_{j'}^2}{m_j} \int dv' \left[ \frac{\delta_{\alpha\beta}}{u} - \frac{u_{\alpha} u_{\beta}}{u^3} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left( \frac{f_j(v)}{m_j} \frac{\partial f_{j'}(v')}{\partial v_{\beta'}} - \frac{f_{j'}(v')}{m_j} \frac{\partial f_j(v)}{\partial v_{\beta}} \right); \quad u_{\alpha} = v_{\alpha} - v'_{\alpha}. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай не очень редких столкновений, когда за период обращения захваченной частицы по замкнутой траектории  $\tau$  из-за столкновений успевает установиться максвелловское распределение в узкой области с размерами  $\Delta v \sim \sqrt{\epsilon} v_T$  ( $v_{Tj} = \sqrt{2T_j/m_j}$  — тепловая скорость частицы). Время установления равновесия в этой узкой области может быть оценено из выражения для столкновительного члена (11) и равно по порядку величины следующей величине:

$$\tau_p = \epsilon v_j^{-1}, \quad v_j = \frac{16 \sqrt{\pi} \lambda e^4 n(r)}{3 m_j v_{Tj}^3}. \quad (12)$$

С другой стороны, мы будем предполагать, что для большинства частиц можно пренебречь столкновениями. Таким образом, наши ограничения на частоту столкновений можно выразить неравенствами

$$\Theta \sqrt{v_{Tj}^2 + v_E^2 \Theta^{-2}} / r > v_j > \epsilon^{3/2} \Theta \sqrt{v_{Tj}^2 + v_E^2 \Theta^{-2}} / r. \quad (13)$$

Решение кинетического уравнения можно искать тогда в виде разложения по параметру тороидальности. Представим функцию распределения в виде

$$f_j(\mu, v_{\parallel}; r, \vartheta) = f_j^{(0)}(\mu, v_{\parallel}, r) + f_j^{(1)}(\mu, v_{\parallel}; r, \vartheta), \quad (14)$$

где

$$f_j^{(0)} = \frac{n_j(r)}{\pi^{3/2} v_{Tj}^3} \exp \left[ -\frac{2\mu H/m_j + v_{\parallel}^2}{v_{Tj}^2} - \frac{2e_j \Phi(r)}{v_{Tj}^2} \right]$$

— локально максвелловская функция, а поправка  $f_j^{(1)}$  учитывает эффекты тороидальности. Линеаризуя кинетическое уравнение (11), переписываем

его в виде

$$\begin{aligned} & (-\Theta v_{\parallel} + v_E) \frac{\partial f_j^{(4)}}{r \partial \vartheta} = -v_j f_j^{(4)} + \\ & + \frac{\mu H_0 / m_j + v_{\parallel}^2}{R} \sin \vartheta \left[ -\Theta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{cj}} \frac{\partial}{\partial r} \right] f_j^{(0)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь столкновительный член мы записали для простоты в  $\tau$ -приближении. В случае очень редких столкновений такой выбор оправдан, а сам учет столкновений необходим лишь для корректного обхода возникающих сингулярностей. Представляя далее зависимость от угла  $\vartheta$  в экспоненциальной форме, находим решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} f_j^{(4)} = \sum_{(\pm)} \left\{ \left( \frac{\mu}{m_j} H_0 + v_{\parallel}^2 \right) / R \right\} \left\{ \left[ \Theta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\omega_{cj}} \frac{\partial}{\partial r} \right] f_j^{(0)} \left( \frac{v_E}{r} - \frac{\Theta v_{\parallel}}{r} \mp i v_j \right)^{-1} \right\} e^{\pm i \vartheta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Домножая это выражение на скорость дрейфа частиц по радиусу  $-(\mu H_0 / m_j + v_{\parallel}^2) / \omega_{cj} R \sin \vartheta$

