ПРОБЛЕМА МНОГИХ ТЕЛ И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Труды Международного симпозиума

НОВОСИБИРСК, 1965 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1967

УДК 519.4+533.9

Международный симпозиум по проблеме многих тел, организованный Сибирским отделением АН СССР, проводился 24 марта — 1 апреля 1965 г. в Новосибирске. В работе симпозиума приняли участие более двухсот человек, в том числе ряд ведущих советских и зарубежных ученых.
Настоящее издание содержит тексты докладов, представленные авторами для опубликования.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

доктор физ.-матем. наук *В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ*

2-3-2

I. ОБЩИЕ МЕТОДЫ

ВЫРАЖЕНИЕ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ЧЕРЕЗ ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ

Ф. А. Березин

Московский государственный университет,
Механико-математический факультет

В 1937 г. Бетом и Уленбеком (см., например, [1]) была получена формула, выражающая второй коэффициент разложения логарифма квантовой статистической суммы по степеням активности через фазы рассеяния. В настоящей работе устанавливаются аналогичные соотношения между произвольным коэффициентом разложения по степеням активности и оператором рассеяния. Впервые эти формулы были приведены в работе [2]. Третий коэффициент изучался ранее с помощью теории возмущений в [3].

Предлагаемые формулы сравнительно громоздки и могут служить эффективным средством для вычисления статистической суммы, только если известно выражение для оператора рассеяния n частиц. В настоящее время такой оператор имеется лишь для двух одномерных моделей (см. [4]). Однако само наличие этих формул указывает на существование прямой связи между рассеянием и статистическими свойствами частиц.

В данной работе рассмотрены только частицы со спином, равным нулю, однако все результаты легко переносятся на общий случай. Из методических соображений, кроме статистики Бозе и статистики Ферми, рассмотрена также статистика Больцмана.

1. СТАТИСТИКА БОЛЬЦМАНА

Обозначим через H_N оператор энергии N одинаковых частиц с парным взаимодействием, находящихся в кубе объемом Ω:

$$H_N = -\frac{1}{2m}\Sigma\Delta_k + g\sum_{i<j} v(x_i - x_j), \quad x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}), \qquad (1)$$

где Δ_k — оператор Лапласа по переменным x_k, которые пробегают куб. Чтобы исключить граничные эффекты, будем, как обычно, считать, что выполнены периодические граничные условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1946, 16, 574.
2. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 1961, 1, 82.
3. W. Drummond, D. Pines. Nuclear Fussion Suppl., Pt 3, 1962, 1049.
4. D. Montgomery. Phys. Fluids, 1963, 6, 1109.
5. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 1965, 49, 515.
6. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман. ЖЭТФ, 1964, 47, 1552.
7. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез, 1965, 5, 20.

ON THE PERTURBATION THEORY FOR NONLINEAR OSCILLATIONS IN A COLLISIONLESS PLASMA

V. I. Karpman

The dynamical perturbation theory for nonlinear oscillations in a collisionless plasma is derived. Summation of the series of secular terms leads to the equations for «slow» processes, describing nonlinear waves-particles and waves-waves interactions in a plasma.

О ЗАТУХАНИИ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Р. К. Мазитов, А. М. Фридман

Институт ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск

1. Теория плазменных колебаний указывает на специфическую роль резонансных частиц (таких, для которых выполняется условие

$$\omega_k - \mathbf{k}\mathbf{v} = n\omega_H, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots ,$$

здесь ω_k, $\mathbf{k}$ — частота и волновой вектор колебания, $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\omega_H = \frac{eH}{mc}\Big)$, которые, обмениваясь энергией с волнами, усиливают или ослабляют их. Важная роль таких частиц в затухании плазменных волн видна уже из того, что декремент затухания волн γ в разреженной плазме пропорционален производной функции распределения резонансных частиц[1].

Согласно линейной теории созданное в плазме бесконечно малое возмущение постепенно затухает, и система возвращается к термодинамическому равновесному состоянию за время порядка $1/\gamma$. Квазилинейная теория [1] указывает на существование выделенных состояний, к которым приходит неустойчивая плазма в результате развития в ней возмущений. Эти состояния характерны тем, что в них функция распределения f в некоторых областях фазового пространства оказывается постоянной (на графике функции f появляется «плато»). Последнее соответствует, согласно сказанному выше прекращению затухания колебаний. Такой случай можно наблюдать в бесстолкновительной плазме в отсутствие магнитного поля. Столкновения между частицами плазмы ведут к разрушению «плато». Учет столкновений приближает функцию распределения к максвелловской, устанавливается стационарное поглощение колебаний.

