

ПРОБЛЕМА МНОГИХ ТЕЛ И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Труды Международного симпозиума

НОВОСИБИРСК, 1965 г.

Сибирь



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1967

Международный симпозиум по проблеме многих тел, организованный Сибирским отделением АН СССР, проводился 24 марта — 1 апреля 1965 г. в Новосибирске. В работе симпозиума приняли участие более двухсот человек, в том числе ряд ведущих советских и зарубежных ученых. Настоящее издание содержит тексты докладов, представленные авторами для опубликования.

ОРГКОМИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА ПО ПРОБЛЕМЕ МНОГИХ ТЕЛ

академик <i>Н. Н. Боголюбов</i>	председатель (Математический институт АН СССР)
член-корреспондент АН СССР <i>Д. В. Ширков</i>	заместитель председателя (Институт математики СО АН СССР)
член-корреспондент АН СССР <i>С. Т. Беляев</i>	Институт ядерной физики СО АН СССР
доктор физико-математических наук <i>В. Л. Бонч-Бруевич</i>	МГУ
доктор физико-математических наук <i>В. М. Галицкий</i>	Институт ядерной физики СО АН СССР
<i>Ф. А. Киселев</i>	СО АН СССР
<i>Л. Г. Лавров</i>	СО АН СССР
доктор физико-математических наук <i>В. Л. Покровский</i>	ученый секретарь (Институт радиофизики и электроники СО АН СССР)
доктор физико-математических наук <i>Ю. Б. Румер</i>	Институт радиофизики и электроники СО АН СССР
член-корреспондент АН СССР <i>Р. З. Сагдеев</i>	заместитель председателя (Институт ядерной физики СО АН СССР)
доктор физико-математических наук <i>В. Г. Соловьев</i>	Объединенный институт ядерных исследований
доктор физико-математических наук <i>И. М. Халатников</i>	Институт теоретической физики АН СССР
кандидат физико-математических наук <i>В. Н. Байер</i>	зам. ученого секретаря (Институт ядерной физики СО АН СССР)
кандидат физико-математических наук <i>И. А. Квасников</i>	зам. ученого секретаря (МГУ)

Сверено

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

доктор физ.-матем. наук *В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ*

2-3-2

Институт СО АН СССР
Гос. публ. науч.-
техническая библиотека

В.33

П.781

I. ОБЩИЕ МЕТОДЫ

ВЫРАЖЕНИЕ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ
ЧЕРЕЗ ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ

Ф. А. Березин

Московский государственный университет,
Механико-математический факультет

В 1937 г. Бетом и Уленбеком (см., например, [1]) была получена формула, выражающая второй коэффициент разложения логарифма квантовой статистической суммы по степеням активности через фазы рассеяния. В настоящей работе устанавливаются аналогичные соотношения между произвольным коэффициентом разложения по степеням активности и оператором рассеяния. Впервые эти формулы были приведены в работе [2]. Третий коэффициент изучался ранее с помощью теории возмущений в [3].

Предлагаемые формулы сравнительно громоздки и могут служить эффективным средством для вычисления статистической суммы, только если известно выражение для оператора рассеяния n частиц. В настоящее время такой оператор имеется лишь для двух одномерных моделей (см. [4]). Однако само наличие этих формул указывает на существование прямой связи между рассеянием и статистическими свойствами частиц.

В данной работе рассмотрены только частицы со спином, равным нулю, однако все результаты легко переносятся на общий случай. Из методических соображений, кроме статистики Бозе и статистики Ферми, рассмотрена также статистика Больцмана.

1. СТАТИСТИКА БОЛЬЦМАНА

Обозначим через H_N оператор энергии N одинаковых частиц с парным взаимодействием, находящихся в кубе объемом Ω :

$$H_N = -\frac{1}{2m} \sum \Delta_k + g \sum_{i < j} v(x_i - x_j), \quad x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}), \quad (1)$$

где Δ_k — оператор Лапласа по переменным x_k , которые пробегают куб. Чтобы исключить граничные эффекты, будем, как обычно, считать, что выполнены периодические граничные условия.

tic clusters, etc.) can be considered on the basis of these equations. The equations of a stellar «gas» is different in the direction of the axis of rotating and in the galactic plane. Gravitational instability is considered on the basis of the equations obtained.