и интегрируя по скоростям, получаем поток частиц поперек магнитного поля:

$$\begin{aligned} \langle n v \rangle_j &= -\frac{1}{m_j} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} d\mu H_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} f_j^{(4)} \frac{\mu H_0 / m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj} R} \sin \vartheta = \\ &= -\frac{\pi}{m_j} \int_0^{\infty} d\mu H_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \frac{(\mu H_0 / m_j + v_{\parallel}^2)^2}{\omega_{cj} R^2} \pi \delta(v_E - \Theta v_{\parallel}) \cdot \\ &\quad \cdot r \left[ -\Theta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_{cj}} \frac{\partial}{\partial r} \right] f_j^{(0)}. \end{aligned}$$

После довольно простых вычислений находим

$$\langle n v \rangle_j = -\frac{\pi \varepsilon^2 r_{cj}^2}{2r} v_{Tj} F_j \left( \frac{v_E}{\Theta} \right) \left\{ 1 + \left( 1 + \frac{3v_E^2}{\Theta^2 v_{Tj}^2} \right) \right\} \frac{dn_j}{dr}, \quad (17)$$

где  $F_j = \pi^{-1/2} \exp(-v_E^2 / \Theta^2 v_{Tj}^2)$  — относительная плотность захваченных частиц в фазовом пространстве скоростей.

Интересно отметить, что поток частиц пропорционален как бы работе частиц в поле «магнитостатической волны кривизны» магнитного поля (сравните с затуханием Ландау в бесстолкновительной плазме). В известном смысле такая диффузия частиц является результатом действия силы трения о «волну». Вполне естественно поэтому, что диффузия не обязательно является амбиполярной. Определяя коэффициент диффузии, как обычно,

$$D_{\perp j} = -\langle n v \rangle_j / \nabla n,$$

из (17) находим его в форме

$$D_{\perp j} = \frac{\Delta r_{tj}^2}{\tau_j} \sqrt{\varepsilon} F_j, \quad (18)$$

где фактор  $\sqrt{\varepsilon} F_j$  учитывает малость числа захваченных частиц; оценка для отклонения последних от магнитной поверхности  $\Delta r_t$  была дана рань-

ше, а время размешивания для них оказалось порядка времени оборота по замкнутой орбите. Последнее вполне естественно, поскольку именно за это время существенно нарушается локально максвелловское распределение, поддерживаемое частыми столкновениями.

В силу квазинейтральности плазмы в ней должно устанавливаться такое электрическое поле, которое уменьшает величину диффузии ионов до уровня электронной диффузии. С большой точностью величина этого поля может быть определена из условия

$$e\Phi(r) = T_i \ln n(r). \quad (19)$$

Диффузия при этом становится амбиполярной, а коэффициент диффузии определяется формулой (17), вычисленной для электронов при условии (19):

$$D_{\perp} = \frac{2\sqrt{\pi} \varepsilon^2 r_{ce} c T_e}{|\Theta| r e H_0} \quad \varepsilon^{3/2} \frac{\Theta v_{Te}}{r} < v_e < \frac{\Theta v_{Te}}{r}. \quad (20)$$

Коэффициент теплопроводности для ионов при этом оказывается по-прежнему существенно больше, чем для электронов:

$$\chi_{\perp i} = \frac{3\sqrt{\pi} \varepsilon^2 r_{ci} c T_i}{2|\Theta| r e H_0}, \quad \varepsilon^{3/2} \frac{\Theta v_{Ti}}{r} < v_i < \frac{\Theta v_{Ti}}{r}. \quad (21)$$

#### 4. Равновесие и процессы переноса в случае очень редких столкновений

Обратимся теперь к рассмотрению случая очень редких столкновений, когда время релаксации распределения захваченных частиц из-за столкновений гораздо больше периода их движения:

$$\tau_p \sim \varepsilon v_j^{-1} \gg \tau_j = r / \Theta v_{Tj} \sqrt{\varepsilon}. \quad (22)$$

