

ПРОБЛЕМА
МНОГИХ ТЕЛ
И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Труды Международного симпозиума

НОВОСИБИРСК, 1965 г.

Сибирь



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1967

Международный симпозиум по проблеме многих тел, организованный Сибирским отделением АН СССР, проводился 24 марта — 1 апреля 1965 г. в Новосибирске. В работе симпозиума приняли участие более двухсот человек, в том числе ряд ведущих советских и зарубежных ученых. Настоящее издание содержит тексты докладов, представленные авторами для опубликования.

ОРГКОМИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНОГО СИМПОЗИУМА ПО ПРОБЛЕМЕ МНОГИХ ТЕЛ

академик <i>Н. Н. Боголюбов</i>	председатель (Математический институт АН СССР)
член-корреспондент АН СССР <i>Д. В. Ширков</i>	заместитель председателя (Институт математики СО АН СССР)
член-корреспондент АН СССР <i>С. Т. Белаяев</i>	Институт ядерной физики СО АН СССР
доктор физико-математических наук <i>В. Л. Бонч-Бруевич</i>	МГУ
доктор физико-математических наук <i>В. М. Галицкий</i>	Институт ядерной физики СО АН СССР
<i>Ф. А. Киселев</i>	СО АН СССР
<i>Л. Г. Лавров</i>	СО АН СССР
доктор физико-математических наук <i>В. Л. Покровский</i>	ученый секретарь (Институт радиофизики и электроники СО АН СССР)
доктор физико-математических наук <i>Ю. Б. Румер</i>	Институт радиофизики и электроники СО АН СССР
член-корреспондент АН СССР <i>Р. З. Сагдеев</i>	заместитель председателя (Институт ядерной физики СО АН СССР)
доктор физико-математических наук <i>В. Г. Соловьев</i>	Объединенный институт ядерных исследований
доктор физико-математических наук <i>И. М. Халатников</i>	Институт теоретической физики АН СССР
кандидат физико-математических наук <i>В. Н. Байер</i>	зам. ученого секретаря (Институт ядерной физики СО АН СССР)
кандидат физико-математических наук <i>И. А. Квасников</i>	зам. ученого секретаря (МГУ)

Сверено

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

доктор физ.-матем. наук *В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ*

Институт СО АН СССР

Гос. публ. науч.

техническая библиотека

В.33

П.781

I. ОБЩИЕ МЕТОДЫ

ВЫРАЖЕНИЕ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ЧЕРЕЗ ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ

Ф. А. Березин

Московский государственный университет,
Механико-математический факультет

В 1937 г. Бетом и Уленбеком (см., например, [1]) была получена формула, выражающая второй коэффициент разложения логарифма квантовой статистической суммы по степеням активности через фазы рассеяния. В настоящей работе устанавливаются аналогичные соотношения между произвольным коэффициентом разложения по степеням активности и оператором рассеяния. Впервые эти формулы были приведены в работе [2]. Третий коэффициент изучался ранее с помощью теории возмущений в [3].

Предлагаемые формулы сравнительно громоздки и могут служить эффективным средством для вычисления статистической суммы, только если известно выражение для оператора рассеяния n частиц. В настоящее время такой оператор имеется лишь для двух одномерных моделей (см. [4]). Однако само наличие этих формул указывает на существование прямой связи между рассеянием и статистическими свойствами частиц.

В данной работе рассмотрены только частицы со спином, равным нулю, однако все результаты легко переносятся на общий случай. Из методических соображений, кроме статистики Бозе и статистики Ферми, рассмотрена также статистика Больцмана.

1. СТАТИСТИКА БОЛЬЦМАНА

Обозначим через H_N оператор энергии N одинаковых частиц с парным взаимодействием, находящихся в кубе объемом Ω :

$$H_N = -\frac{1}{2m} \sum \Delta_k + g \sum_{i < j} v(x_i - x_j), \quad x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}), \quad (1)$$

где Δ_k — оператор Лапласа по переменным x_k , которые пробегают куб. Чтобы исключить граничные эффекты, будем, как обычно, считать, что выполнены периодические граничные условия.

6. Г. Бете, А. Зоммерфельд. Электронная теория металлов. М., ОНТИ, 1938; Дж. Займан. Электроны и фононы. ИЛ, 1962.
7. J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer. Phys. Rev., 1957, 108, 1175.
8. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. ГИФМЛ, 1962.
9. Ф. Крамер. Соединения включения. ИЛ, 1958; З. В. Шпольский. УФН, 1963, 80, 255.
10. R. G. Kepler, P. E. Bierstedt, R. E. Merrifield. Phys. Rev. Letters, 1960, 5, 503; X. Инокути, X. Акамату. Электропроводность органических полупроводников. ИЛ, 1963.