The relaxation time of the stellar systems (from observations) is of the order $T_r < T_a \approx 10^{10}$ years, where T_a is the age of the system. The relaxation time with the allowance for the star-star «collisions» is $T_r \gg T_a$. This paradox is solved by the following hypothesis: the entropy increase in the Galaxy, where the star-star «collisions» are practically absent, may be due to collective phenomena — nonlinear wave interaction. This shortens the relaxation time in the Galaxy to a value which is less than its age.

A distribution of peculiar velocities of the stars which sets in must be anisotropic. The velocity dispersion in the galactic plane is always greater than the dispersion in the direction of the axis of rotation. This fact is confirmed by the observations. Anisotropic distribution is due to the constancy of the adiabatic invariant e_{\perp} / Ω , where Ω is an angular velocity.

О СИНГУЛЯРНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ МОД В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

С. С. Моисеев

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск

1. Характер неустойчивостей неоднородной плазмы, развивающихся на различного типа колебаниях, в настоящее время изучен достаточно хорошо. Поскольку весьма обычна ситуация, когда свойства среды меняются медленно на расстояниях порядка длины волны, то оправдано приближение геометрической оптики. Это приближение, однако, нарушается вблизи точек, где волновой вектор $k(x)$ либо обращается в нуль («точка поворота»), либо волновые векторы, соответствующие различным типам колебаний, совпадают («точка пересечения решений»). Влиянию особенностей второго типа на характер устойчивости плазмы до сих пор уделялось мало внимания. Вместе с тем в окрестности таких областей (область «взаимодействия нормальных волн») возникает волна нового типа с другими дисперсионными свойствами, учет которых может существенно повлиять на спектр собственных частот ω ¹. Так, например, наиболее хорошо изученными являются колебания, описываемые дифференциальным уравнением второго порядка; при этом обычно подразумевается, что члены, содержащие производные более высокого порядка, опущены из-за наличия при них малого параметра (малая вязкость, малое отношение ларморовского радиуса к длине волны и т. д.). Однако если в комплексной X -плоскости существуют точки, где волновые векторы отброшенных мод совпадают с волновыми векторами, соответствующими решениям уравнения второго порядка, то отбрасывание старших производных некорректно; необходимо при этом исследовать влияние отброшенных мод на спектр собственных значений. Поскольку в данном случае речь идет о «зацеплении» с коротковолновыми возмущениями, то их влияние на критерий устойчивости может быть весьма

¹ Возмущения для среды неоднородной, например, вдоль оси X , ищут, как обычно, в виде $\sim \varphi(x) \exp(i\omega t + ik_y y + ik_z z)$.

существенным. Хотя рассматриваемый здесь метод в принципе не связан с порядком дифференциального уравнения, но для конкретности мы далее будем рассматривать уравнение колебаний, сводящееся к дифференциальному уравнению четвертого порядка.

Одним из важных моментов при получении спектра собственных значений является вопрос об обходе особенностей, где «пересекаются» асимптотические решения. В работе [1] был развит метод обхода этих особенностей для случая, когда $k_1 + k_2$ является однозначной функцией в окрестности точек пересечения решений ($k_1(x)$, $k_2(x)$ — волновые векторы, соответствующие различным модам пересекающихся колебаний) и лишь $k_1 - k_2$ носит неоднозначный характер. Кроме того, исследовался случай, когда особенности были расположены в комплексной плоскости, а на действительной оси решения имели осциллирующий вид. Сочетание этих ограничений привело к тому, что возникающая в особой области новая волна имеет экспоненциально малую амплитуду и распространяется в ту же сторону, что и падающая волна (не возникало отраженных волн в области «взаимодействия»). В дальнейшем в рамках предположений, сделанных в работе [1], был рассмотрен ряд задач о трансформации волн в плазме (см., например, [2]). В работе [3] для дифференциального уравнения четвертого порядка с действительными коэффициентами были построены финитные решения; для конкретного поведения коэффициентов были установлены правила, определяющие спектр собственных частот ω . Уравнение, рассмотренное в [3], имело вид

$$\alpha \beta^2 \varphi^{IV} - U_2(x) \beta \varphi'' + U_1(x) \varphi = 0, \quad (1)$$

где $\beta = (\lambda/L)$ — малый параметр, характеризующий слабую неоднородность; α — некоторый другой малый параметр (пропорциональный, например, малой вязкости)¹; $U_1, U_2 \sim 1$, за исключением точек, где они обращаются в нуль.