В этом случае в первом приближении можно пренебречь столкновениями вообще и сразу написать решение кинетического уравнения в виде функций от интегралов движения:

$$f_i = f_i^{(0)}(\mu, E, J), \quad f_u = f_u^{(0)}(\mu, E, J, \sigma), \quad (23)$$

где  $f_i^{(0)}$ ,  $f_u^{(0)}$  — функции распределения захваченных и пролетных частиц. Производные от определенных таким образом функций распределения по продольным скоростям (а иногда даже и сами функции) испытывают разрыв на поверхности, разграничивающей фазовые объемы захваченных и незахваченных частиц [8]. Это не удивительно, поскольку изменение топологии траекторий происходит на этой поверхности также скачком (см. рис. 2). Однако при наличии даже сколь угодно слабых столкновений вблизи этой поверхности должен образоваться некоторый переходный слой, в котором бы происходил непрерывный переход функций  $f_i^{(0)}$  и  $f_u^{(0)}$  друг в друга. В предыдущем разделе мы нашли, что диффузия частиц поперек магнитного поля обязана взаимодействию частиц с «магнито-статической волной кривизны» магнитного поля и поэтому ранее она была аналогична бесстолкновительному затуханию этой волны в максвелловской плазме. Соответственно сейчас нам требуется подсчитать работу частиц в поле этой волны в случае очень редких столкновений, когда нужно учитывать релаксацию распределения резонансных частиц под действием волны. Аналогичная задача о затухании плазменной волны конечной

амплитуды была исследована качественно в [11], а ее строгое количественное решение было дано Захаровым и Карпманом [12]. В результате было показано, что декремент затухания уменьшался в разреженной плазме пропорционально частоте столкновений. В дальнейшем мы будем следовать методу, использованному в этой работе.

Будем решать кинетическое уравнение методом последовательных приближений и представим поэтому функцию распределения частиц в виде

$$f_j = f_j^{(0)}(E, \mu, J; \sigma) + f_j^{(1)}(E, \mu, J; \sigma; \vartheta) + \dots \quad (24)$$

Кроме того, мы можем линеаризовать столкновительный член, поскольку отклонения от максвелловского распределения существенны лишь в малой окрестности скоростей захваченных частиц. Тогда кинетическое уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & (-\Theta v_{\parallel} + v_E) \frac{\partial f_j^{(1)}}{r \partial \vartheta} + \Theta \frac{\mu H_0 / m_j + v_E^2 \Theta^{-2}}{R} \sin \vartheta \frac{\partial f_j^{(1)}}{\partial v_{\parallel}} = \\ & = \sum_j \frac{2\pi \lambda e_j^2 e_j^2}{m_j} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} \left\{ \left( \eta_{j'} + \eta_{j'}' - \frac{\eta_{j'}}{2x_{j'}} \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left[ \frac{\delta_{\alpha\beta}}{v} - \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{v^3} \right] + \frac{v_{\alpha} v_{\beta}}{v^3} \frac{\eta_{j'}}{x_{j'}} \right\} \left( \frac{\partial f_j^{(0)}}{m_j \partial v_{\beta}} + \frac{2v_{\beta}}{m_j v_{Tj}^2} f_j^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{j'} & \equiv \eta(x_{j'}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_{j'}} e^{-t} \sqrt{t} dt, \\ \eta_{j'}'(x_j) & = \frac{\partial \eta(x_j)}{\partial x_j}, \quad x_j = \frac{2\mu H_0}{m_j v_{Tj}^2}. \end{aligned}$$

Здесь мы пренебрегли производной от поправки к функции распределения по координате  $r$  в силу выполнения неравенства

$$\sqrt{\varepsilon} \partial f_j^{(1)} / \partial r \ll \partial f_j^{(1)} / r \partial \vartheta.$$

Далее, в первом приближении функция распределения наиболее чувствительна к изменениям продольной скорости и поэтому в уравнении (25) можно пренебречь всеми остальными производными. Мы пренебрежем также всеми квадратичными по электрическому полю членами, поскольку в силу предположения о малости ларморовского радиуса ионов (3) и условия амбиполярности диффузии (19) имеем

$$\frac{v_E}{\Theta v_{Ti}} = \frac{r_{ci}}{2\Theta n} \frac{dn}{dr} \ll 1. \quad (26)$$

