

Тогда

$$\mathcal{L}_{sb} = m_\kappa^2 \frac{1}{g_\kappa^2} \ln \left(1 + \frac{1}{2} \text{Sp} \hat{\kappa}^2 \right). \quad (83)$$

Полный лагранжиан $\mathcal{L}(SU(3)) + \mathcal{L}_{sb}$ в разложении по g_κ содержит члены, описывающие многочастичное κ -рассеяние, начиная с порядка g_κ^2 в разложениях $\mathcal{L}_{\text{кин}}(\Phi)$ и \mathcal{L}_{sb} , и, кроме того, рассеяние κ на барионах (в разложении $\mathcal{L}_{\text{инт}}(\Psi_\kappa)$):

$$\mathcal{L}_{\text{инт}}(\Psi_\kappa) = 4i \text{Sp}(\hat{\Psi} \gamma_\mu [\partial_\mu \hat{\kappa}, \hat{\Psi}]) - 4 \text{Sp}(\hat{\Psi} \gamma_\mu [[\partial_\mu \hat{\kappa}, \hat{\kappa}], \hat{\Psi}]) + O(g_\kappa^3), \quad (84)$$

где воспользовались явным выражением (79) для W_μ .

Таким образом, в модели появляются пять констант \bar{M} , $\bar{\Delta}_f$, $\bar{\Delta}_d$, m_κ , g_κ (или же f_κ). Первые три целиком определяются известными барионными массами и практически больше нигде не участвуют:

$$\bar{M} = M_\Sigma = 1190 \text{ Мэв}, \quad \bar{\Delta}_f = 0,159 M_\Sigma = 188 \text{ Мэв},$$

$$\bar{\Delta}_d = -0,048 M_\Sigma = -57 \text{ Мэв}.$$

По наблюдениям слабых распадов κ и длинам κ -рассеяния в принципе можно было бы определить $f_\kappa = 1/g_\kappa^2$ и m_κ (или, если m_κ определится независимым образом в эксперименте, сделать предсказание о длинах κ -рассеяния). Тогда разложение (84) позволило бы предсказать величины длин $\Psi\kappa$ -рассеяния, однако отсутствие экспериментальных данных об этих процессах отодвигает такую проверку на будущее.

Рассмотренная выше модель опирается на существование κ -мезонов. Скалярный аналог K -мезона с массой 1050 Мэв наблюдался пока в одном эксперименте [6] с шириной $\Gamma_\kappa \sim 400$ Мэв. В пользу его существования косвенно свидетельствует также и то обстоятельство, что скалярные каоны такой массы позволяют хорошо описать K_{13} -распад [7].

Для того чтобы аналогичный механизм работал при дополнительном нарушении $SU(3)$ -симметрии λ_3 -членами, необходимы ξ^\pm -мезоны или скалярные π^\pm -мезоны (см. (23)).

Существование κ -мезонов само по себе еще не означает, что предлагаемая модель правильна, ибо с κ -мезонами связано нарушение симметрии и в модели Вайнберга — Глэшоу [8]. Однако механизм нарушения симметрии в модели [8] отличен от предложенного выше.

Литература

- [1] S. Weinberg. Phys. Rev. Lett., 18, 188, 1967. J. Schwinger. Phys. Lett., 24B, 473, 1967. J. A. Cronin. Phys. Rev., 161, 1483, 1967. P. & Chang, F. Gürsey. Phys. Rev., 164, 1752, 1967.
- [2] M. Gell-Mann. Phys. Rev., 125, 1067, 1962. S. Okubo. Progr. Theor. Phys., 27, 949, 1962.
- [3] Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.
- [4] J. Goldstone et al. Phys. Rev., 127, 965, 1962.
- [5] Y. Nambu. Phys. Rev. Lett., 4, 380, 1960.
- [6] P. E. Schlein. UCRL-1024, 1968.
- [7] Lay Nam Chang, Y. C. Leung. Phys. Rev. Lett., 21, 122, 1968. N. T. Nieh. Phys. Rev. Lett., 21, 116, 1968.
- [8] S. L. Glashow, S. Weinberg. Phys. Rev. Lett., 20, 224, 1968.