2. В настоящей работе целесообразно прежде всего остановиться на анализе причин, приводящих к различным правилам для нахождения спектра частот ω и различным коэффициентам трансформации. Важными причинами в указанном смысле являются аналитические свойства $k_1 + k_2$ и $k_1 - k_2$, расположение точек «пересечения» решений и линий уровня на комплексной x -плоскости, характер зависимости коэффициентов уравнения от малых параметров и соотношение между этими малыми параметрами. Проиллюстрируем сделанные замечания на приме-

¹ Отметим, что задача с одним малым параметром β соответствует $\alpha/\beta^2 \gg 1$ ($\alpha=1$).

ре уравнений, рассмотренных в [1] и [3]. В случае уравнения (1) можно воспользоваться следующим представлением k :

$$k_{2,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} + \sqrt{\frac{U_1}{\alpha}}} \pm \sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} - \sqrt{\frac{U_1}{\alpha}}} \right). \quad (2)$$

(Решение уравнения (1), как обычно, ищем в виде

$$\varphi_{1,2} \sim \exp \left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int^x k_{1,2}(x) dx \right\}; \varphi_{3,4} \text{ отличаются от } \varphi_{1,2} \text{ лишь знаком}$$

в показателе экспоненты.) Асимптотический вид $k_{1,2}$ вдали от точек, где $U_2=0$, следующий:

$$k_1 = \sqrt{U_1/U_2}, \quad (3)$$

$$k_2 = \sqrt{U_2/\alpha}. \quad (4)$$

Вблизи точки, где $U_2=0$, существуют две точки $x = \pm 2\alpha \sqrt{\frac{U_{10}}{U}}$,

в которых решения «пересекаются» (здесь U_{10} , U — соответственно значения U_1 , dU_2/dx в точке, где $U_2=0$). Причем, как

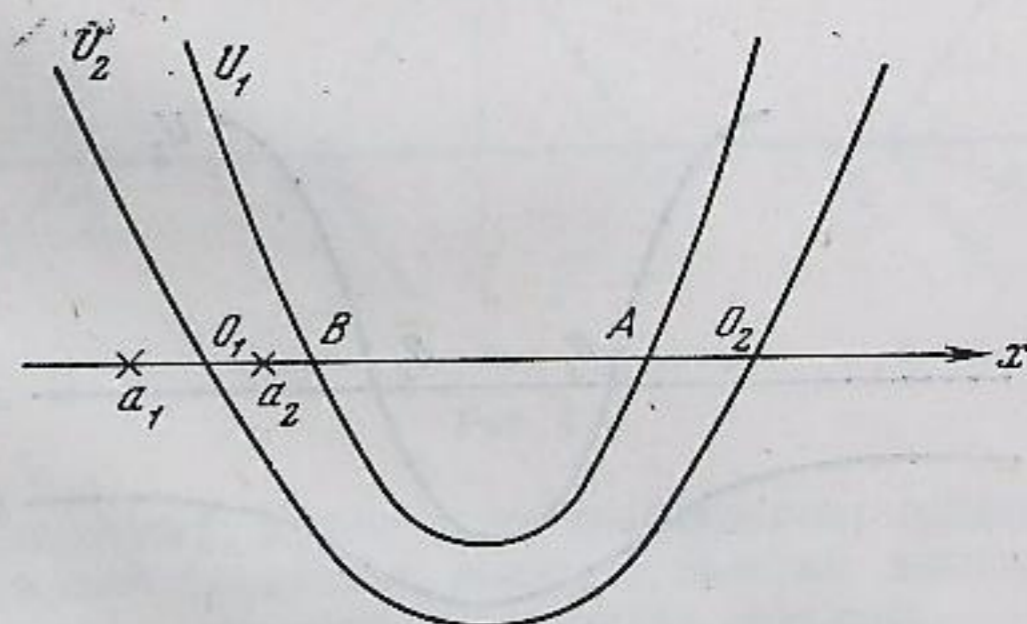


Рис. 1

следует из анализа (2), многозначной функцией является не только $k_1 - k_2$, но также и $k_1 + k_2$. Это, в частности, приводит к тому, что в области «взаимодействия» нормальных волн может возникнуть не только волна другого типа, движущаяся в ту же сторону, что и падающая волна, но также и отраженная волна (поскольку теперь $k_1 + k_2$ также может изменить знак).

Помимо случая, разобранный в работе [3], можно указать, например, на некоторые другие случаи изменения коэффициентов при наличии нулей U_2 и U_1 (рис. 1—3; точки ветвления

$W_1 \equiv \sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} - \sqrt{\frac{U_1}{\alpha}}}$ и $W_2 \equiv \sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} + \sqrt{\frac{U_1}{\alpha}}}$ обозначены соответственно a_1 и a_2).