Перейдем, наконец, к новым переменным  $\mu$ ,  $\kappa^2$ ,  $\vartheta$ , используя следующее соотношение для замены переменных:

$$v_{\parallel} = \frac{v_E}{\Theta} + 2\sigma \left[ \frac{\mu}{m} H_0 \varepsilon \left( \kappa^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right]^{1/2}. \quad (27)$$

Тогда кинетическое уравнение примет вид

$$-\Theta v_{Tj} \sqrt{2x_j \varepsilon} \frac{\partial f_j^{(1)}}{r \partial \vartheta} = \varepsilon^{-1} v_j A(x_j) \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \left\{ \sigma \left( \kappa^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right\}^{1/2}.$$

$$\cdot \left( \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \kappa^2} + 2x_j \varepsilon f_j^{(0)} \right) + c_j \sqrt{2x_j \varepsilon} f_j^{(0)} \Big\}, \quad (28)$$

где

$$A_j(x_j) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \sum_{j'} \left( \eta_{j'} + \eta_{j'}' - \frac{\eta_{j'}'}{2x_{j'}} \right) x_j^{-3/2}, \quad c_j \equiv \frac{v_E}{\Theta v_{Tj}}.$$

Интегрируя обе части (28) по углу  $\vartheta$  в пределах  $(0, 2\pi)$ , из условия периодичности всех физических величин по угловой координате  $\vartheta$  находим уравнение для функции  $f_j^{(0)}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \kappa^2} \left[ \int_0^{2\pi} \left\{ \sigma \sqrt{\kappa^2 - \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \left( \frac{\partial f_j^{(0)}}{\partial \kappa^2} + 2x_j \varepsilon f_j^{(0)} \right) + c_j \sqrt{2x_j \varepsilon} f_j^{(0)} \right\} d\vartheta \right] = 0. \quad (29)$$

Рассмотрим сначала пролетные частицы. Будем искать такое решение, которое, являясь функцией констант движения  $(J - 2\sigma\sqrt{\mu H_0 \varepsilon} / m\kappa / \Theta)$ ,  $\mu$ ,  $\kappa^2$ , в пределе  $\kappa^2 \rightarrow \infty$  переходит в максвелловское распределение. Воспользовавшись результатами работ Берка и Галева [8], а также Захарова и Карпмана [12], находим интересующее нас решение:

$$f_{uj}^{(0)} = \frac{n_j(r)}{\pi^{3/2} v_{Tj}^3} \exp \left[ -\frac{e\Phi(r)}{T_j} - x_j - c_j^2 - 2x_j \varepsilon \kappa^2 - \frac{\pi \sigma \sqrt{2\varepsilon x_j} c_j}{2} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} E(t^{-1/2})} \right] \cdot \left\{ 1 + \frac{\sigma \sqrt{2x_j \varepsilon} r_{cj}}{\Theta n(r)} \frac{dn(r)}{dr} \left( \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} - \frac{1}{2} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} E(t^{-1/2})} \right) \right\}, \quad (30)$$

где  $E(t^{-1/2})$  — полный эллиптический интеграл второго рода, а выражение в фигурной скобке есть по существу два первых члена разложения функции от третьей константы движения:

$$N \left\{ \omega_{cj} \int_0^r \Theta dr + 2\sigma \sqrt{\mu H_0 \varepsilon} / m_j \left( \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} - \frac{1}{2} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} E(t^{-1/2})} \right) \right\} \approx \approx n(r) + \frac{2\sigma \sqrt{\mu H_0 \varepsilon} / m_j}{\omega_{cj} \Theta} \frac{dn(r)}{dr} \left( \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} - \frac{1}{2} \int_1^{\kappa^2} \frac{dt}{t^{1/2} E(t^{-1/2})} \right), \quad (31)$$