NONLINEAR REPRESENTATIONS OF THE GROUP $SU(3)$ AND A MODEL OF $SU(3)$ -SYMMETRY VIOLATION

A. A. BOLOKHOV, Yu. V. NOVOZHILOV

The presented model treats the symmetry violation due to the terms of the type $\bar{\lambda}_\kappa B$ in the $SU(3)$ -invariant Lagrangians, using nonlinear representations of the group $SU(3)$. For the violation the nonlinear representation is realized on four scalar kaons κ with the transformation properties that are considered. The term in the Lagrangian that violates the $SU(3)$ -symmetry and contains the κ -meson mass is obtained from the PCVC condition.

ФУНКЦИИ ГРИНА В ТЕОРИЯХ С НЕАБЕЛЕВОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППОЙ

И. Б. ХРИПЛОВИЧ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

(Поступила в редакцию 21 декабря 1968 г.)

Рассматривается поле Янга — Миллса в радиационной калибровке. Его гамильтониан как функция независимых канонических переменных записывается в виде бесконечного ряда по константе связи. Поэтому при использовании диаграммной техники возникают графики, не имеющие аналога в квантовой электродинамике. Показано, что запись гамильтониана взаимодействия в виде N -произведения, излишняя в спинорной электродинамике, недопустима в скалярной электродинамике и в теории Янга — Миллса. Рассмотрена общая структура функции Грина янг-миллсовского поля. Затем функция Грина вычисляется во втором порядке теории возмущений. Показано, что в теории возмущений не может возникнуть масса ни у янг-миллсовского, ни у гравитационного поля. Вне рамок теории возмущений появление массы у этих полей требует во всяком случае выполнения условий, еще более жестких, чем условия появления массы у фотона. Показано, каким образом при возникновении массы у векторного поля число его степеней свободы в радиационной калибровке возрастает с двух до трех.

1. Введение

Интерес к квантовой теории полей с неабелевой калибровочной группой обусловлен прежде всего попытками квантования гравитационного поля, для которого роль такой группы играют координатные преобразования. Чрезвычайно сложный характер уравнений гравитационного поля вынудил теоретиков обратиться сначала к изучению более простой модели — теории Янга — Миллса [1], обладающей неабелевой калибровочной группой, обобщающей группу изотопического спина.

С другой стороны, интерес к моделям янг-миллсовского типа был вызван экспериментальным обнаружением векторных мезонов, образующих изотопические и унитарный мультиплеты. Здесь следует отметить, что так как массы векторных мезонов, разумеется, отличны от нуля, то широко обсуждается вопрос о том, может ли векторное поле как янг-миллсовского типа, так и нейтральное иметь ненулевую физическую массу в отсутствие затравочной [2, 3]. Значительная часть настоящей работы посвящена рассмотрению этого вопроса.

Исследования Фейнмана [4], а затем де Витта [5], Фаддеева и Попова [6] и Мандельштама [7] показали, что использование ковариантных калибровок в теориях с неабелевой калибровочной группой связано с серьезными трудностями. По существу, в этом случае при вычислении замкнутых петель, образованных гравитонами или янг-миллсовскими мезонами, не выполняется условие унитарности [4]. Чтобы свести концы с концами, приходится вводить новые диаграммы с петлями, образованными некими фиктивными частицами, векторными в случае гравитационного поля и скалярными в случае поля Янга — Миллса [4-7].

В связи с этими трудностями особенно естественным становится использование радиационной калибровки в теориях с неабелевой калибровочной группой.

группой [8] (см. также препринт [6]). Известный проигрыш в автоматизме вычислений, связанный с нековариантностью этого метода, на нынешней стадии исследований кажется не слишком существенным, так как пока мы все равно не выходим за рамки низших порядков теории возмущений. Выигрыш же состоит в том, что в этой формулировке исключаются все нефизические степени свободы, нефизические переменные поля.

В начале второго раздела производится квантование электродинамики в радиационной калибровке по схеме, рассмотренной в [9]; эта часть статьи носит в основном методический характер. Затем обсуждается вопрос об использовании N -произведений в квантовой электродинамике и в теории Янга — Миллса. Рассматривается диаграммная техника и структура функций Грина в электродинамике в радиационной калибровке. Показано, каким образом при возникновении массы у векторного поля с нулевой затравочной массой (на существование такой возможности указал Швингер [3]) число степеней свободы поля в радиационной калибровке возрастает с двух до трех.

