ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 5, вып. 3, 1967

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ФЕРМИОННОГО ТОКА В ТЕОРИЯХ С ВЕКТОРНОЙ СВЯЗЬЮ

В. В. СОКОЛОВ, И. Б. ХРИПЛОВИЧ

(Поступила в редакцию 21 мая 1966 г.)

Предлагается корректное определение плотности фермионного тока в теориях с неабелевой калибровочной группой. Это определение следует сохранить, по-видимому, и при нарушенной калибровочной инвариантности. С его помощью получены некоторые соотношения между спектральными функциями в модели слабых взаимодействий лептонов с промежуточным бозоном.

Применение алгебры токов позволило получить в последнее время ряд интересных результатов в физике элементарных частиц. Между тем до настоящего времени не выяснена полностью непротиворечивость одновременных перестановочных соотношений в некоторых используемых полевых моделях. Даже в квантовой электродинамике избежать противоречия удается лишь с помощью нетривиального доопределения плотности сохраняющегося фермионного тока [1, 2]. Считается, что в теориях с несохраняющимся током спинорных частиц возникают дополнительные осложнения [3, 4].

В предыдущей статье авторов [5] было указано определение плотности тока в псевдоскалярной теории с псевдовекторной связью, устраняющее отмеченную Окубо [4] трудность. В настоящей работе на основе теории Янга — Миллса [6] развивается намеченный ранее путь преодоления противоречий, возникающих в моделях со связью векторного типа. В качестве примера рассматривается теория слабого взаимодействия с промежуточным бозоном.

В теории Янга — Миллса система взаимодействующих спинорного изоспинорного и векторного изовекторного полей описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu}{}^{\alpha} f_{\mu\nu}{}^{\alpha} + \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial_\mu + g_0\tau^\alpha b_\mu{}^\alpha) - m]\psi,$$
$$f_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \partial_\mu b_\nu{}^\alpha - \partial_\nu b_\mu{}^\alpha + 2g_0\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} b_\mu{}^\beta b_\nu{}^\gamma, \qquad (1)$$

инвариантным относительно изотопического калибровочного преобразования, зависящего от координат

$$\psi(x) \to S^{-1}(x)\psi(x),$$
$$\tau^\alpha b_\mu{}^\alpha(x) \to S^{-1}(x)\tau^\alpha b_\mu{}^\alpha(x) S(x) + \frac{i}{g_0} S^{-1}(x)\partial_\mu S(x), \qquad (2)$$
$$S(x) = \exp\{-i\tau^\alpha\lambda^\alpha(x)\}.$$

Фермионный ток $j_\mu{}^\alpha = {}^1/_2 g_0[\bar{\psi}, \gamma_\mu\tau^\alpha\psi]$ при преобразованиях (2) ведет себя как вектор. Однако, как отметил Швингер [1], билинейную комбинацию

спинорных операторов следует понимать в смысле предельного перехода:

$$[\bar{\psi}(x), \gamma_\mu\tau^\alpha\psi(x)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\bar{\psi}\left(x - \frac{1}{2}\varepsilon\right), \gamma_\mu\tau^\alpha\psi\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right], \quad \varepsilon^2 < 0. \quad (3)$$

Величина, стоящая под знаком предела, не является уже вектором по отношению к (2), подобно тому как соответствующая величина в квантовой электродинамике оказывается не градиентно-инвариантной. В последней отмеченный недостаток устраняется введением дополнительных экспоненциальных множителей [1, 2]. Покажем, что аналогичным приемом следует воспользоваться и в рассматриваемом случае.

Каждая компонента изовектора тока $j_\mu{}^\alpha$ должна быть инвариантна относительно поворота на произвольный угол относительно соответствующей изотопической оси α. Рассмотрим, например, вращение вокруг третьей оси в изотопическом пространстве

$$S(x) = \exp\{-i\tau^3\lambda(x)\}. \qquad (4)$$

При этом компоненты поля $b_\mu{}^\alpha$ изменяются по закону

$$b_\mu{}^3 \to b_\mu{}^3 + \frac{1}{g_0}\partial_\mu\lambda, \qquad b_\mu{}^\pm \to e^{\pm 2i\lambda} b_\mu{}^\pm \qquad (5)$$

где

$$b_\mu{}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\mu{}^1 \mp ib_\mu{}^2),$$

в то время как

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^\alpha b_\mu{}^\alpha\psi \to \bar{\psi}\gamma_\mu\tau^\alpha b_\mu{}^\alpha\psi + \frac{1}{g_0}\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^3\psi\partial_\mu\lambda. \qquad (6)$$