где

$$N \left( \omega_{cj} \int_0^r \Theta dr \right) \equiv n(r).$$

Нахождение функции распределения захваченных частиц облегчается благодаря тому обстоятельству, что она должна быть симметричной относительно знака продольной скорости  $\sigma$ . Следовательно, она должна обращать в нуль все члены в правой части кинетического уравнения (28), содержащие  $\sigma$ . Для решения следующего вида (сравни с (30)):

$$f_{tj}^{(0)} = \frac{n(r)}{\pi^{3/2} v_{Tj}^3} e^{-x_j F_j(\kappa^2)} \left\{ 1 + \frac{\sigma \sqrt{2x_j \varepsilon} r_{cj}}{\Theta n(r)} \frac{dn(r)}{dr} \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} \right\} \quad (32)$$



последнее условие принимает простой вид:

$$\partial F_j / \partial \kappa^2 + 2x_j \varepsilon F_j(\kappa^2) = 0. \quad (33)$$

Мы можем решить это уравнение совместно с кинетическим уравнением для поправки  $f_j^{(1)}$ , которое теперь существенно упрощается:

$$-\Theta v_{Tj} \frac{\partial f_j^{(1)}}{r \partial \vartheta} = v_j A_j(x_j) \frac{\partial}{\partial \kappa^2} \left( c_j + \frac{r_{cj}}{2\Theta n} \frac{dn(r)}{dr} \right) f_j^{(0)}.$$

В результате находим полное решение:

$$f_{ij} = \frac{n(r)}{\pi^{3/2} v_{Tj}^3} \exp \{ -c_j^2 - x_j - 2x_j \varepsilon \kappa^2 \} \cdot \left\{ 1 + \frac{\sigma \sqrt{2x_j \varepsilon} r_{cj}}{\Theta n} \frac{dn(r)}{dr} \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} + \frac{2v_j A_j r \vartheta}{v_{Tj} \Theta} x_j \varepsilon \left( c_j + \frac{r_{cj}}{2\Theta n} \frac{dn(r)}{dr} \right) \right\}. \quad (34)$$

Таким образом, последовательный учет даже очень слабых столкновений устраняет весь произвол в определении функции распределения частиц, который всегда существует при полном пренебрежении столкновений, как это было, например, в работе Берка и Галеева [8]. Из сравнения формул (30) и (34) легко видеть, что функция распределения частиц по скоростям  $f_j^{(0)}$  непрерывна в точке  $\kappa^2 = 1$ , однако ее производные при  $\kappa^2 \rightarrow 1 \pm 0$  различны (см. рис. 3). Поэтому в окрестности точки  $\kappa^2 = 1$  возникает узкая переходная область, структура которой может быть определена лишь из решения полного уравнения (28) без теории возмущений.

К счастью, как мы покажем ниже, интересующие нас коэффициенты переноса не зависят от тонкой структуры этого переходного слоя, а определяются разностью значений ее производных по обе стороны от него. Элемент фазового объема в переменных  $\mu$ ,  $\kappa^2$  имеет вид

$$2\pi H_0 \frac{d\mu}{m} dv_{||}(\mu, \kappa^2, \vartheta) \equiv 2\pi \sqrt{2\varepsilon \mu H_0 / m} d\mu H_0 \frac{d\kappa^2}{\{2[\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)]\}^{1/2}} \sum_{\sigma} \quad (35)$$

Домножая функцию распределения частиц на их скорость поперек магнитного поля  $-(\mu H_0 / m \omega_c R) \sin \vartheta$  и интегрируя по всему фазовому объему, находим поток частиц поперек поля:

$$\langle nv \rangle_j = - \frac{(2\varepsilon)^{3/2}}{\omega_{cj}} \int_0^{2\pi} d\vartheta \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} \left( \frac{\mu}{m} H_0 \right)^{3/2} d \frac{\mu}{m} H_0 \cdot \int_{\sin^2(\vartheta/2)}^{\infty} \frac{[f_j^{(0)} + f_j^{(1)}] d\kappa^2}{2 \sqrt{2[\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)]^{1/2}}} \frac{\sin \vartheta}{r}. \quad (36)$$

Легко видеть, что в отсутствие столкновений подынтегральное выражение представляет собой полную производную по углу  $\vartheta$  и после интегрирования поток оказывается равным нулю. Таким образом, сила трения, действующая на частицы, оказывается пропорциональной их частоте столкновений.