Случай, изображенный на рис. 1, отличается от случая, рассмотренного в [3], расположением точек ветвления и областей осцилляции решений. На рис. 4 приведены линии уровня $\int_{a_1}^x W_1 dx$, $\int_{a_2}^x W_2 dx$ и $\int_{\beta}^x k_1 dx$

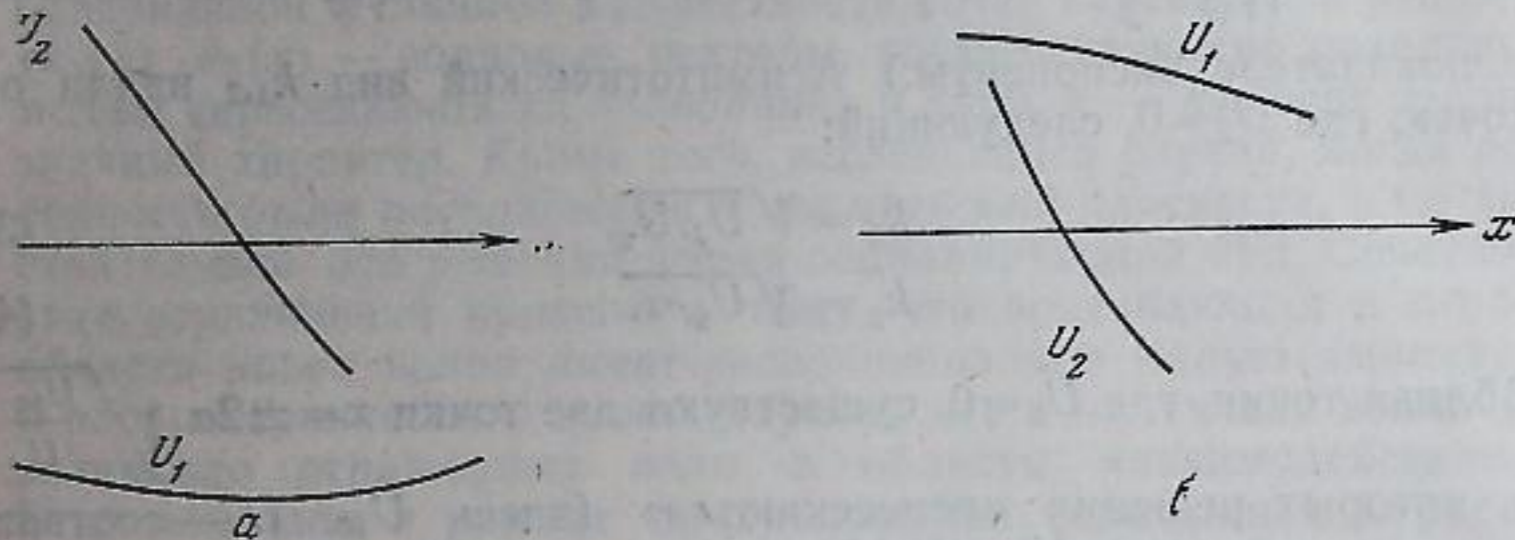


Рис 2

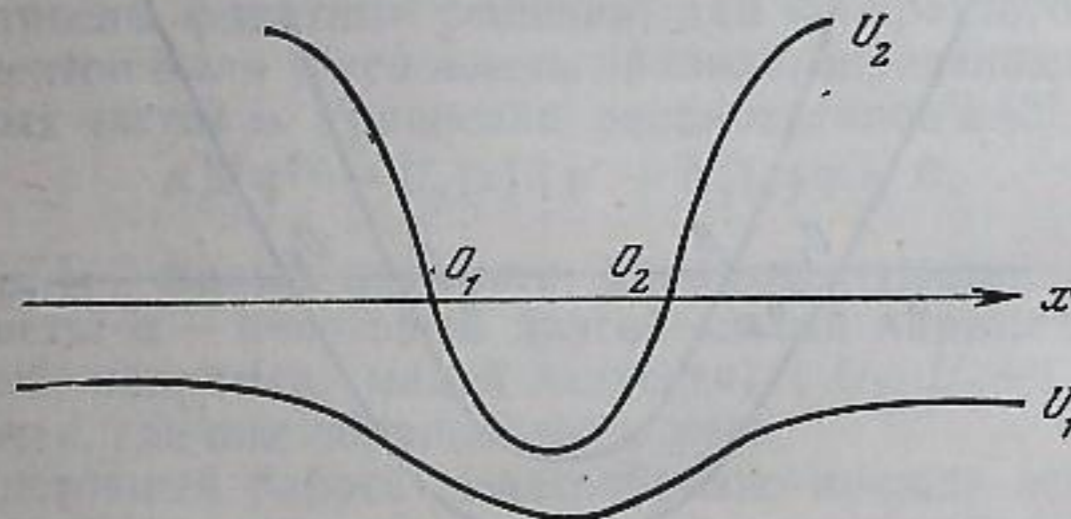


Рис. 3

вблизи соответствующих точек ветвления для указанного случая. Рассматривая случай $\alpha/\beta^2 \gg 1$, когда между точками a_1 и a_2 укладывается много длин волн, можно обходить каждую из этих точек в отдельности. При этом решения $\sim \exp W_1 \exp(\pm W_2)$ и $\sim \exp(-W_1) \exp(\pm W_2)$ при обходе точки a_1 ведут себя соответственно независимым образом. Последнее фактически связано с тем, что вблизи точки a_1 , как можно показать, поведение каждой такой пары решений описывается в первом приближении дифференциальным уравне-

нием второго порядка с точкой поворота в a_1 . Отсюда также вытекает, что справедливы правила обхода a_1 (или a_2), как для обычного уравнения второго порядка (см., например, [4]).