ON ONE POSSIBLE MECHANISM OF SUPERCONDUCTIVITY

V. Z. Kresin

The new mechanism of superconductivity is considered. The effective electron-electron attraction is due to interaction with the molecules which are dissolved in the crystalline lattice (inclusion compounds) or are adsorbed on the surface of the sample. In the latter case the surface superconductivity becomes possible. In conducting molecular crystals the attraction is due to the electron interaction with crystal molecules. The effective electron-electron interaction is the change of virtual quantum of vibrational motion of the molecules. It is important that $\Delta E_{\text{vib}} \gg k\theta$. It is reasonable at first to investigate the effect of dissolving or of adsorption of molecules on the T_c of ordinary superconductor.

IV. ИОНИЗИРОВАННЫЙ ГАЗ

К ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

В. И. Карпман

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск

1. В настоящей работе рассматривается теория возмущений для нелинейных плазменных колебаний, исходя из общей постановки задачи, указанной Л. Д. Ландау [1], а именно, мы ищем решение нелинейной системы уравнений Больцмана — Власова и Пуассона для плазменных колебаний при заданном начальном возмущении в виде рядов по степеням этого возмущения и созданного им поля. Формальные разложения такого рода содержат последовательности секулярных членов, для исследования и суммирования которых развита соответствующая диаграммная техника. В результате суммирования получаются уравнения для «перенормированных» функций распределения частиц и напряженностей поля колебаний, уже не содержащие секулярностей. В частности, оказывается, что суммирование наиболее «сильно» растущих членов приводит к уравнениям квазилинейного приближения [2, 3]. Суммирование остальных классов диаграмм приводит к перенормированным величинам, учитывающим взаимодействие волн в различных порядках.

2. Основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_j}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_j}{m_j} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F_j}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_j e_j N_j \int F_j(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2)$$

(j — индекс, указывающий сорт частиц; в дальнейшем этот индекс, а также суммирование по нему для краткости опускаются; восстановление суммирования в окончательных формулах не представит затруднений).

Следуя [1], будем искать решение уравнений (1) и (2) при начальном условии

$$F(t=0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}^0(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = f(v) + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3)$$

Разложим $F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, $E(t, \mathbf{r})$ в ряд Фурье

$$F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}(t, \mathbf{v}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad E(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (4)$$

(нормировочный объем всюду принят равным единице) и применим преобразование Лапласа к величинам, зависящим от времени:

$$E_{\mathbf{k}}(\omega) = \int_0^{\infty} E_{\mathbf{k}}(t) e^{i\omega t} dt, \quad E_{\mathbf{k}}(t) = \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} E_{\mathbf{k}}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (5)$$

и т. д. (все функции в лапласовском представлении являются аналитическими в верхней полуплоскости ω , кроме, может быть, некоторой окрестности действительной оси). Разложим теперь функцию распределения в ряд по степеням поля

$$F_{\mathbf{k}}(\omega, \mathbf{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}), \quad (6)$$

где $F_{\mathbf{k}}^{(n)} \sim E_{\mathbf{k}}^n$, $E_{\mathbf{k}} \sim g_{\mathbf{k}}$. За нулевое приближение примем $f(v)$ (см. (3)). Из (1) и (3) получается следующее выражение для общего члена:

$$F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}) = \left(\frac{e}{2\pi i m} \right)^n \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\dots+\mathbf{k}_n} \left\{ \int d\omega_1 \dots d\omega_n \frac{E_{\mathbf{k}_1}(\omega_1)}{\omega - k\mathbf{v}} \times \right. \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{E_{\mathbf{k}_2}(\omega_2)}{\omega - k\mathbf{v} - (\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v})} \dots \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{E_{\mathbf{k}_n}(\omega_n)}{\omega - k\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{f(v)}{\omega - k\mathbf{v} - \sum_{i=1}^n (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} + \frac{2\pi i^2 m}{e} \int d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \frac{E_{\mathbf{k}_1}(\omega_1)}{\omega - k\mathbf{v}} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{E_{\mathbf{k}_2}(\omega_2)}{\omega - k\mathbf{v} - (\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v})} \dots \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{E_{\mathbf{k}_{n-1}}(\omega_{n-1})}{\omega - k\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n-2} (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} \times \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{g_{\mathbf{k}_n}(\mathbf{v})}{\omega - k\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v})} \right\} \quad (7)$$

(контуры интегрирования по ω должны удовлетворять условиям $\text{Im} \left(\omega - \sum_i \omega_i \right) > 0$, $\text{Im} \omega_i > 0$).