Рассмотрим отдельно вклады в поток от пролетных и захваченных частиц, а также от частиц из переходного слоя. Обозначим их соответственно  $\langle nv \rangle^{(1,2,3)}$ . Тогда полный поток определяется выражением

$$\langle nv \rangle = \langle nv \rangle^{(1)} + \langle nv \rangle^{(2)} + \langle nv \rangle^{(3)}.$$

Для пролетных частиц ( $\kappa^2 > 1$ ) можно изменить в (36) порядок интегрирования по  $\kappa^2$  и  $\vartheta$ , а затем проинтегрировать это выражение по ча-

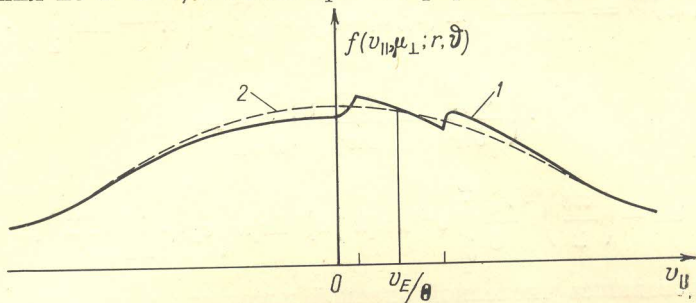


Рис. 3. Общий вид распределения частиц в тороиде в случае редких (1) и частых (2) столкновений

стям. Воспользовавшись кинетическим уравнением для  $f_j^{(1)}$ , можно выразить величину потока частиц через правую часть этого уравнения:

$$\langle nv \rangle^{(1)} = \frac{v_j v_{Tj}^4}{2\Theta \omega_{cj}} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} A_j(x_j) x_j dx_j \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\infty} d\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)}.$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \kappa^2} \left\{ \sigma \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} \left( \frac{\partial f_{ju}^{(0)}}{\partial \kappa^2} + 2x_j \varepsilon f_{ju}^{(0)} \right) + c_j \sqrt{2x_j} \varepsilon f_{ju}^{(0)} \right\}. \quad (37)$$

Вычислив в явном виде первую производную  $\partial f_{ju}^{(0)} / \partial \kappa^2$  по формуле (30) и избавившись от второй интегрированием по частям, приведем это выражение к виду

$$\langle nv \rangle^{(1)} = - \frac{\sqrt{2\varepsilon} v_j r_{cj}}{\pi^{3/2} \Theta} \int_0^{\infty} A(x_j) e^{-x_j} x_j^{3/2} dx_j \cdot$$

$$\cdot \left\{ 4 - \frac{\pi^2}{2} + 2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{1/2}} \left[ K(t^{-1/2}) - \frac{\pi^2}{4E(t^{-1/2})} \right] \right\} \left( c_j + \frac{r_{cj}}{2\Theta n} \frac{dn}{dr} \right). \quad (38)$$

Совершенно аналогично, подставляя в выражение для потока (36) функцию распределения захваченных частиц, находим

$$\langle nv \rangle^{(2)} = \frac{2\sqrt{2\varepsilon} v_j r_{cj}}{\Theta \pi^{3/2}} \int_0^{\infty} A(x_j) e^{-x_j} x_j^{5/2} dx_j \left( c_j + \frac{r_{cj}}{2\Theta n} \frac{dn}{dr} \right). \quad (39)$$

Очевидно, что этим вкладом можно пренебречь по сравнению со вкладом пролетных частиц.

