Сравнение (П.5) и (П.6) с числами, полученными из (П.3) и (П.4) на основе различных экспериментальных данных [5], приводит к плохому согласию. Причина этого заключается в достаточно неточном определении длин рассеяния d-волн и параметров $b^{\pm}_{p+}$ для p-волн, которые дают основной вклад в левые части соотношений (П.1) и (П.2).

Литература

[1] G. Wanders. Helv. Phys. Acta, 39, B228, 1966.
[2] R. Low. Proc. of the XIII Intern. Conf. on High Energy Physics, Berkley, 1966.
[3] G. F. Chew, F. E. Low, M. L. Goldberger, Y. Nambu. Phys. Rev., 106, 1337, 1957.
[4] В. С. Барашенков. Сечения взаимодействия элементарных частиц, «Наука», 1966.
[5] J. Hamilton, W. S. Woolcock. Rev. Mod. Phys., 35, 737, 1963.

SUM RULES FOR $\pi\pi$-AND πN-SCATTERING

I. I. ORLOV, D. V. SHIRKOV

The sum rules for the $\pi\pi$-scattering obtained in the paper [1] on the basis of the Mandelstam representations are shown to may be deduced from the strictly proved dispersion relations on s at t fixed. The corresponding sum rules for the πN-scattering are found to be equivalent to the sum rules considered by Hamilton and Woolcock [5].

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 6, вып. 3, 1967

К АНАЛИЗУ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИЗ n ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

О. Я. САВЧЕНКО

(Поступила в редакцию 21 мая 1966 г.)

Определяется нижняя и верхняя границы собственных чисел уравнения Шредингера для системы из n взаимодействующих частиц одинаковой массы. Приводится аналог формулы Борна для амплитуды рассеяния частиц на системе связанных частиц и условия, при которых можно пренебречь их взаимосвязанностью.

В ядерной физике для анализа системы из n частиц используется $3n$-мерное уравнение Шредингера

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\Delta_i-\lambda^2\Big)u=\sum_{i=1}^{n}{}'\sum_{j=1}^{n}V_{ij}(x_{\alpha i}-x_{\alpha j})\,u,\quad \Delta_i=\frac{\partial^2}{\partial x_{1i}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_{2i}^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_{3i}^2},\tag{1}$$

интегральная форма которого следующая [1]:

$$u(x_{\alpha k})=$$
$$=u_0(x_{\alpha k})+\sum_{i=1}^{n}{}'\sum_{j=1}^{n}\int\limits_G\!\ldots\!\int V_{ij}(x'_{\alpha i}-x'_{\alpha j})\,\gamma_{3n}[(\mathbf{r}'-\mathbf{r})^2,\lambda]\,u(x'_{\alpha k})\prod_{i=1}^{n}dv'_i,\tag{2}$$

$$(\mathbf{r}'-\mathbf{r})^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{3}(x_{\alpha i}-x'_{\alpha i})^2,$$

γ_{3n}, u_0 — фундаментальное и полное решение уравнения (1) без правой части, dv'_i — элемент объема i-й частицы.

В нашей работе для оценки волновых функций и собственных чисел уравнений (1), (2) используются общие характеристики функции V_{ij} (например, монотонность, ограниченность) и некоторые свойства неравенств.

Собственные функции и собственные числа связанных состояний определяются более простым уравнением, чем (2) [2]:

$$u_c^{(n)}(x_{\alpha k}-x_{\alpha(k-1)})=\sum_{i=1}^{n}{}'\sum_{j=1}^{n}\int\limits_G\!\ldots\!\int V_{ij}(x'_{\alpha i}-x'_{\alpha j})\,\gamma_{3n}\times$$
$$\times\,u_c^{(n)}(x'_{\alpha k}-x'_{\alpha(k-1)})\prod_{i=1}^{n}dv'_i,\quad k=2,3,\ldots,n.\tag{3}$$

При $V_{ij}(x)={}^1/_2c_{ij}V(x)\geqslant0$ ($c_{ij}\geqslant0$ — постоянные), имеют место неравенства [3]

$$1\leqslant\max\sum_{i=1}^{n}{}'\sum_{j=1}^{n}\int\limits_G\!\ldots\!\int V_{ij}(x'_{\alpha i}-x'_{\alpha j})\,\gamma_{3n}\prod_{i=1}^{n}dv'_i\leqslant{}^1/_2\bar c_a n(n-1)\max f_{12},$$
$$f_{12}=\int\limits_G\!\ldots\!\int V(x'_{\alpha 1}-x'_{\alpha 2})\,\gamma_{3n}\prod_{i=1}^{n}dv'_i,\quad \bar c_a=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}.\tag{4}$$

Величина f_{12} удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1 + \Delta_2 - \lambda^2) f_{12} = V(x_{\alpha 1} - x_{\alpha 2}) \tag{5}$$