Это выражение изображается диаграммой, приведенной на рис. 1. Сплошным вертикальным линиям диаграммы соответствуют величины:

$$E_{\mathbf{k}_n}(\omega_n), \text{ горизонтальным — «пропагаторы» } \left[\omega - k\mathbf{v} - \sum_{i=1}^s (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{v}) \right]^{-1},$$

$0 \leq s \leq n$; s -й вершине отвечает интегро-дифференциальный оператор

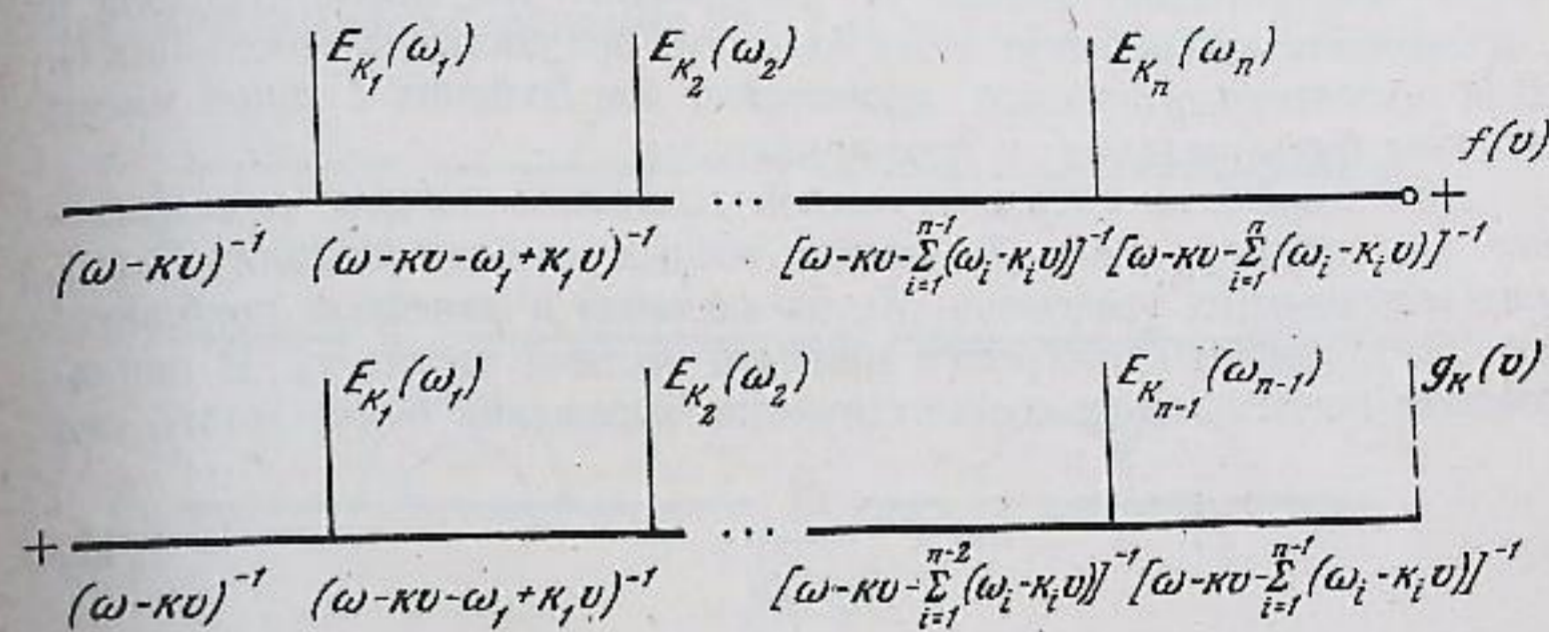


Рис. 1

$\frac{e}{2\pi i m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int d\omega_s$, кружок в начале первого члена на рис. 1 изображает функцию $f(v)$, а вертикальная пунктирная линия в конце второго члена — функцию $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})$. Порядок члена равен числу вершин.

Рассмотрим теперь уравнение для поля волны (2). Учитывая (5) и (6), перепишем его в виде

$$\mathbf{k} \cdot E_{\mathbf{k}}(\omega) = -4\pi e N \sum_{n=1}^{\infty} \int F_{\mathbf{k}}^{(n)}(\omega, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (8)$$

Если отбросить в правой части все члены с $n > 1$ и подставить сюда (7) с $n=1$, то получится известное уравнение для поля волны в линейном приближении, впервые полученное Л. Д. Ландау [1]:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega) E_{\mathbf{k}}(\omega) = \frac{4\pi e N}{k} \int \frac{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\omega - k\mathbf{v}}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega)$ — диэлектрическая проницаемость плазмы,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\omega) = 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2} \mathbf{k} \int \frac{d\mathbf{v}}{\omega - k\mathbf{v}} \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{v}}. \quad (10)$$

Из (9) следует, что в линейном приближении

$$E_k(t) \approx E_k^0 e^{-i\omega_k t}, \quad E_k^0 = \frac{4\pi e N}{k [d\varepsilon(\omega_k)/d\omega_k]} \int \frac{g_k(v) dv}{\omega_k^0 - kv + i0}, \quad (11)$$

где частота $\omega_k = \omega_k^0 + i\gamma_k$ является корнем дисперсионного уравнения $\varepsilon_k(\omega) = 0$, обладающим наибольшей мнимой частью. В дальнейшем предполагается, что выполнено условие $\gamma_k/\omega_k^0 \ll 1$, без которого излагаемые ниже результаты неприменимы.

3. В формальном разложении (6) не все нелинейные члены являются действительно малыми (в том смысле, что после перехода к t -представлению они могут стать большими при достаточно больших t). Для получения правильной асимптотики при больших t такие члены должны быть выделены и просуммированы.