Для переходной области имеем

$$\langle nv \rangle^{(3)} = \frac{v_j v_{Tj}^4}{2\Theta \omega_c} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} A_j(x_j) x_j dx_j \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1-\delta(\vartheta)}^{1+\delta(\vartheta)} d\kappa^2 \cdot$$

$$\cdot \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} \frac{\partial}{\partial \kappa^2} \left\{ \sigma \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\vartheta/2)} \left( \frac{\partial f_j}{\partial \kappa^2} + 2x_j \varepsilon f_j \right) + \right.$$

$$\left. + c_j \sqrt{2x_j} \varepsilon f_j \right\}, \quad 0 < \delta(\vartheta) \ll 1.$$

Здесь достаточно учесть лишь член со второй производной, поскольку только первая производная  $\partial f_j / \partial \kappa^2$  имеет разные значения на границах переходного слоя, а значения самой функции можно считать одинаковыми с точностью до малых порядка  $\sim \delta \ll 1$ . Тогда величину потока можно выразить через скачок производной  $\partial f_j / \partial \kappa^2$  внутри переходного слоя:

$$\begin{aligned} \langle nv \rangle^{(3)} &= \frac{v_j v_{Tj}^4}{2\Theta \omega_{cj}} \int_0^\infty A(x_j) x_j dx_j \int_0^{2\pi} d\theta \sum_\sigma \sigma \left( \kappa^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{\partial f_{ju}^{(0)}}{\partial \kappa^2} - \frac{\partial f_{jt}^{(0)}}{\partial \kappa^2} \right\} \Big|_{\kappa^2=1} = \\ &= - \left( \frac{\pi \epsilon}{2} \right)^{1/2} \frac{r_{cj}}{\Theta} \int_0^\infty e^{-x_j A(x_j)} x_j^{3/2} dx_j n \left( c_j + \frac{r_{cj}}{2\Theta n} \frac{dn}{dr} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Воспользовавшись численной оценкой интеграла в правой части уравнения (38), взятой из [12], можно убедиться, что вклад от пролетных частиц оказывается численно меньше вклада от переходного слоя. Вычислив интеграл в правой части (40) в явном виде, получаем окончательный ответ:

$$\begin{aligned} \langle nv \rangle &\approx \langle nv \rangle^{(3)} = \alpha_j \frac{v_j r_{cj}^2 \sqrt{\epsilon}}{\Theta^2} \left( \frac{dn}{dr} + \frac{e_j}{T_j} n \Phi'(r) \right), \\ \alpha_j &= \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \left[ \delta_{je} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Отсюда следует, что диффузия частиц становится амбиполярной при электрическом поле, величина которого определяется по-прежнему формулой (19), и коэффициент диффузии на фактор  $\epsilon^{-3/2}$  оказывается большим, чем вычисленный Пфиршем и Шлютером [3]:

$$D_\perp \approx 3,6 \frac{v_e r_{ce}^2}{\epsilon^{3/2}} \frac{4\pi^2}{i^2}, \quad v_e \ll \frac{v_{Te} \Theta \epsilon^{3/2}}{r}. \quad (42)$$

Ионную температуропроводность можно вычислить совершенно аналогично:

$$\chi_{\perp i} \approx 0,4 \frac{v_i r_{ci}^2}{\epsilon^{3/2}} \frac{4\pi^2}{i^2}, \quad v_i \ll \frac{v_{Ti} \Theta \epsilon^{3/2}}{r}. \quad (43)$$

## 5. Заключение

Сравним теперь полученные результаты с известными ранее. В пределе очень редких столкновений, когда захваченные в области слабого магнитного поля частицы не успевают распределиться по Максвеллу, коэффициент диффузии оказывается пропорциональным частоте столкновений и описывается выражением (42) (прямая 1 на рис. 4). Физический смысл этого выражения достаточно прост. Действительно, если в соотношение  $D_\perp \sim (\Delta r_e)^2 \nu$  подставить  $\Delta r_e \sim r_{ce} \sqrt{\epsilon} / \Theta$  (для захваченных частиц) и  $\nu \sim v_e \epsilon^{-1}$  (эффективная частота соударений захваченных частиц увеличена), то мы получим по порядку величины результат (42), учитывая, что доля захваченных частиц  $\sim \sqrt{\epsilon}$ .