Преобразования (4) — (6) совпадают с обычными градиентными преобразованиями в квантовой электродинамике, так что необходимая инвариантность $j_\mu{}^3$ при вращениях (4) вновь достигается введением упомянутых выше экспоненциальных множителей. Учитывая равноправие всех трех осей изотопического пространства в теории Янга — Миллса, приходим к следующему определению плотности спинорного тока:

$$j_\mu{}^\alpha(x) = \frac{g_0}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\bar{\psi}\left(x - \frac{1}{2}\varepsilon\right),\right.$$
$$\left.\gamma_\mu\tau^\alpha\exp\left\{-ig_0\tau^\alpha\int\limits_{x-{}^1/_2\varepsilon}^{x+{}^1/_2\varepsilon} d\xi_\mu b_\mu{}^\alpha(\xi)\right\}\psi\left(x + \frac{1}{2}\varepsilon\right)\right], \quad \varepsilon^2 < 0 \qquad (7)$$

(суммирование по α в экспоненте не производится). Подчеркнем, что введение экспонент в определение фермионного тока оказалось необходимым, несмотря на то, что $j_\mu{}^\alpha$ не сохраняется. Сохраняется лишь суммарный ток фермионов и бозонов.

Определение (7) остается в силе и при отличной от нуля затравочной массе b-поля, хотя теория уже не инвариантна относительно преобразований (2). Чтобы убедиться в этом, представим лагранжиан в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} f_{\mu\nu}{}^+ f_{\mu\nu}{}^- + \mu_0{}^2 b_\mu{}^+ b_\mu{}^- - \frac{1}{4} f_{\mu\nu}{}^3 f_{\mu\nu}{}^3 +$$
$$+ \frac{1}{2}\mu_0{}^2 b_\mu{}^3 b_\mu{}^3 + \bar{\psi}[\gamma_\mu(i\partial_\mu + g_0\tau^+ b_\mu{}^+ + g_0\tau^- b_\mu{}^- + g_0\tau^3 b_\mu{}^3) - m]\psi. \qquad (8)$$

Он описывает в калибровке Прока ($\partial_\mu b_\mu^3 = 0$) нейтральный векторный мезон b_μ^3, взаимодействующий с сохраняющимся током:

$$2ig_0\partial_\nu(b_\nu^- b_\mu^+ - b_\nu^+ b_\mu^-) + 2ig_0(b_\nu^- b_{\nu\mu}^+ - b_\nu^+ f_{\nu\mu}^-) + g_0\bar{\psi}\gamma_\mu\tau^3\psi. \quad (9)$$

Добавлением к (8) члена $-\frac{1}{2}(\partial_\mu b_\mu^3)^2$ можно сделать лагранжиан инвариантным относительно преобразований (4), (5) с дополнительным условием [7]

$$(\Box - \mu_0^2)\partial_\mu\lambda = 0. \quad (10)$$

Отсюда вновь следует (7).

В силу результатов работы [8] отсюда вытекает, между прочим, формула

$$\frac{1}{\mu_0^2} = \int \frac{\rho(\varkappa^2)}{\varkappa^2}\,d\varkappa^2, \quad (11)$$

где $\rho(\varkappa^2)$ — спектральная функция b-поля [9].

При вычислении коммутаторов существенны лишь первые два члена разложения экспоненты в (7) в ряд по ε, имеющие в сумме полностью калибровочно-инвариантный вид:

$$j_\mu^\alpha(x) = \frac{g_0}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\bar{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_\mu(\tau^\alpha - ig_0\varepsilon_\nu b_\nu^\alpha(x))\psi\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right].$$

Обобщение на теорию с произвольной неабелевой калибровочной группой не представляет труда и приводит к определению

$$j_\mu^\alpha(x) = \frac{g_0}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\bar{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_\mu\left(T^\alpha - \frac{i}{2}g_0\varepsilon_\nu b_\nu^\beta\{T^\beta, T^\alpha\}\right)\psi\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right],$$

где T^α — совокупность матриц, образующих простую алгебру Ли.

В приведенных выше рассуждениях мы существенным образом опирались на калибровочную инвариантность теории.

Возникает вопрос, как следует определять фермионный ток в теориях, не обладающих такой симметрией. Можно полагать, что подобные теории получаются добавлением к градиентно-инвариантному лагранжиану членов, нарушающих исходную симметрию. (Пусть, например, в лагранжиане (1) опущены члены самодействия b-поля.) Представляется естественным считать в таких случаях, что плотность тока j_μ^α «не знает» структуры тех слагаемых в лагранжиане, в которые она не входит. Поэтому использованный принцип доопределения j_μ^α является, по-видимому, общим для теорий со связью векторного или псевдовекторного типа, независимо от их градиентной инвариантности.