Для выявления «больших» членов подставим сначала в выражение для общего члена (7) вместо точных компонент поля $E_k(\omega)$, удовлетворяющих уравнению (8), их значения в линейном приближении (11), причем пренебрежем мнимыми частями частот γ_k . В лапласовском представлении соответствующие выражения будут иметь вид

$$E_k(\omega) \approx \frac{E_k^0}{\omega - \omega_k^0}, \quad (12)$$

где E_k^0 — амплитуда колебаний в линейном приближении, определяемая равенством (11). Благодаря простому виду (12) можно легко выполнить интегрирование по всем ω_i в общем члене (7), в результате чего величины ω_i заменяются на $\omega_{k_i}^0$, а $E_{k_s}(\omega_s)$ — на $E_{k_s}^0$. Заметим теперь, что среди различных диаграмм в сумме по k_i на рис. 1 будут диаграммы, в которых рядом стоящие линии отвечают сопряженным компонентам поля ($k_s = -k_{s+1}$, $\omega_{k_s}^0 = -\omega_{k_{s+1}}^0$). Такие линии мы будем называть спаренными. Спаренные линии на диаграммах замыкаются в петли (см: рис. 2 и 3). Пропагаторы, стоящие с двух сторон петли, оказываются одинаковыми, что приводит к появлению в $F^{(n)}(\omega, v)$ кратных полюсов по ω . В t -представлении соответствующие члены будут секулярными, т. е. пропорциональными t^r , где $r+1$ — кратность полюса в лапласовском представлении.

Легко видеть, что типичный член, вносящий вклад в функцию распределения (6), после выполнения всех дифференцирований имеет вид (для простоты записи мы не учитываем векторного характера величин v и p_i)

$$R(\omega, v) = \frac{\Psi(v)}{(\omega - a)^{m+1} (\omega - b_1 - p_1 v)^{n_1} \dots}, \quad (13)$$

где все $p_i \neq 0$, а $\Psi(v)$ — пропорциональна производной определенного порядка от начальной функции распределения $f(v)$ или начального возмущения $g_k(v)$. Следуя [1], будем считать эти функции целыми (хотя, вообще говоря, достаточно было бы потребовать аналитичности этих функций в некоторой окрестности действительной оси).

В выражении (13) мы выделили отдельно полюс кратности $m+1$, не зависящий от v (величина a будет определена ниже). Нетрудно видеть, что m равно числу петель, лежащих между крайней правой вертикальной линией и правым концом диаграммы (такие петли мы будем называть свободными). При этом перекрывающиеся и пересекающиеся петли считаются за одну. Так, например, в диаграмме $2n+1$ -го порядка на рис. 2, а имеется

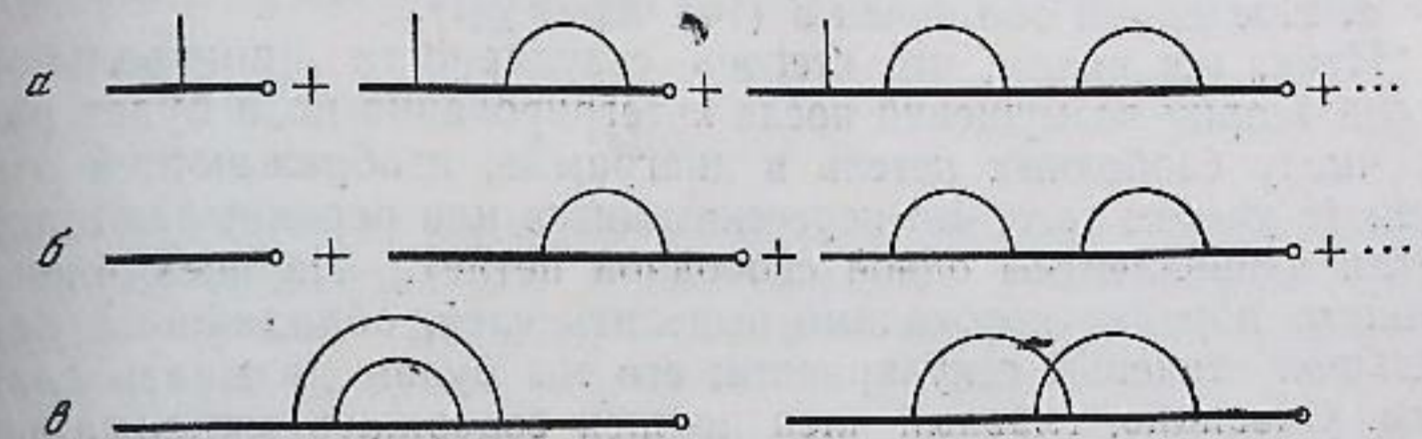


Рис. 2

n свободных петель; поэтому $m=n$. В диаграммах, изображенных на рис. 2, в (перекрывающиеся и пересекающиеся петли), $m=1$. Что касается величины a , то нетрудно видеть, что последняя равна сумме всех частот, отвечающих вертикальным линиям диаграммы ($a = \sum \omega_{k_i}$). Так, для диаграммы на рис. 2, а имеем