[1] См., например, А. А. Веденов. Вопросы теории плазмы, вып. 3. Госатомиздат, 1963.

В настоящей работе исследуется влияние слабого магнитного поля на условия затухания электронных ленгмюровских колебаний. Оказывается, что магнитное поле препятствует установлению «плато» на функции распределения, так что стационарное поглощение может установиться и в отсутствие столкновений.

Таким образом, действие магнитного поля в некотором смысле аналогично учету столкновений. Если в последнем случае декремент затухания зависит от частоты столкновений, то в нашем случае он определяется ларморовской частотой электронов.

2. Предположим, что в момент времени $t=0$ в плазме возбужден одномерный спектр электронных ленгмюровских колебаний. Колебания созданы только в интервале $(k_0, k_0+\Delta k)$ пространства волновых векторов, причем $\Delta k \ll k_0$. Будем считать, что длина волны много меньше ларморовского радиуса электронов в резонансной области

$$\frac{1}{k} \ll \frac{\omega_0}{k\omega_H}, \quad k_0 < k < k_0 + \Delta k_0. \tag{1}$$

Здесь ω_H — ларморовская частота электронов, ω_0 — плазменная частота.

Задачу о затухании колебаний рассмотрим в квазилинейном приближении. Если направление волновых векторов $(k \parallel ox)$ перпендикулярно направлению магнитного поля $(H \parallel oz)$, то квазилинейное уравнение для усредненной функции распределения будет иметь наиболее простой вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D(t)\, \frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2} - \omega_H \left(v_y \frac{\partial f}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f}{\partial v_y} \right), \tag{2}$$

где

$$D(t) \approx \frac{e^2}{2m^2} \frac{|E_{k_0}^2(t)|}{v_0}, \quad v_0 = \frac{\omega_0}{k_0 + \Delta k}.$$

Здесь $E_{k_0}^2$ — спектральная плотность энергии колебаний, e — заряд электрона, m — масса электрона, v_i — i-я компонента скорости электрона.

В дальнейшем ограничимся случаем достаточно узкого пакета колебаний[1]

$$\frac{\Delta v \cdot v}{v_T^2} \ll 1, \quad \Delta v_0 = \frac{\omega_0 \Delta k_0}{k_0 (k_0 + \Delta k_0)} \tag{3}$$

и будем считать, что характерное время диффузии много меньше времени прохождения электроном резонансной области в той

[1] Разумеется, в области применимости квазилинейной теории.

части пространства скоростей, где происходит максимальное поглощение колебаний

$$\frac{\Delta v_0^2}{D} \ll \frac{1}{\omega_H} \frac{\Delta v_0}{|v_y|}, \quad \sqrt{3\,\Delta v_0 \cdot v_0} \leqslant |v_y| \leqslant v_T$$

или

$$\alpha = \frac{\omega_H \Delta v_0 \cdot v_T}{D} \ll 1. \tag{4}$$

В неравенстве (4) можно положить $D \approx D(0)$, так как интерес представляют только колебания, амплитуда которых за время порядка $\frac{1}{\omega_H}\sqrt{\frac{\Delta v_0}{v_0}}$ изменяется незначительно.

Как будет показано ниже, при выполнении условий (3) и (4) в резонансной области сильно искажается лишь производная по v_x от функции распределения, изменением самой функции распределения можно пренебречь. Следовательно, за время прохождения электроном резонансной области в ней устанавливается квазистационарное состояние.