Покажем, например, что применение изложенных выше соображений позволяет непротиворечивым образом сформулировать модель слабого взаимодействия нейтрино и электрона с промежуточным векторным бозоном:

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu W_\nu^+\partial_\mu W_\nu + \partial_\mu W_\nu^+\partial_\nu W_\mu + \mu_0^2 W_\mu^+ W_\mu + \bar{\psi}_1 i\hat{\partial}\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\hat{\partial} - m)\psi_2 - g_0[\bar{\psi}_1\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_2 W_\mu^+ + \bar{\psi}_2\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_1 W_\mu]. \quad (12)$$

Соответствующее уравнение движения векторного поля имеет вид

$$\partial_\mu\partial_\mu W_\nu - \partial_\mu\partial_\nu W_\mu + \mu_0^2 W_\nu = g_0\bar{\psi}_1\gamma_\nu(1+\gamma_5)\psi_2, \quad (13)$$

а канонические перестановочные соотношения таковы:

$$[W_m(\mathbf{x}), \pi_n(0)] = i\delta_{mn}\delta(\mathbf{x}), \qquad \{\psi_i(\mathbf{x}), \bar{\psi}_j(0)\} = \delta_{ij}\gamma_0\delta(\mathbf{x}), \quad (14)$$

где $\pi_n = \partial_0 W_n^+ - \partial_n W_0^+$. Временная компонента векторного поля не является независимой динамической переменной и с помощью уравнения (13) может быть представлена в следующем виде:

$$W_0 = \frac{1}{\mu_0^2}[g_0\bar{\psi}_1\gamma_0(1+\gamma_5)\psi_2 - \partial_n\pi_n^+]. \quad (15)$$

Вакуумное среднее от коммутатора векторного поля в силу обычных требований ковариантности и спектральности представляется в форме

$$\langle[W_\mu(x), W_\nu^+(0)]\rangle = -i\int d\varkappa^2\left[\rho_1(\varkappa^2)g_{\mu\nu} + \rho_2(\varkappa^2)\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\varkappa^2}\right]\Delta(x, \varkappa^2). \quad (16)$$

Здесь $\Delta(x, \varkappa^2)$ — скалярная перестановочная функция.

Требование положительной определенности метрики в пространстве состояний приводит к следующим неравенствам для спектральных функций:

$$0 \leqslant \rho_1(\varkappa^2) \leqslant \rho_2(\varkappa^2). \quad (17)$$

С помощью (14) нетрудно получить правило сумм:

$$\int d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2) = 1. \quad (18)$$

Полагая в (16) $\mu = 0$, $\nu = n$, устремляя x_0 к нулю и учитывая (14) и (15), находим, с другой стороны [3],

$$\int d\varkappa^2\frac{\rho_2(\varkappa^2)}{\varkappa^2} = \frac{1}{\mu_0^2}. \quad (19)$$

Для дальнейшего удобно ввести изотопический дублет $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$ и представить лептонный ток в виде

$$j_\mu = g_0\bar{\psi}_1\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}g_0\bar{\psi}\tau^+\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi = \frac{1}{2}g_0\bar{\psi}\tau^1\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi + i\frac{1}{2}g_0\bar{\psi}\tau^2\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi = \frac{1}{2}(j_\mu^1 + ij_\mu^2). \quad (20)$$

Согласно (7) полагаем

$$j_\mu^{1,2}(x) = \frac{g_0}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\bar{\psi}\left(x - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_\mu(1+\gamma_5)\tau^{1,2}\exp\left\{-ig_0(1+\gamma_5)\tau^{1,2}\int_{x-\frac{1}{2}\varepsilon}^{x+\frac{1}{2}\varepsilon} d\xi_\nu W_\nu^{1,2}(\xi)\right\}\psi\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]; \quad (21)$$

$$W_\nu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\nu + W_\nu^+), \qquad W_\nu^2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(W_\nu - W_\nu^+).$$

Вычислим теперь вакуумное среднее от одновременного коммутатора пространственной компоненты уравнения (13) с π_n, пользуясь соотношениями (14), (16) и (21). После некоторых преобразований находим

$$\delta_{mn}\int d\varkappa^2\rho_1(\varkappa^2)(\varkappa^2 - \mu_0^2) = = \frac{i}{2}g_0^2\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_m\left\langle\left[\bar{\psi}_1\left(\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_n(1+\gamma_5)\psi_1\left(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] + \left[\bar{\psi}_2\left(\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2}\right),\ \gamma_n(1+\gamma_5)\psi_2\left(\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\right\rangle. \quad (22)$$