$a = \omega_k$, для диаграммы на рис. 2, б — соответственно $a=0$. Полюс, не зависящий от v , играет особую роль потому, что в правую часть уравнения для поля (8) входят интегралы вида

$$\int R(\omega, v) dv = (\omega - a)^{-(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} dv \Psi(v) (\omega - b_1 - p_1 v)^{-n_1} \dots \quad (14)$$

Поскольку интеграл правой части (14) не имеет особенностей в любой конечной области комплексной плоскости¹ ω , то после

¹ Действительно, в верхней полуплоскости этот интеграл является аналитической функцией по определению. При продолжении ее в нижнюю полу-

перехода от (14) к t -представлению мы получим выражение типа

$$\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega, \nu) d\nu = \text{const} [t^m + O(t^{m-1})] e^{-iat} + \chi(t), \quad (15)$$

где $\chi(t)$ экспоненциально мало по сравнению с первым членом. Чтобы получить (15), необходимо сместить интегрирование по ω в нижнюю полуплоскость, обходя при этом полюс при $\omega = a$ так, чтобы он все время находился ниже контура интегрирования. Тогда интеграл сведется к вычету относительно полюса и интегралу по горизонтальной прямой, лежащей ниже точки $\omega = a$. Последний обозначен в (15) через $\chi(t)$.

Итак, мы видим, что степень секулярности произвольного члена теории возмущений после интегрирования по ν будет равна числу свободных петель в диаграмме, изображающей этот член (с учетом того, что пересекающиеся или перекрывающиеся петли эквивалентны одной свободной петле). Из всех членов данного порядка необходимо выделить член, обладающий наибольшей степенью секулярности; его мы будем называть главным. Очевидно, главный член должен содержать максимально возможное (при данном порядке) число свободных петель, не пересекающихся и неперекрывающихся. Такие члены в правой части уравнения (8) изображаются диаграммами, приведенными на рис. 2, а. В первом приближении можно ограничиться суммированием главных секулярных членов, как наиболее сильно растущих, а затем уже учитывать остальные члены, обладающие меньшей секулярностью при заданном порядке.

До сих пор предполагалось, что вместо $E_k(\omega)$ в (7) подставляется линейное приближение (12). Если подставлять точные $E_k(\omega)$ или (12) но с комплексной частотой $\omega_k = \omega_k^0 + i\gamma_k$, то после перехода к t -представлению секулярные члены не будут появляться. Однако если $|E_k(t)|$ медленно зависит от времени, то члены, содержащие петли, будут хотя и не секулярными, но большими при достаточно больших t . Если, например, вместо $E_k(\omega)$ подставлять (12) с комплексными ω_k , то, как нетрудно убедиться, вместо секулярного множителя t^r будет стоять $(\omega_k^0/\gamma_k)^r \gg 1$, так что соответствующие члены по-прежнему следует считать большими. Основное отличие результатов настоящей

плоскость можно, следуя приему, указанному в [1], деформировать контур интегрирования таким образом, чтобы полюса оставались все время выше контура. Таким образом, единственная особенность этого интеграла — существенно-особая точка при $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$.

работы от результатов, полученных в [4], связано с тем, что в теории возмущений, развиваемой в [4], указанные большие члены не суммируются.

Заметим, наконец, что ниже, при суммировании диаграмм, мы не будем заменять $E_k(\omega)$ на приближенные выражения (12). Последнее нам было необходимо только для выявления «больших» членов.

4. Приступим теперь к суммированию главных секулярных членов, имеющих в правой части уравнения (8). Как уже указывалось, эти члены изображаются диаграммами на рис. 2, а. Обозначим их сумму через $\Phi_k^{(1)}(\omega, \nu)$. Легко убедиться, что эта величина очень просто выражается через функцию $\Phi(\omega, \nu)$, являющуюся суммой диаграмм, приведенных на рис. 2, б, а именно

$$\Phi_k^{(1)}(\omega, \nu) = \frac{e}{im} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{E_k(\omega)}{\omega - kv} \frac{\partial \Phi(\omega - \omega', \nu)}{\partial \nu}. \quad (16)$$

Величина $\Phi(\omega, \nu)$ является пространственно однородной частью функции распределения в приближении, учитывающем лишь главные члены. (Ее можно называть функцией распределения «фона».) Из диаграмм, приведенных на рис. 2, б, следует, что $\Phi(\omega, \nu)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению Дайсона в квантовой теории поля

$$-i\omega \Phi(\omega, \nu) = f(\nu) + \frac{i}{(2\pi)^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_q \int E_{-q}(\omega') \frac{\partial}{\partial \nu} \times \frac{E_q(\omega'')}{\omega - q\nu - \omega'} \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\omega - \omega' - \omega'', \nu) d\omega' d\omega''. \quad (17)$$

