ПРОБЛЕМА МНОГИХ ТЕЛ И ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

Труды Международного симпозиума

НОВОСИБИРСК, 1965 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1967

УДК 519.4+533.9

Международный симпозиум по проблеме многих тел, организованный Сибирским отделением АН СССР, проводился 24 марта — 1 апреля 1965 г. в Новосибирске. В работе симпозиума приняли участие более двухсот человек, в том числе ряд ведущих советских и зарубежных ученых.
Настоящее издание содержит тексты докладов, представленные авторами для опубликования.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

доктор физ.-матем. наук *В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ*

2-3-2

I. ОБЩИЕ МЕТОДЫ

ВЫРАЖЕНИЕ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ЧЕРЕЗ ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ

Ф. А. Березин

Московский государственный университет,
Механико-математический факультет

В 1937 г. Бетом и Уленбеком (см., например, [1]) была получена формула, выражающая второй коэффициент разложения логарифма квантовой статистической суммы по степеням активности через фазы рассеяния. В настоящей работе устанавливаются аналогичные соотношения между произвольным коэффициентом разложения по степеням активности и оператором рассеяния. Впервые эти формулы были приведены в работе [2]. Третий коэффициент изучался ранее с помощью теории возмущений в [3].

Предлагаемые формулы сравнительно громоздки и могут служить эффективным средством для вычисления статистической суммы, только если известно выражение для оператора рассеяния n частиц. В настоящее время такой оператор имеется лишь для двух одномерных моделей (см. [4]). Однако само наличие этих формул указывает на существование прямой связи между рассеянием и статистическими свойствами частиц.

В данной работе рассмотрены только частицы со спином, равным нулю, однако все результаты легко переносятся на общий случай. Из методических соображений, кроме статистики Бозе и статистики Ферми, рассмотрена также статистика Больцмана.

1. СТАТИСТИКА БОЛЬЦМАНА

Обозначим через H_N оператор энергии N одинаковых частиц с парным взаимодействием, находящихся в кубе объемом Ω:

$$H_N = -\frac{1}{2m}\Sigma\Delta_k + g\sum_{i<j} v(x_i - x_j), \quad x_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}), \tag{1}$$

где Δ_k — оператор Лапласа по переменным x_k, которые пробегают куб. Чтобы исключить граничные эффекты, будем, как обычно, считать, что выполнены периодические граничные условия.

взаимодействия v, представляется бесконечным рядом (в описанном методе ряд для массового оператора свернут в аналитически замкнутое выражение).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. C. Martin, J. Schwinger. Phys. Rev., 1959, 115, N 6, 1342.
2. И. И. Иванчик. К теории систем многих частиц, II. Препринт ФИАн 1964.

ON THE THEORY OF THE MANY-PARTICLE SYSTEMS

I. I. Ivanchik

An expression for the spectral density of the Schrödinger equation Green function is obtained, which gives an approximate account on the energy spectrum when the potential is arbitrary. This expression is used by calculation of the quantum statistical Green functions. The found expressions apparently contain the bound states spectrum of the many particle system.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ

Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков

Институт ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск

В работе приводятся некоторые результаты исследования качественного поведения продольных колебаний нелинейной струны с закрепленными концами (рис. 1), подчиняющейся уравнению

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left[1 + 3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{1}$$

Эта задача была исследована в работе Ферми, Паста и Улама [1] методом численного интегрирования колебаний цепочки нелинейных осцилляторов (рис. 1), приближенно представляющих струну и подчиняющихся следующей системе обыкновенных