Для оценки правой части равенства (22) воспользуемся спектральными представлениями:

$$\langle[\psi_1(x), \overline{\psi_1}(0)]\rangle = \int d\varkappa^2 [w_1^{(1)}(\varkappa^2) i\hat{\partial} + w_2^{(1)}(\varkappa^2) i\gamma_5\hat{\partial}] \Delta_1(x, \varkappa^2),$$

$$\langle[\psi_2(x)\overline{\psi_2}(0)]\rangle =$$

$$= \int d\varkappa^2 [w_1^{(2)}(\varkappa^2) i\hat{\partial} + w_2^{(2)}(\varkappa^2) i\gamma_5\hat{\partial} + w_3^{(2)}(\varkappa^2) + w_4^{(2)}(\varkappa^2) i\gamma_5] \Delta_1(x, \varkappa^2). \quad (23)$$

В них учтено несохранение четности и отсутствие массы у нейтрино.

Подставляя (23) в (22), приходим к равенству

$$\mu_0^2 = \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2) -$$

$$-\frac{4}{3} g_0^2 \int d\varkappa^2 [w_1^{(1)}(\varkappa^2) + w_2^{(1)}(\varkappa^2) + w_1^{(2)}(\varkappa^2) + w_2^{(2)}(\varkappa^2)] \times$$

$$\times \left(1 - \varkappa^2 \frac{d}{d\varkappa^2}\right) \Delta_1(0, \varkappa^2), \quad (24)$$

которое вполне аналогично полученному в работе [10] для нейтрального векторного мезона, взаимодействующего с сохраняющимся током. В этой работе можно найти также более подробные промежуточные выкладки.

Заметим, что к (24) можно прийти, вычисляя вакуумное среднее от одновременного коммутатора уравнения (13) с эрмитовски сопряженным уравнением. В этом случае экспоненциальные множители в (21) оказываются несущественными. Совпадение полученных разными способами результатов указывает на непротиворечивость принятого способа определения плотности тока. В то же время непосредственное использование формального выражения $j_\mu = g_0 \overline{\psi}_1 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_2$ и перестановочных соотношений (14) привело бы к формуле

$$\mu_0^2 = \int d\varkappa^2 \varkappa^2 \rho_1(\varkappa^2). \quad (25)$$

Соотношения (17)—(19) и (25) могут, однако, одновременно выполняться лишь в отсутствие взаимодействия. Действительно, в этом случае

$$1 = \int da a \rho_1(a) \int db \frac{\rho_2(b)}{b} \geqslant \int da a \rho_1(a) \int db \frac{\rho_1(b)}{b} = \frac{1}{2} \int da db \rho_1(a) \times$$

$$\times \rho_1(b) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geqslant \int da db \rho_1(a) \rho_1(b) = 1,$$

и, следовательно,

$$\rho_1(a) = \rho_2(a),$$

$$\int da db \rho_1(a) \rho_1(b) = \frac{1}{2} \int da db \rho_1(a) \rho_1(b) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right),$$

что возможно лишь при условии $\rho_1(\varkappa^2) = \rho_2(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2 - \mu_0^2)$. Тем же способом можно убедиться в том, что второе слагаемое в правой части формулы (24) должно быть отрицательным.

Заметим также, что из формул (19) и (24) следует некоторое сокращение расходимостей в поляризационном операторе векторного бозона. В частности, в низшем порядке теории возмущений он должен расходиться не квадратично, а лишь логарифмически.

Литература

[1] J. Schwinger. Phys. Rev. Lett., 3, 296, 1959.
[2] K. Johnson. Nucl. Phys., 25, 435, 1961.
[3] W. Thirring. Acta Phys. Austriaca, Suppl., 1, 138, 1964.

[4] S. Okubo. Nuovo Cim., 44A, 1015, 1966.
[5] В. В. Соколов, И. Б. Хриплович. ЖЭТФ, 51, 854, 1966.
[6] C. N. Yang, R. L. Mills. Phys. Rev., 96, 191, 1954.
[7] В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов. ЖЭТФ, 41, 247, 1961.
[8] А. И. Вайнштейн, В. В. Соколов, И. Б. Хриплович. ЯФ, 1, 908, 1965.
[9] G. Segre. Nucl. Phys., 74, 673, 1965.
[10] В. В. Соколов. ЯФ, 3, 765, 1966.

DEFINITION OF THE FERMION CURRENT DENSITY IN VECTOR COUPLING THEORIES

V. V. SOKOLOV, I. B. KHRIPLOVICH

A correct definition is given of the fermion current density in theories with a non-abelian gauge group. It seems that this definition should be used even if the gauge invariance is violated. With its help relations are obtained between the spectral functions in a model of the leptonic weak interactions with an intermediate boson.