Из (8) и (16) нетрудно получить уравнения для поля в рассматриваемом приближении

$$\int \frac{d\omega'}{2\pi} \varepsilon_k(\omega, \omega') E_k(\omega') = \frac{4\pi eN}{k} \int \frac{g_k(\nu) d\nu}{\omega - kv}, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon_k(\omega, \omega') = \frac{i}{\omega - \omega'} + \frac{\omega_0^2}{k^2} \int \frac{d\nu}{\omega - kv} k \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(\omega - \omega', \nu). \quad (19)$$

Если заменить здесь функцию $\Phi(\omega, \nu)$ ее нулевым приближением (первое слагаемое на рис. 2, б), т. е. положить $\Phi(\omega, \nu) = \frac{if(\nu)}{\omega}$, то (18) переходит в обычное линейное уравнение для поля (9).

Уравнения (17) — (19) представляют собой полную систему для функции распределения и поля в приближении, учитываю-

щем главные секулярные члены. Эта система подробно обсуждалась в [5], где показано, что в случае, когда спектр колебаний достаточно широк, (17) — (19) переходят в известные уравнения квазилинейной теории, полученные в [2, 3].

5. Рассмотрим, наконец, диаграммы, характеризующиеся меньшей степенью секулярности по сравнению с обсуждавшимися выше. Такие диаграммы при $k \neq 0$ могут содержать уже

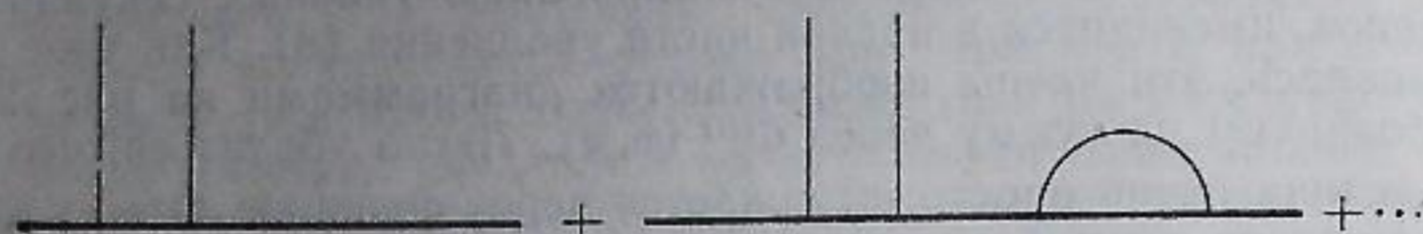


Рис. 3

более одной вертикальной линии, а также петли, расположенные левее этих линий или между ними. Такие петли не дают секулярных множителей после интегрирования по v ; поэтому петля, расположенная левее хотя бы одной вертикальной линии, дает такой же вклад, как и две неспаренные линии, стоящие на ее месте, так что диаграммы с такими петлями не имеет смысла выделять отдельно. Таким образом, мы можем рассматривать диаграммы, состоящие только из вертикальных линий и свободных петель.

Рассмотрим, например, диаграммы, состоящие из двух вертикальных линий и произвольного числа свободных петель (рис. 3). Обозначая их сумму через $\Phi_k^{(2)}(\omega, v)$, получаем

$$\Phi_k^{(2)}(\omega, v) = - \left(\frac{e}{im} \right)^2 \sum_{k=k_1+k_2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \frac{E_{k_1}(\omega_1)}{\omega - kv} \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_{k_2}(\omega_2)}{\omega - \omega_1 - (k-k_1)v} \times \frac{\partial}{\partial v} \Phi(\omega - \omega_1 - \omega_2, v), \quad (20)$$

где $\Phi(\omega, v)$ является суммой диаграмм без вертикальных линий. В первом приближении, рассмотренном в п. 4, $\Phi(\omega, v)$ удовлетворяет уравнению (17); в следующем приближении необходимо написать уравнение Дайсона, учитывающее перекрывающиеся и пересекающиеся диаграммы. Мы не будем здесь приводить соответствующее уравнение; укажем лишь, что оно отличается от уравнения (17) наличием дополнительных членов¹ (четвертого порядка по полю), соответствующих диаграммам, изображенным на рис. 2, в.

¹ Эти члены имеют очень простой смысл: они описывают влияние эффектов взаимодействия волн на функцию распределения фона.

Совершенно аналогичные результаты получаются при суммировании диаграмм с большим числом вертикальных линий.

Из всего изложенного вытекает, что уравнение для поля колебаний (8) можно преобразовать к виду

$$\int \varepsilon_k(\omega, \omega') E_k(\omega') \frac{d\omega'}{2\pi} = \frac{4\pi e N}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \int \Phi_k^{(n)}(\omega, v) dv + \frac{4\pi e N}{k} \sum_{k=1}^{\infty} \int G_k^{(n)}(\omega, v) dv, \quad (21)$$

где $\varepsilon_k(\omega, \omega')$ — ядро оператора диэлектрической проницаемости, определенное формулой (19); $\Phi_k^{(n)}$ — «перенормированная» функция распределения n -го порядка, определяемая аналогично $\Phi_k^{(2)}(\omega, v)$, а $G_k^{(n)}(\omega, v)$ — сумма всех диаграмм, содержащих пунктирную линию на конце, т. е. явно зависящих от начального возмущения $g_k(v)$.