Проводя простые вычисления, подобные соответствующим вычислениям в [3], получим для финитных решений¹ (рис. 4) следующие правила нахождения спектра частот:

$$\left(\int_{a_1}^B W_1 dx - \int_{a_2}^B W_2 dx \right) + \left(\int_{a_1'}^A W_1 dx - \int_{a_2'}^A W_2 dx \right) + \left(\int_{a_1}^{a_1'} W_1 dx + \int_{a_2}^{a_2'} W_2 dx \right) = n\pi. \quad (5)$$

В случаях, изображенных на рис. 2, а и б, речь идет об осциллирующих на бесконечности решениях. Причем, например, для рис. 2, б обе волны затухают при $x \rightarrow -\infty$; поэтому в области «пересечения» решений в отличие от [1] должны возникнуть отраженные волны, что и получается при использовании правил

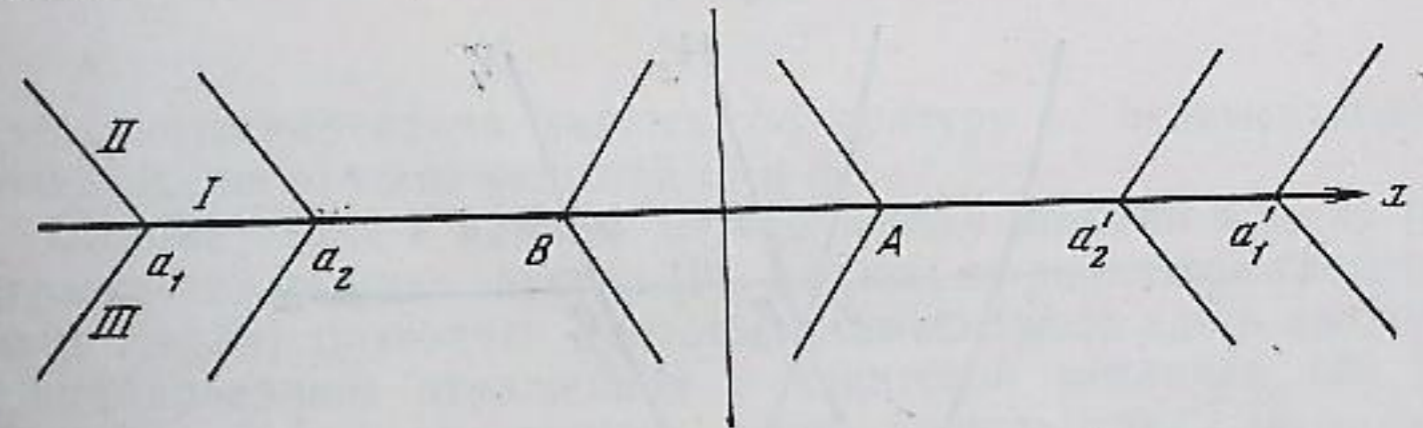


Рис. 4

обхода особенностей. Кроме того, коэффициент трансформации, характеризующий появление волны с новыми дисперсионными свойствами, теперь оказывается порядка единицы.