Весьма интересен также случай, когда столкновений достаточно, чтобы успевало установиться максвелловское распределение захваченных частиц по скоростям, и в то же время для основной массы частиц ими

можно было пренебречь. В этой ситуации диффузия частиц определяется лишь параметрами плазмы (см. (20)) и не зависит от частоты столкновений (отрезок 2 на рис. 4). Наконец, при очень частых столкновениях, когда применима гидродинамическая модель для описания плазмы, мы

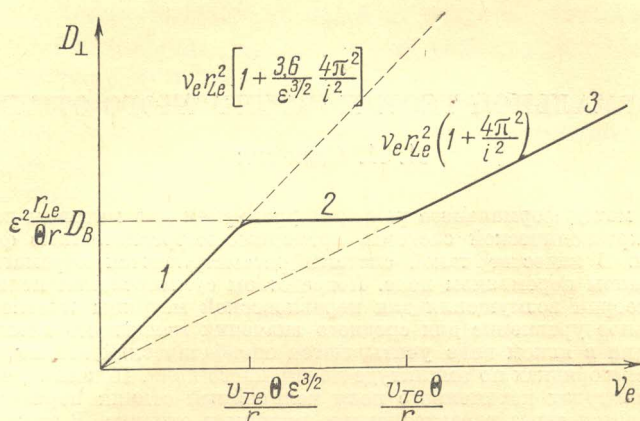


Рис. 4. Зависимость коэффициента диффузии частиц от частоты электрон-ионных столкновений

получаем старый результат Пфирша и Шлютера [3]. Совершенно аналогично ведет себя коэффициент температуропроводности частиц. Разумеется, все сказанное будет справедливым, если не принимать во внимание турбулентных явлений.

Авторы благодарны Г. И. Будкеру за внимание к работе и советы.

Институт ядерной физики

Сибирского отделения

Академии наук СССР

Поступила в редакцию

13 февраля 1967 г.

#### Литература

- [1] E. Berkel, D. Eckhardt, G. von Gierke, G. Grieger. Phys. Rev. Lett., 17, 906, 1966.
- [2] Г. И. Будкер. В сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 1, Изд. АН СССР, 1958, стр. 66.
- [3] D. Pfirsch, A. Schlüter. Report of the Max-Planck-Institute, Munich, MPI/PA/7/62, 1962.
- [4] S. Yoshikawa, K. Young, R. Sinclair, W. Harris. Princeton Univ. Plasma Physics Laboratory Report-282, 1964.
- [5] G. Knorr. Phys. of Fluids, 8, 1334, 1965.
- [6] Б. Б. Кадомцев, В. Д. Шафранов. ДАН СССР, 167, 65, 1966.
- [7] В. Д. Шафранов. Атомная энергия, 19, 120, 1965.
- [8] Н. Берк, А. Галеев. Phys. of Fluids, 10, 441, 1967.
- [9] А. И. Морозов, Л. С. Соловьев. В сб. Вопросы теории плазмы, 2, Атомиздат, 1963, стр. 177.
- [10] Б. Кадомцев, О. Погуде. ЖЭТФ, 51, 1734, 1966.
- [11] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 82, 1961.
- [12] В. Е. Захаров, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 43, 490, 1962.

#### TRANSFER PHENOMENA IN A RAREFIED PLASMA IN TOROIDAL MAGNETIC TRAPS

A. A. Galeev, R. Z. Sagdeev

Transfer phenomena in a rarefied plasma related to toroidal particle drift are investigated. It is shown that the existence of so-called «trapped» particles results in a sharp increase of the transfer coefficients approximately by a factor  $(R/r)^{3/2}$  where  $R$  and  $r$  are respectively the large and small torus radii.