Левая часть (21), как уже отмечалось выше, описывает резонансное взаимодействие волн с частицами, т. е. учитывает эффекты, рассматриваемые в квазилинейной теории. Члены, содержащие $\Phi^{(n)}$, отвечают взаимодействию волн между собой в соответствующем порядке. С помощью этих членов можно определить нелинейные отклики, определяющие кинетические уравнения для волн (подробнее об этом см. [6, 7]).

6. Рассмотрим теперь коротко члены $G_k^{(n)}(\omega, v)$. Из общего выражения для $G_k^{(n)}$ следует, что эта величина зависит от времени, как $t^r e^{-ikvt}$ (r — некоторое целое число). При интегрировании по v осциллирующий множитель обеспечивает достаточно быстрое стремление к нулю интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} G_k^{(n)}(t, v) dv$. Однако возникает вопрос, не могут ли секулярные множители в сумме по n привести к столь быстро растущей функции, которая привела бы к росту всей суммы интегралов. Можно показать, что это невозможно, т. е. второе слагаемое в правой части (21) достаточно быстро стремится к нулю с ростом t . Мы не будем здесь развлекать строгое доказательство этого факта, а ограничимся простыми соображениями, показывающими суть дела.

Если ограничиться вкладом в $G_k(t, v) = \sum_n G_k^{(n)}$ только главных секулярных членов, которые, как нетрудно убедиться, изображаются диаграммами на рис. 4, то для $G_k(\omega, v)$ получается уравнение

$$-i(\omega - kv) G_k(\omega, v) = g_k(v) +$$

$$+ i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \sum_q \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \frac{E_{-q}(\omega') E_q(\omega'')}{\omega - \omega' - (q+k)v} \frac{\partial G_k(\omega - \omega' - \omega'', v)}{\partial v} \quad (22)$$

(волновой пакет для простоты подразумевается одномерным). Полагая, что амплитуда поля достаточно медленно изменяется во времени, можно считать, что величины $E_q(\omega)$ имеют острый максимум при $\omega \sim \omega_q$, так что уравнение (22) принимает вид

$$-i(\omega - kv) G_k(\omega, v) = g_k(v) + i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \sum_q \frac{|E_q^0|^2}{\omega - (q+k)v + \omega_q} \frac{\partial G_k(\omega, v)}{\partial v}, \quad |E_q(t)| \approx |E_q^0| = \text{const}. \quad (23)$$

Если пренебречь вторым членом в правой части (23), то получится решение, отвечающее первому приближению: $G_k(t, v) = g_k(v) \exp(-ikvt)$.

Будем искать решение уравнения (23) в виде $G_k(t, v) = g_k(t, v) e^{-ikvt}$, где $g_k(t, v)$ — медленно меняющаяся функция t .

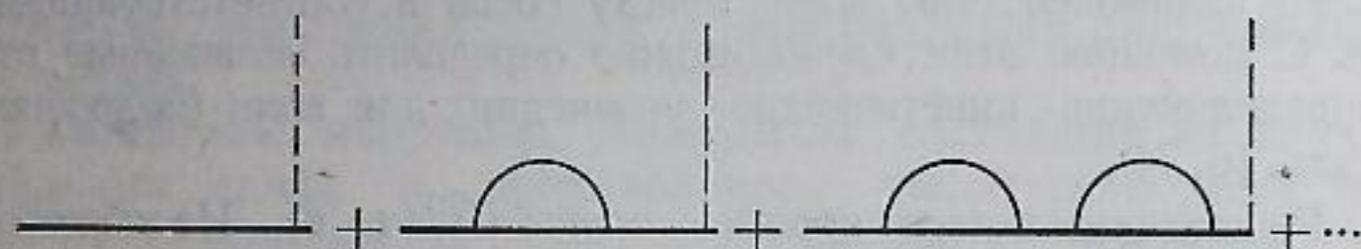


Рис. 4

В лапласовском представлении это означает, что функция $G_k(\omega, v) \equiv g_k(\omega - kv, v)$ существенно отличается от нуля лишь при $\omega \sim kv$. При этих значениях ω уравнение (23) приближенно можно записать в виде

$$-i(\omega - kv) G_k(\omega, v) = g_k(v) + i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \sum_q \frac{|E_q^0|^2}{\omega_q - qv + i0} \frac{\partial G_k(\omega, v)}{\partial v}. \quad (23a)$$

Переводя теперь (23a) в t -представление, получаем асимптотическое уравнение, справедливое при достаточно больших t :

$$\frac{\partial G_k(t, v)}{\partial t} + ikv G_k(t, v) = \frac{\partial}{\partial v} D(v) \frac{\partial G_k(t, v)}{\partial v}, \quad (24)$$

$$D(v) = \pi \sum_q |E_q^0|^2 \delta(\omega_q - qv) \sim \frac{k}{\omega_k} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \overline{|E|^2} (\Delta k)^{-1}, \quad (25)$$