Случай, соответствующий рис. 3, примечателен тем, что одна из «зацепляющихся» мод (с волновым вектором $k_1(x)$) осциллирует на бесконечности, а другая затухает. К чему может привести подобная ситуация, показывает, например, следующее рассуждение. Пусть в средней части области $O_1 O_2$ возникло нара-

¹ Предполагается, что ход дальнейшего изменения коэффициентов обеспечивает также финитность решения

$$\sim \exp \int_{\beta}^x (W_1 - W_2) dx.$$

тающее во времени локализованное возмущение («пакет»), образованное волнами типа (4). При этом поскольку часть энергии распространяющегося «пакета» вблизи точки O_1 (или точки O_2) трансформируется в энергию волны, уходящей на бесконечность, то неустойчивость может не развиться, если скорость ухода энергии на бесконечность превысит скорость поступления энергии в возмущение от источников неустойчивости. В этом случае среда может служить генератором волн типа (3). В [1] исследовалась система уравнений типа

$$\varphi'' - V_1(x)\varphi = \alpha(x)\psi, \quad \psi'' - V_2(x)\psi = \alpha(x)\varphi, \quad (6)$$

которой в приближении геометрической оптики соответствует следующий волновой вектор:

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{V_1 + V_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(V_1 - V_2)^2}{4} + \alpha^2}}. \quad (7)$$

Чтобы проиллюстрировать отличие этого результата от результата (5), рассмотрим задачу нахождения спектра собственных

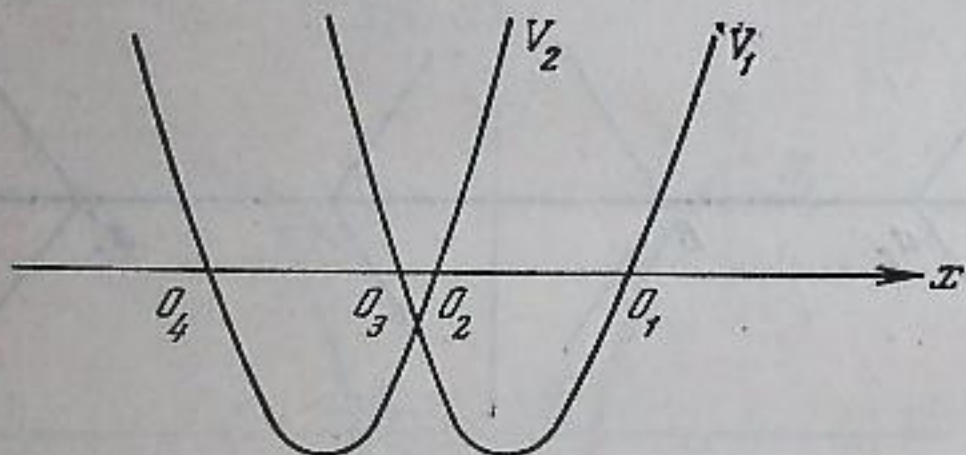


Рис. 5

частот ω для уравнения (6) в предположении, что неоднозначной функцией в области «взаимодействия» нормальных волн является только $k_1 - k_2$. Отметим, что в указанном предположении в [1] и последующих работах (см. [2]) исследовались только осциллирующие на бесконечности решения.

Для конкретности ограничимся указанным на рис. 5 ходом коэффициентов $V_1(x)$, $V_2(x)$. Будем также считать α малым (однако таким, что $\alpha\psi$, $\alpha\varphi$ не выходят за пределы точности приближения геометрической оптики). В этом случае

$$k_1 \approx \sqrt{V_1}, \quad k_2 \approx \sqrt{V_2}, \quad (8)$$

и точки O_1 , O_2 , O_3 , O_4 в том же приближении являются точками поворота; что же касается точек пересечения решений, то они

расположены в комплексной плоскости в окрестности точки O , где $V_1 = V_2$.