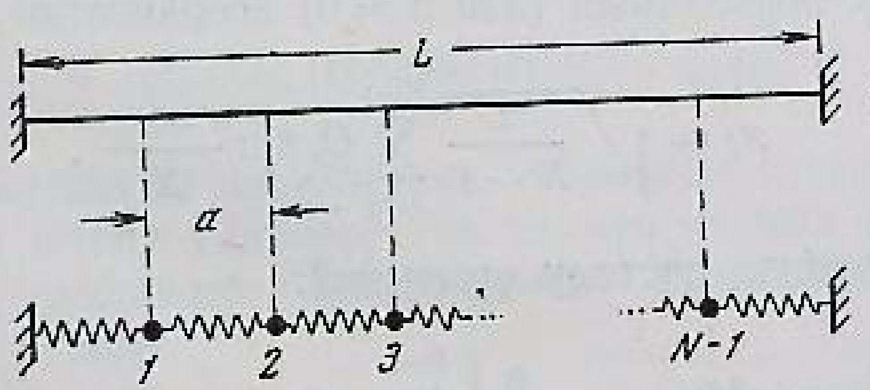

Рис. 1. Струна с закрепленными концами
L — полная длина струны; a — размер участка, моделируемого одним осциллятором цепочки

дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_l = (x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l)\{1 + \beta[(x_{l+1} - x_l)^2 + (x_l - x_{l-1})^2 + (x_{l+1} - x_l)(x_l - x_{l-1})]\}, \tag{2}$$

$$l = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N-1;\ a = 1;\ L = N.$$

Целью работы [1] было проследить возникновение статистических свойств в такой сравнительно простой механической системе с большим числом степеней свободы. В линейном случае ($\beta=0$) цепочка осцилляторов может быть представлена в виде набора ($N-1$) полностью независимых мод (нормальных колебаний), и, следовательно, система не имеет никаких статистических свойств (существует полный набор $N-1$ однозначных интегралов движения). До недавнего времени считалось, что любая нелинейность будет приводить к появлению статистических свойств, которые в дальнейшем мы кратко будем называть термином стохастичность (эргодичность, перемешивание, конечная энтропия по Колмогорову [2]). Поэтому отрицательный результат работы [1] (четкий квазипериодический характер движения вместо стохастичности) казался удивительным. Однако последние работы А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда [3, 4] показали, что такой результат является, наоборот, естественным: при достаточно малом возмущении нелинейная система сохраняет квазипериодический характер движения[1]. С точки зрения современной теории динамических систем, следует ожидать, в общем случае, существования критического возмущения, при котором начинается стохастичность (см. также [5]).

Целью настоящей работы является оценка границы стохастичности для цепочки осцилляторов (2).

Переходя к нормальным (для $\beta=0$) координатам

$$x_l = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin\frac{\pi k l}{N}, \tag{3}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = -\frac{\beta}{8N}\Bigg\{\sum_{i+j=2}^{k-1} A_{ij}^{+} Q_{k-i-j}\,\omega_{k-i-j}^2 + \sum_{i+j=N-k+1}^{2N-k-1} A_{ij}^{+} Q_{2N-i-j-k}\,\omega_{2N-i-j-k}^2 + \sum_{i+j=2}^{N-k+1} A_{ij}^{+} Q_{i+j+k}\,\omega_{i+j+k}^2 - \sum_{i+j=N+k+1}^{2N-2} A_{ij}^{+} Q_{2N+k-i-j}\,\omega_{2N+k-i-j}^2 - \sum_{i+j=k+1}^{k+N-1} A_{ij}^{+} Q_{i+j-k}\,\omega_{i+j-k}^2 -$$

---

[1] Гипотеза о такой своеобразной устойчивости квазипериодического движения содержится в [1]; в дальнейшем будем называть ее колмогоровской устойчивостью.

$$- \sum_{i+j=2N-k+1}^{2N-2} A_{ij}^{+} Q_{i+j+k-2N}\,\omega_{i+j+k-2N}^2 + 2\sum_{i-j=k-1}^{k-N+1} A_{ij}^{-} Q_{k-i+j}\,\omega_{k-i+j}^2 + 2\sum_{i-j=N-k+1}^{N-2} A_{ij}^{-} Q_{2N-k-i+j}\,\omega_{2N-k-i+j}^2 - 2\sum_{j-i=N-2}^{k+1} A_{ij}^{-} Q_{j-i-k}\,\omega_{j-i-k}^2\Bigg\}, \tag{4}$$