3. Таким образом, задача сводится к решению стационарного уравнения

$$D_0 \frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2} = \omega_H \left(v_y \frac{\partial f}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial f}{\partial v_y} \right) \tag{5}$$

со следующими граничными условиями: в области, где $v_y > 0$,

$$D_0 \frac{\partial f}{\partial v_x}\bigg|_{v_x=v_0} = -\omega_H v_y \left[\varphi_0 - f|_{v_x=v_0}\right], \quad \frac{\partial f}{\partial x_x}\bigg|_{v_x=v_0+\Delta v_0} = 0, \tag{6а}$$

и в области, где $v_y < 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial v_x}\bigg|_{v_x=v_0} = 0, \quad D_0 \frac{\partial f}{\partial v_x}\bigg|_{v_x=v_0+\Delta v_0} = -\omega_H v_y \left[\varphi_0 - f|_{v_x=v_0+\Delta v_0}\right]. \tag{6б}$$

Здесь

$$\varphi_0 = \frac{n}{2\pi v_T^2} \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2}{2v_T^2} \right)$$

— невозмущенная функция распределения электронов по скоростям, n — плотность, $D_0 \equiv D(0)$.

Решение уравнения (5) будем искать в виде ряда

$$f = f_0 + \frac{\omega_H}{D_0} f_1 + \left(\frac{\omega_H}{D_0} \right)^2 f_2 + \ldots \tag{7}$$

Используя граничные условия (6а) и (6б) и пренебрегая членами второго порядка малости, имеем[1]

$$f = \frac{1}{1 + \frac{\Delta v_0 \cdot v_0}{v_T^2}} \left\{ \varphi_0(v_0) + \frac{\omega_H}{D_0} \left[\left(v_x \frac{(v_0 + \Delta v_0)^2}{2} - \frac{v_x^3}{6} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial v_y} + c(v_y) \right] \right\}$$

$$\text{для } v_y > 0 \tag{8}$$

и

$$f = \frac{1}{1 - \frac{\Delta v_0 \cdot v_0}{v_T^2}} \left\{ \varphi_0(v_0 + \Delta v_0) + \frac{\omega_H}{D_0} \left[\left(v_x \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_x^3}{6} \right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial v_y} + c(v_y) \right] \right\}$$

$$\text{для } v_y < 0.$$

Отметим, что нулевое приближение функции распределения отличается в резонансной области от среднего значения функции распределения в отсутствие магнитного поля. Это не удивительно, ибо вышеупомянутые значения вычислены с помощью одинаковых предельных переходов (устремлением t к бесконечности и ω_H к нулю), но при обратной их последовательности.

Пренебрегая членами порядка $\frac{\Delta v_0 \cdot v_0}{v_T^2}$, запишем выражение для производной функции распределения по v

$$\frac{\partial f}{\partial v_x} = -\frac{\omega_H v_y (v_0 + \Delta v_0 - v_x) v_0}{D_0 \cdot v_T^2} \varphi_0, \quad v_y > 0, \tag{9а}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v_x} = -\frac{\omega_H v_y (v_0 - v_x) v_0}{D_0 \cdot v_T^2} \varphi_0, \quad v_y < 0. \tag{9б}$$

Произведя усреднение по v_y, найдем декремент затухания

$$\gamma \approx \frac{\omega_H v_T \Delta v_0}{2 D_0} \gamma_0 = \frac{4 \pi n k T}{\varepsilon} \left(\frac{\Delta k_0}{k_0} \right)^2 \left(\frac{\omega_H}{v_T k_0} \right) \gamma_0. \tag{10}$$

Здесь γ_0 — декремент, вычисленный по линейной теории без учета магнитного поля; ε — плотность энергии колебаний, nkT — плотность кинетической энергии плазмы.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Р. З. Сагдееву, обратившему их внимание на рассматриваемый вопрос.

[1] Аддитивная постоянная $c(v_y)$ вычисляется из второго приближения. При этом оказывается, что для применимости теории возмущений требуется вместо (0) более сильное неравенство, хотя, для того, чтобы имела место формула (9), вполне достаточно выполнения неравенств (3) и (4). В этом можно убедиться, если решать уравнение (2) с помощью преобразования Лапласа по v_y.

DAMPING OF PLASMA OSCILLATIONS IN WEAK MAGNETIC FIELD

R. K. Mazitov, A. M. Fridman

The influence of a magnetic field on damping of longitudinal electron oscillations is investigated. It is shown that in the absence of collisions a weak magnetic field prevents formation of a «plateau» in the distribution function and leads to the stationary damping of the oscillations. The damping rate is determined by the electron cyclotron frequency.