Задавая справа при больших x решение в виде

$$\exp \int_{O_1}^x k_1 dx + D \exp \int_{O_2}^x k_2 dx$$

и последовательно обходя «точки поворота» для k_1 , k_2 (здесь правила обхода обычные, как в уравнении второго порядка) и точки «пересечения» решений a_1 , a_2 (для них мы можем воспользоваться правилами обхода, приведенными в [1]), легко получим для финитных решений следующее правило для определения спектра частот ω :

$$\cos \int_{O_1}^{O_3} k_1 dx \cos \int_{O_2}^{O_4} k_2 dx + e^{-\delta_0} \sin \left(\int_{O_2}^A k_2 dx + \int_B^{O_3} k_1 dx \right) \sin \left(\int_B^{O_4} k_2 dx + \int_{O_1}^A k_1 dx \right) = 0, \quad (9)$$

где

$$2\delta_0 = \int_L \frac{k_2 - k_1}{2} dx > 0.$$

Здесь интегрирование ведется по контуру L , охватывающему точки «пересечения» решений a_1 и a_2 .

Слабая связь в данном случае между модами k_1 и k_2 (что отражается на виде спектра (9), а также на характере трансформации волн) позволяет указать на имеющуюся здесь аналогию с надбарьерным отражением в квантовой механике (см. [5]). Отметим, что расположение линий уровня для $\int (k_2 - k_1) dx$ в настоящей задаче и $\int p dx$ в указанной квантовомеханической задаче подобно.

3. При решении конкретных задач часто можно получить удобные качественные критерии устойчивости, используя финитность решения. Разберем это на примере уравнения (1) в случаях, подобных рассмотренному в [3].

Умножая (1) на φ^* , легко получим для финитных решений

$$\alpha \beta^2 \int \left| \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right|^2 dx + \beta \int U_2 \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 dx + \int U_1 |\varphi|^2 dx = 0. \quad (10)$$

Анализ (10) показывает, что существует точка $x^{(p)}$ в области локализации $\varphi(x)$ ($\text{Re } k_x^2(x^{(p)}) > 0$), где выполняются условия

$$\text{Im} \{ |k|^2 U_2 + U_1 \} = 0, \quad \text{Re } \alpha k_x^4 - \text{Re} \{ k_x^2 U_2 + U_1 \} = 0. \quad (11)$$

В (11) вместо k_x берется k_1 или k_2 ($k_1/k_2 \sim \sqrt{\alpha}$) в зависимости от интегрального вклада мод в критерии устойчивости. Уравнения (11) могут служить для определения знака и порядка величины инкремента $\nu = -\text{Im} \omega$.

Обсудим теперь вопрос о спектре собственных частот в случае, когда коэффициенты $U_2(x)$, $U_1(x)$ являются комплексными. При этом можно по-прежнему воспользоваться соотношением типа (10), но необходимо знать поведение на бесконечности $\varphi(x)$. Пусть (рис. 6) нули $U_1(x)$, $U_2(x)$ расположены в комплексной плоскости z