где $i,\ j,\ k = 1, 2, \ldots, N-1$ и

$$\omega_k = 2\sin\frac{\pi k}{2N}, \tag{5}$$

$$A_{ij}^{\pm} = Q_i Q_j \omega_i \omega_j\left[3\sqrt{(4-\omega_i^2)(4-\omega_j^2)} \pm \omega_i\omega_j\right]. \tag{6}$$

Выражения (4) являются чрезвычайно громоздкими, поэтому рассмотрим два крайних случая: $k \ll N$ и $(N-k) \ll N$. Полагая возмущение малым

$$\frac{\beta}{8N} \ll 1, \tag{7}$$

решение (4) можно представить в виде

$$Q_n = C_n(t)\cos\theta_n(t),\ \dot{\theta}_n = \omega_n'(t), \tag{8}$$

где C_n, ω_n' — медленно меняющиеся амплитуды и частоты нормальных осцилляторов; штрих указывает на то, что частота включает в себя все поправки, связанные с возмущением. Уравнения (4) могут быть представлены в виде

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k\left\{1 - \frac{3\beta}{4N}\omega_k^2(2-\omega_k^2)Q_k^2\right\} = \frac{\beta}{8N}\sum_m F_{km}\cos\theta_{km}, \tag{9}$$

$$\dot{\theta}_{km} = \omega_{km}'.$$

Эти уравнения описывают движение нелинейных осцилляторов под действием внешних сил с амплитудами $\beta F_{km}/8N$ и частотами ω_{km}, т. е. случай многих резонансов в нелинейной системе. Для одного резонанса, применяя стандартную технику усреднения (см. [6]), можно получить так называемое фазовое уравнение

$$\ddot{\psi}_{km} = \frac{d\Omega_{km}}{dC_k}\,\frac{\beta F_{km}}{16\,\omega_k' N}\sin\psi_{km},\quad \Omega_{km} = \omega_{km}' - \omega_k', \tag{10}$$

из которого легко найти размер сепаратрисы ($|\dot{\psi}_{km}|_{\max}$), ограничивающей область устойчивых фазовых колебаний вблизи резонанса (см., например, [7]):

$$|\dot{\psi}_{km}|_{\max}=\sqrt{\frac{\beta F_{km}}{4N\omega_k'}\frac{d\Omega_{km}}{dC_k}}. \tag{11}$$

В случае многих резонансов характер движения существенно зависит от соотношения размера сепаратрисы и среднего расстояния между резонансами $\Delta\omega$. В работах [8, 9] было показано, что граница стохастичности определяется условием

$$\frac{|\dot{\psi}_{km}|_{\max}}{|\Delta\omega|}\sim 1. \tag{12}$$

Выразим это условие через безразмерную характеристику нелинейного возмущения (2)

$$\beta\left[(x_{l+1}-x_l)^2+(x_l-x_{l-1})^2+(x_{l+1}-x_l)(x_l-x_{l-1})\right]\approx 3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2, \tag{13}$$

поскольку $z=la$, $a=1$ (см. (2)). Последнее выражение перестает быть справедливым для самых высоких мод, однако равенство по порядку величины сохраняется.

Проделав громоздкие выкладки с правой частью (4), получим следующие окончательные оценки для границы стохастичности:

$$3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_m^2\sim\begin{cases}3/k, & k\ll N,\\ \dfrac{3\pi^2}{N^2}\left(\dfrac{k}{N}\right)^2, & N-k\ll N.\end{cases} \tag{14}$$

Здесь $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_m$ — максимальное значение производной; предполагается, что вначале возбуждена всего одна мода с номером k; выражение (14) есть условие самого начального стохастического обмена между несколькими соседними модами. Основное различие для двух крайних случаев в (14) возникает за счет среднего расстояния между резонансами

$$\Delta\omega\sim\pi/N\quad(k\ll N),\quad \Delta\omega\sim\pi^2/2N^2\quad(N-k\ll N).$$

Для непрерывной струны нужно использовать первую из оценок в (14).