и не зависит от $x_{\alpha k}$, если $k \neq 1, 2$. Следовательно,

$$f_{12} = \frac{1}{8\pi} \int V(\mathbf{x}') |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \exp\left(- \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \right) d\mathbf{x}, \quad x_\alpha = x_{\alpha 1} - x_{\alpha 2}. \tag{6}$$

Если V — монотонно невозрастающая функция и

$$V(\mathbf{x}') = V(|\mathbf{x}'|), \tag{7}$$

тогда [2, 3]

$$\max f_{12} = \frac{1}{2} \int xV \exp\left(- \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda x \right) dx, \tag{8}$$

а нижняя граница собственных чисел (число $2k_1^2$) определяется очень простым уравнением

$$n(n-1) \bar{c}_a \int xV \exp(-k_1 x)\, dx = 4. \tag{9}$$

Нижнюю границу собственных чисел можно определить и из вариационного принципа. Действительно, если $\mathcal{H} \in u$, $\iint \mathcal{H}^2 dv_1 dv_2 = 1$, то

$$-k_2^2 = \frac{1}{2} n \min \int\int \mathcal{H} \{\Delta_1 + \Delta_2 - (n-1) \bar{c}_a V\} \mathcal{H}\, dv_1\, dv_2 \leqslant -\lambda^2, \tag{10}$$

но $n^{-1} k_2^2$ — собственные числа уравнения [4]

$$(\Delta - \lambda_1^2) u_1 = \frac{1}{2} \bar{c}_a (n-1) V(\mathbf{x}) u_1. \tag{11}$$

Верхней границей спектра собственных чисел уравнения (1) могут служить собственные числа уравнения [1]

$$(\Box_{3n,r} - k_3^2) u_3 = \frac{1}{2} n(n-1) \bar{c}_g V\left(\frac{2r}{\sqrt{n}} \right) u_3, \tag{12а}$$

так как [5]

$$n(n-1) \bar{c}_g V\left(\frac{2r}{\sqrt{n}} \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n} c_{ij} V(|\mathbf{x}_{ij}|), \tag{12б}$$

$$\bar{c}_g = \left(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} c_{ij} \right)^{1/n(n-1)} \qquad |x_{ij}|^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} (x_{\alpha i} - x_{\alpha j})^2;$$

$\Box_{3n,r}$ — радиальная часть $3n$-мерного уравнения Лапласа [1]:

$$\Box_{3n,r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{4k^2 - (3n-2)^2}{4r^2} \tag{13а}$$

для четного числа частиц и

$$\Box_{3n,r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(2k - 3n + 3)(2k + 3n - 1)}{4r^2} \tag{13б}$$

— для нечетного (k — целые числа). Для потенциала Юкавы $V_{ij} = c_{ij} r_{ij}^{-1} \exp(-\varepsilon r_{ij})$, согласно (10) — (12), основное собственное число лежит в интервале

$$^1/_4 n(n-1)^2 \bar{c}_a^2 - {}^1/_2 n(n-1) \bar{c}_a \varepsilon > 4\lambda^2 > {}^1/_9 n(n-1)^2 \bar{c}_g - {}^1/_2 n(n-1) \bar{c}_g \varepsilon. \tag{14}$$

Уравнение (1) в форме

$$u_p(x_{\alpha h}) = u_0^{(n-1)}(x_{\alpha h}) \exp(ik_x x_{11}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n} \int_G \ldots \int V(x'_{\alpha i} - x'_{\alpha j}) \gamma_{3n} u_p(x'_{\alpha h}) \prod_{i=1}^{n} dv'_i \tag{15}$$

описывает рассеяние частицы на системе $(n-1)$ связанных частиц. Метод последовательных приближений [5] дает решение (15) в виде следующего бесконечного ряда:

$$u_p(x_{\alpha h}^{(0)}) = u_0^{(n-1)}(x_{\alpha h}^{(0)}) e^{ikx_{11}} +$$

$$+ \sum_{N=1}^{\infty} \int_G \ldots \int G_{01} \prod_{i=1}^{n} dv_i^{(1)} \int_G \ldots \int G_{12} \prod_{i=1}^{n} dv_i^{(2)} \ldots \int_G \ldots \int G_{(N-1)N} \times$$

$$\times u_0^{(n-1)}(x_{\alpha h}^{(N)}) e^{ikx_{11}^{(N)}} \prod_{i=1}^{\overline{n}} dv_i^{(N)}, \tag{16}$$

$$G_{(l-1)l} = \gamma_{3n} [(\mathbf{r}^{(l)} - \mathbf{r}^{(l-1)})^2, \lambda] \sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n} V(x_{\alpha i}^{(l)} - x_{\alpha j}^{(l)}).$$