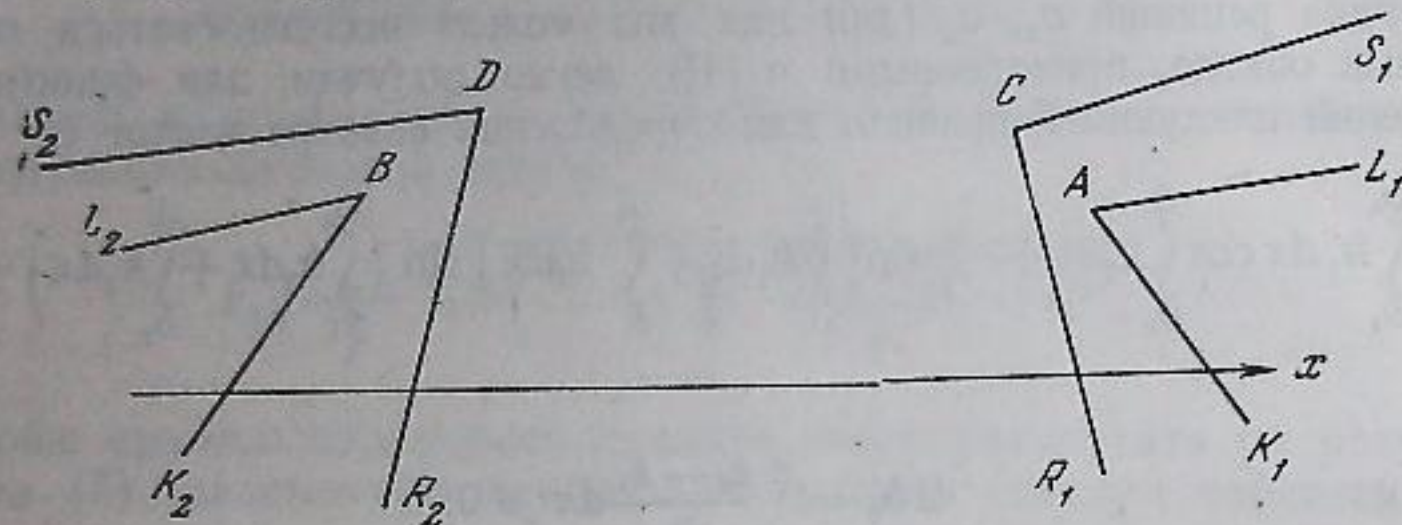


Рис. 6

соответственно в точках A, B, C, D , а в секторах K_1AL_1 , K_2BL_2 функция φ_1 ведет себя как $\exp(-|\int k dx|)$ (соответственно φ_2 ведет себя так в секторах R_1CS_1 , R_2DS_2). Тогда вопрос о финитности решения при $x \rightarrow \pm \infty$ сводится к тому, охватывают ли указанные секторы обе действительные полуоси x .

В заключение на примере неустойчивости, вызывающей аномальную диффузию Бома [6], рассмотрим, к чему приводит учет членов более высокого порядка малости по параметру, представляющему собой отношение ларморовского радиуса ионов r_i к длине волны

($\alpha \sim (k_y r_i)^2$, $\alpha \sim \frac{\nu_{ii}}{\omega} (k_y r_i)^2$, ν_{ii} — частота ион-ионных соударений).

Правильный порядок инкремента получим, учтя члены типа $\partial p_{ij}/\partial t$, где p_{ij} — тензор вязкости ионов. В результате будем иметь

$$\alpha \varphi^{IV} - k_y^2 \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega}\right) \varphi'' + k_y^4 \left\{ \left(1 - \frac{\omega_i}{\omega}\right) - i \frac{\omega_S}{\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega_i}{\omega}\right) - \frac{\omega_e}{\omega} \right] \right\} \varphi = 0, \quad (12)$$

где ω_i , ω_e — дрейфовые частоты соответственно ионов (i) и электронов (e); $\omega_S = \left(\frac{k_z}{k_y}\right)^2 \frac{\omega_{He} \omega_{Hi}}{\nu_{e/i}}$ (ω_{He} , ω_{Hi} — ларморовские частоты соот-

ветственно электронов и ионов, $\nu_{e/i}$ — частота соударений электронов с ионами).

Рассмотрим коротковолновую часть спектра, для которой $\alpha/\beta^2 > 1$ или, что то же самое, $(\lambda_x/\Delta x) < 1$ (Δx — размер области «взаимодействия» мод вблизи точки, где $\left(1 - \frac{\omega_i}{\omega}\right) \sim 0$, λ — длина волны в указанной области). Нетрудно видеть, что речь идет об области спектра, где справедливо условие

$$\frac{L}{\lambda_y} \sqrt{k_y r_i} > 1. \quad (13)$$

В предположении $\omega_i \gg \omega_S$ в случае, когда влияние моды k_2 существенно, из (11) получим

$$\text{Im} \omega \sim (k_y r_i)^2 \frac{\omega_S \omega_e}{\omega_i}. \quad (14)$$

Мы видим, что инкременты для указанной области спектра существенно уменьшаются (содержат дополнительный малый множитель α).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. C. G. Stueckelberg, Helv. phys. acta, 1932, 5, 369.
2. В. В. Железняков. Радиоизлучение Солнца и планет. Изд-во «Наука», 1964.
3. Г. М. Заславский, С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. ПМТФ, 1964, № 5, 44.
4. W. H. Furry, Phys. Rev., 1947, 71, 360.
5. В. Л. Покровский, И. М. Халатников. ЖЭТФ, 1961, 40, 1713.
6. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев. ЖТФ, 1964, 34, 248.

ON THE SINGULARITY INTERACTION OF THE VARIOUS OSCILLATION MODES IN THE THEORY OF PLASMA STABILITY

S. S. Moiseiev

In this paper the problems of the stability and wave transformation are investigated in view of the influence of «the points of intersection of solutions» as well as the turning points for various cases. For convenience one mainly considers the latter oscillations which may be reduced to a differential equation of the 4th order or to the system of two equations of the 2nd order. In case of finite problems one seeks for an oscillation spectrum which essentially depends on the analytical properties of oscillation «modes» $K_1(x)$ and $K_2(x)$.