Выражение (14) показывает, что при возбуждении низших мод стохастичность возможна лишь для очень больших нелинейных возмущений. Это объясняет неудачу работы [1], поскольку априори возбуждение первой моды казалось вполне естественным начальным условием. Наоборот, для высших мод и больших N стохастичность начинается уже при очень малой нелинейности.

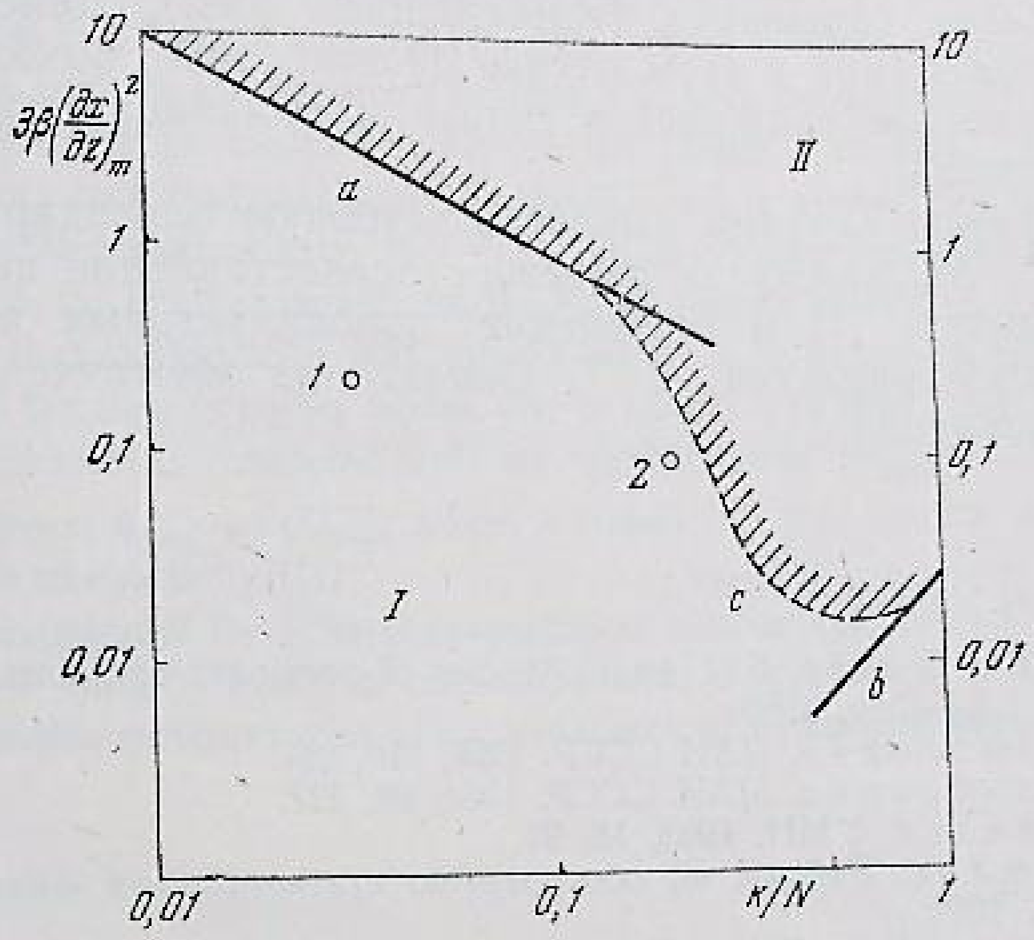

Рис. 2. Области стохастичности и устойчивости решений

I — область колмогоровской устойчивости, *II* — область стохастичности; *a* — граница стохастичности для $k\ll N$ (14); *b* — граница для $N-k\ll N$ (14); *c* — качественная интерполяция; численные значения прямых *a*, *b* даны для $N=32$; *1* — результат численного счета для $N=32$, $x_m=1$, $k=1$, $\beta=8$ [1]; *2* — то же для $k=7$, $\beta={}^1/_{16}$ [1]