В борновском приближении

$$u_p \approx u_0^{(n-1)} \exp(ik_x x_{11}) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \int_G \ldots \int V(x'_{\alpha 1} - x'_{\alpha j}) \gamma_{3n} u_0^{(n-1)}(x'_{\alpha h}) \exp(ik_x x'_{11}) \prod_{i=1}^{n} dv'_i. \tag{17}$$

Хотя приближения типа (17) для ряда (16) и определяют в явном виде рассеянную волну, прямое использование этих формул затруднено сложностью интегрирования. По-видимому, удобнее их использовать для определения связи феноменологических констант некоторых моделей, используемых для описания процесса рассеяния [6–10], с элементарным взаимодействием частиц, с распределением частиц в связанном состоянии. Например, если потенциал рассеяния на малых расстояниях достаточно крутой

$$\left| \frac{1}{u_0^{(n-1)}} \frac{\partial u_0^{(n-1)}}{\partial x_{\alpha i}} \right| \leqslant \left| \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x \leqslant a}, \quad \left| \int_a^{\infty} V e^{ikx} dx \right| \ll \left| \int_0^a V e^{ikx} dx \right|, \tag{18}$$

из (16) следует

$$u_p \approx u_0^{(n-1)} \left[e^{ikx_{11}} + \sum_{j=2}^{n} e^{{}^1/_2 ik(x_{11} + x_{1j})} f(x_{11} - x_{1j}) \right]; \tag{19}$$

f определяется уравнением

$$(\Delta - {}^1/_4 k^2) f = Vf. \tag{20}$$

Следовательно, рассеянная волна является просто суперпозицией волн, рассеянных от каждой частицы. Поэтому процесс рассеяния может быть описан в рамках оптической модели [9–10] с мнимым оптическим потенциалом взаимодействия, если $\rho \sigma_0 \ll |k|$:

$$V_f \approx i \rho \sigma_0 \mu^{-1} k \hbar^2; \tag{21}$$

ρ — плотность распределения частиц, σ_0 — полное сечение рассеяния одной частицы, μ — масса налетающей частицы.

Для системы связанных частиц, равномерно распределенных внутри шаровой поверхности радиуса R, эта модель (в случае $R \gg \lambda$, λ — длина де-Бройля налетающей частицы) дает следующее полное сечение рассеяния [11]:

$$\sigma_n = 4\pi R_1^2 K(\sigma_0 \rho R_1); \qquad R_1 \approx R + \sqrt{\pi^{-1}\sigma_0}, \tag{22}$$

$$K(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} e^{-x} + \frac{e^{-x} - 1}{x^2}.$$

В таблице приведены значения R, найденные с использованием формулы (22) и данных по рассеянию нейтронов с энергиями 400 *Мэв* [12].

Ядро	$R\cdot 10^{13}$ *см*	$r_0\cdot 10^{13}$ *см*	Ядро	$R\cdot 10^{13}$ *см*	$r_0\cdot 10^{13}$ *см*
C	3,10	1,35	Cu	5,30	1,33
O	3,20	1,27	Cd	6,10	1,27
Al	4,00	1,34	Pb	7,45	1,26
Cl	4,40	1,34	Th	7,75	1,26
Fe	5,15	1,33	U	7,80	1,26

Значения величин $\sigma_{n-n} \simeq \sigma_{p-p}$ и σ_{n-p}, входящих в среднее сечение рассеяния

$$\sigma_0 = (1 - m)\sigma_{n-p} + m\sigma_{n-n}, \quad m = N/A, \tag{23}$$

взяты следующие [13, 14]:

$$\sigma_{n-n} \approx \sigma_{p-p} \approx 2{,}67\cdot 10^{-26}\ см^2, \quad \sigma_{n-p} \approx 3{,}37\cdot 10^{-26}\ см^2. \tag{24}$$

Точность определения R — около 5%. Удовлетворительное совпадение вычисленных $r_0 = A^{-1/3}R$ со значениями r_0, определенными другими методами [14–18], указывает на возможное выполнение неравенств (18).