где $\overline{|E|^2}$ — средний квадрат напряженности поля колебаний, а k и Δk — среднее волновое число и ширина волнового пакета. Уравнение (24) отличается от основного уравнения квазилинейной теории только вторым членом в левой части. При этом $D(v)$ точно совпадает с коэффициентом квазилинейной диффузии в пространстве скоростей. Предполагая, что волновой пакет является достаточно узким, можно пренебречь изменением $D(v)$ внутри резонансной области скоростей, где $v = \omega_q/q$. Тогда решение уравнения (24) в этой области примет вид

$$G_k(t, v) \approx g_k(v) e^{-ikvt} \exp\left(-\frac{k^2 D t^3}{3}\right). \quad (26)$$

Таким образом, функция $G_k(t, v)$ в резонансной области скоростей затухает за время

$$\tau \sim (k^2 D)^{-1/3} \sim \left[\frac{k^2}{\Delta k \omega_q} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \overline{|E|^2} \right]^{1/3}. \quad (27)$$

Физический смысл этого затухания нетрудно понять, если заметить, что время диффузионного размытия «неоднородностей» в пространстве скоростей есть $\tau \sim (\delta v)^2/D$, где δv — протяженность неоднородности. Поскольку $G_k(t, v)$ осциллирует как e^{-ikvt} , то нужно положить $\delta v \sim (k\tau)^{-1}$. Из этих двух соотношений для τ получается в точности выражение (27).

Вне резонансной области $D(v)$ исчезает, и уравнение (24) приводит к решению первого приближения $g_k(v) e^{-ikvt}$. Однако в этом случае необходимо получить более точное уравнение для $G_k(t, v)$, которое приводит к другой зависимости от t . Последнее имеет весьма сложный вид и получить его решение затруднительно. Однако, даже не зная этого решения, можно заключить, что вне резонансной области функция $G_k(t, v)$ возрастать не может, поскольку в этом случае возникали бы аномально большие градиенты на границе резонансной и нерезонансной областей. Поскольку, кроме этого, $G_k(t, v)$ содержит осциллирующий множитель e^{-ikvt} , то $\int G_k(t, v) dv$ затухает с ростом t . Характерное время этого затухания не меньше, чем $\tau_g \sim (kv_g)^{-1}$, где τ_g — время затухания интеграла $\int g_k(v) \exp(-ikvt) dv$, а v_g — «ширина» функции $g_k(v)$, поскольку «ширина» $G_k(t, v)$ не больше, чем v_g .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1946, 16, 574.
2. А. А. Ведынов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 1961, 1, 82.
3. W. Drummond, D. Pines. Nuclear Fusion Suppl., Pt 3, 1962, 1049.
4. D. Montgomery. Phys. Fluids, 1963, 6, 1109.
5. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 1965, 49, 515.
6. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 1964, 47, 1552.
7. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 1965, 5, 20.

ON THE PERTURBATION THEORY FOR NONLINEAR OSCILLATIONS
IN A COLLISIONLESS PLASMA

V. I. Karpmán

The dynamical perturbation theory for nonlinear oscillations in a collisionless plasma is derived. Summation of the series of secular terms leads to the equations for «slow» processes, describing nonlinear waves-particles and waves-waves interactions in a plasma.

О ЗАТУХАНИИ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Р. К. Мазитов, А. М. Фридман

Институт ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск

1. Теория плазменных колебаний указывает на специфическую роль резонансных частиц (таких, для которых выполняется условие

$$\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v} = n\omega_H, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

здесь ω_k , \mathbf{k} — частота и волновой вектор колебания, \mathbf{v} — скорость частицы, $\omega_H = \frac{eH}{mc}$), которые, обмениваясь энергией с волнами,

усиливают или ослабляют их. Важная роль таких частиц в затухании плазменных волн видна уже из того, что декремент затухания волн γ в разреженной плазме пропорционален производной функции распределения резонансных частиц¹.

Согласно линейной теории созданное в плазме бесконечно малое возмущение постепенно затухает, и система возвращается к термодинамическому равновесному состоянию за время порядка $1/\gamma$. Квазилинейная теория [1] указывает на существование выделенных состояний, к которым приходит неустойчивая плазма в результате развития в ней возмущений. Эти состояния характерны тем, что в них функция распределения f в некоторых областях фазового пространства оказывается постоянной (на графике функции f появляется «плато»). Последнее соответствует, согласно сказанному выше прекращению затухания колебаний. Такой случай можно наблюдать в бесстолкновительной плазме в отсутствие магнитного поля. Столкновения между частицами плазмы ведут к разрушению «плато». Учет столкновений приближает функцию распределения к максвелловской, устанавливается стационарное поглощение колебаний.

¹ См., например, А. А. Ведынов. Вопросы теории плазмы, вып. 3. Госатомиздат, 1963.