На рис. 2 две сплошные прямые изображают границу стохастичности в двойном логарифмическом масштабе, а пунктирная кривая представляет попытку грубой интерполяции между ними; кружки — результаты численного счета для двух случаев кубической нелинейности согласно [1]. Интересно отметить, что первый случай лежит далеко в области колмогоровской устойчивости, несмотря на большое значение $\beta=8$. Результаты численного счета [1] показывают в этом случае явно выраженную квазипериодичность. Второй случай лежит вблизи границы стохастичности, хотя значение $\beta=1/16$ очень мало, но зато возбуждена седьмая гармоника (единственный раз!). Действительно, картина колебаний в этом случае [1] очень мало похожа на квазипериодическое движение и скорее напоминает недоразвитую стохастичность.

Пользуемся случаем выразить глубокую благодарность профессору С. М. Уламу за любезное предоставление неопубликованного отчета [1] и сообщение дополнительных интересных подробностей расчетов, Я. Г. Синаю — за многочисленные полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of nonlinear problems. I. Los Alamos Rept LA—1940, 1955.
2. А. Н. Колмогоров. ДАН СССР, 1958, 119, 861.
3. А. Н. Колмогоров. ДАН СССР, 1954, 98, 527.
4. В. И. Арнольд. УМН, 1963, 18, 91.
5. Н. С. Крылов. Работы по обоснованию статистической физики. Изд-во АН СССР, 1950.
6. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
7. Б. В. Чириков. ДАН СССР, 1959, 125, 1015.
8. Б. В. Чириков. Атомная энергия, 1959, 6, 630. Диссертация. Ин-т ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск, 1959.
9. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков. ДАН СССР, 1964, 159, 306.

STATISTICAL PROPERTIES OF NONLINEAR STRING

F. M. Israelev, B. V. Chirikov

The motion of the nonlinear string with fixed ends obeing equation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left[1 + 3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right], \qquad \text{(I)}$$

is studied qualitatively. Here x is the longitudinal displacement of the string at the point with co-ordinate z; β stands for a parameter of nonlinearity. The model of $(N-1)$ masses connected with nonlinear springs is used following the original work by Fermi, Pasta, Ulam. An estimate is obtained for the critical value of the nonlinearity's parameter ($\beta_{\text{кр}}$) as follows

$$3\beta\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2_m \sim \begin{cases} 3/k, \quad k \ll N & \text{(continious string)}, \\ \dfrac{3\pi^2}{N^2}\left(\dfrac{k}{N}\right)^2 \quad N-k \ll N & \text{(highest modes of the model)}. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

This critical value separates the region of so-called Kolmogorov's stability (quasi-periodical motion just observed in [1]) from the region of stochasticity (ergodicity, mixing and positive Kolmogorov's entropy [7]). It is important for stochasticity to have high enough modes initially excited (large k in (II)). Only one case satisfies this condition in (I) ($k=7$, $N=32$) and it appears to show some features of imperfect stochasticity (see Fig. 5 in this paper reproduced from [1] as well as Fig. 4; the latter demonstrates the Kolmogorov's stability).

It is found that stochasticity, that initially arised in some modes of the string is spreading all the time to higher modes, and in such a way that the lowest mode ($k_{\min}$) still stochastic is connected with the highest mode ($k_{\max}$) stochastic at the time as follows; $k_{\min} \sim k\sqrt{k_{\max}}$ where k stands for the mode's number on the boundary of stochasticity (II).

A brief discussion of the general properties of similar systems with so-called separated phase space is given in connection with theorems of Poincare and Fermi, and probable generalization of routine theory of dynamical systems.