Литература

[1] Р. Курант. Уравнения с частными производными, «Мир», 1964.
[2] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1951.
[3] О. Я. Савченко. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 4, 705, 1962.
[4] С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.
[5] Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1949.
[6] H A. Bethe. Phys. Rev., 47, 747, 1937.
[7] V. Weisskopf. Phys. Rev., 52, 297, 1937.
[8] A. M. Lane, R. G. Thomas, E. P. Wigner. Phys. Rev., 98, 693, 1955.
[9] F. G. Perey. Phys. Rev., 131, 745, 1963.
[10] И. Е. Кашуба, Б. Г. Козин, М. В. Пасечник, Н. Н. Пучеров, В. И. Чирко. ЯФ, 3, 842, 1966.
[11] Г. Ван-дер-Хюльст. Рассеяние света малыми частицами, ИИЛ, 1961.
[12] V. Nodzel. Phys. Rev., 91, 440, 1953.
[13] R. Wilson. The Nucleon-Nucleon Interaction, Intersc. Publ., New York — London, 1963.
[14] Ю. М. Казаринов, В. С. Киселев, Ю. Н. Симонов. Препринт Р-2241, ОИЯИ, 1965.
[15] B. Hahn, D. G. Revenhalb, R. Hofstadter. Phys. Rev., 101, 1131, 1956.
[16] G. Culler, S. Fernbach, N. Sherman. Phys. Rev., 101, 1047, 1956.
[17] L. Cooper, E. M. Henly. Phys. Rev., 92, 801, 1953.
[18] B. G. Joncovici. Phys. Rev., 95, 388, 1954.

TO THE ANALYSIS OF THE SCHROEDINGER EQUATION FOR A SYSTEM OF *n* INTERACTING PARTICLES

O. Ya. SAVCHENKO

A lower and an upper limits on the eigen numbers of the Schroedinger equation are determined for a system of n interacting particles with equal masses. An analogue of the Born formula is presented for the scattering of a particle on a system of bound particles as well as conditions under which one may neglect the fact that they are bound.

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 6, вып. 3, 1967

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О ФОТОРОЖДЕНИИ ТЯЖЕЛЫХ МЕЗОНОВ НА ЯДРАХ ВБЛИЗИ ПОРОГА

В. А. ЦАРЕВ

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АКАДЕМИИ НАУК СССР

(Поступило в редакцию 13 января 1967 г.)

В работе рассматривается фоторождение тяжелых мезонов (η, ρ, ω, ...) на ядрах вблизи порога. Для некоторых простых моделей ядра получены оценки угловой и энергетической зависимости сечения, которые могут быть полезны при постановке эксперимента и анализе экспериментальных данных. Изучение фоторождения тяжелых мезонов на ядрах важно как с точки зрения получения дополнительной информации об амплитудах фоторождения на нуклоне, так и для исследования структуры ядра. При этом особый интерес представляет область энергий фотонов между порогами фоторождения на ядре $E_M = \mu + \mu^2/2M$ и на нуклоне $E_N = \mu + \mu^2/2N$ (здесь μ, N и M — массы мезона, нуклона и ядра), в которой наиболее отчетливо проявляются некоторые специфические особенности ядерной мишени, в частности, характер внутреннего движения нуклонов в ядре. Если при рождении фотонами с энергией, значительно превышающей E_N, эффект движения нуклонов оказывается малосущественным (кроме, возможно, резонансной области) и в достаточно хорошем приближении нуклоны можно считать покоящимися, то для объяснения фоторождения при $E^\gamma < E_N$ (в модели прямого взаимодействия) с необходимостью приходится учитывать движение нуклонов в ядре. Возможность исследования импульсного распределения нуклонов $\rho(\mathbf{p})$ с помощью фоторождения $\pi^\pm$-мезонов на ядрах у порога E_M обсуждалась в работе [1]. Укажем на ряд особенностей, делающих фоторождение тяжелых мезонов в некоторых отношениях более удобным методом изучения структуры ядра. Так, если для π-мезонов характерная область между порогами составляет всего ~ 10 *Мэв*, то при переходе к более тяжелым частицам эта область существенно расширяется (например, для η-мезона она ~ 150 *Мэв*). Передача значительно большего импульса ($\varkappa \sim \mu / c$ у порога) позволяет исследовать $\rho(\mathbf{p})$ при больших значениях импульса нуклона. Кроме того, при больших $\varkappa$ уменьшается роль квазиупругого [2] фоторождения, вклад которого при фоторождении π-мезонов частично сокращается с вкладом прямого неупругого (квазисвободного [2]) фоторождения, что вносит дополнительную неопределенность при нахождении $\rho(\mathbf{p})$ в случае π-мезонов. (Если учитывать только корреляции, обусловленные принципом Паули, то в модели ферми-газа сечение квазиупругого фоторождения исчезает при $\varkappa > 2p_F$, где импульс Ферми $p_F \sim 220$ *Мэв/с*. Учет короткодействующих корреляций может усилить роль неупругих процессов при больших $\varkappa$.) Наоборот, упругое рождение, которое играет главную роль для π^0-мезонов, в случае тяжелых мезонов (η, ρ^0, ω, ...) оказывается существенно подавленным. Так, для ядра C^{12} в модели осциллятора с $R = 2{,}4\ f$ при $\varkappa \sim \mu_\eta$ упругий формфактор равен $\sim 3\cdot 10^{-3}$ и упругое сечение оказывается на ~ 3 порядка меньше сечения фоторождения на нуклоне.