Третий раздел статьи посвящен квантованию поля Янга — Миллса в радиационной калибровке. В отличие от электродинамики здесь гамильтониан как явную функцию независимых канонических переменных удается записать только в виде бесконечного ряда по константе связи. В связи с этим обстоятельством в теории Янга — Миллса возникают новые типы диаграмм, не имеющие аналога в квантовой электродинамике.

В четвертом разделе исследуются общие свойства функции Грина поля Янга — Миллса в радиационной калибровке, обсуждается ее отличие от фотонной.

Вычисление янг-миллсовской функции Грина во втором порядке теории возмущений проводится в пятом разделе. Здесь показано, что в теории возмущений у поля Янга — Миллса не может возникнуть масса. Это же утверждение можно сделать и для гравитационного поля. Обсуждается возможность появления массы у янг-миллсовского и гравитационного полей вне рамок применимости теории возмущений.

2. Радиационная калибровка в квантовой электродинамике

Плотность лагранжиана в спинорной электродинамике может быть записана в виде

$$L = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + e A_\mu j_\mu + L_s. \quad (1)$$

Здесь L_s — плотность лагранжиана спинорных частиц, плотность тока которых j_μ служит источником электромагнитного поля. Введем канонические импульсы поля:

$$\pi_0 = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0, \quad (2)$$

$$\pi_m = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_m)} = -(\partial_0 A_m - \partial_m A_0), \quad m = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Трудность, связанная с обращением в нуль импульса, сопряженного с временной компонентой поля, хорошо известна. Она является следствием того, что вектор-потенциал обладает большим числом компонент, чем необходимо для описания поля, т. е. следствием калибровочной инвариантности теории. Уравнение (2) принято называть уравнением первичной связи [9]. Плотность гамильтониана запишется с точностью до трехмерной дивергенции в виде

$$H = \frac{1}{2} \pi_m \pi_m + \frac{1}{2} \partial_m A_n \partial_m A_n - \frac{1}{2} \partial_m A_m \partial_n A_n + e A_m j_m + A_0 (\partial_m \pi_m - e j_0) + H_s. \quad (4)$$

Из уравнения (2) следует, что

$$\partial_0 \pi_0 = -\frac{\partial H}{\partial A_0} = -(\partial_m \pi_m - e j_0) = 0. \quad (5)$$

Это условие, являющееся, очевидно, иной записью уравнения Максвелла $\text{div } \mathbf{E} = e j_0$, принято называть уравнением вторичной связи [9]. С учетом его плотность гамильтониана записывается так:

$$H = \frac{1}{2} \pi_m \pi_m + \frac{1}{2} \partial_m A_n \partial_m A_n - \frac{1}{2} \partial_m A_m \partial_n A_n + e A_m j_m + H_s. \quad (6)$$

Учтем теперь условие радиационной калибровки

$$\partial_m A_m = 0, \quad (7)$$

т. е. пространственную часть вектор-потенциала будем считать трехмерно поперечной. Канонический импульс π_m разобьем на поперечную и продольную в трехмерном смысле части:

$$\pi_m = p_m + \partial_m \varphi, \quad \partial_m p_m = 0. \quad (8)$$

Уравнение вторичной связи (5) сводится теперь к виду

$$\Delta \varphi = e j_0. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что по существу φ совпадает с A_0 . Исключая φ , преобразуем плотность гамильтониана с точностью до трехмерной дивергенции к следующей форме:

$$H = \frac{1}{2} p_m p_m + \frac{1}{2} \partial_m A_n \partial_m A_n + e A_m j_m - \frac{1}{2} e^2 j_0 \Delta^{-1} j_0 + H_s. \quad (10)$$

Таким образом, плотность гамильтониана взаимодействия равна

$$H_{int} = e A_m j_m - \frac{1}{2} e^2 j_0 \Delta^{-1} j_0 = e A_m(x, t) j_m(x, t) + \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{dy j_0(x, t) j_0(y, t)}{|x - y|}. \quad (11)$$

Канонические перестановочные соотношения здесь таковы:

$$[p_m(x, t), A_n(y, t)] = i d_{mn} \delta(x - y), \quad d_{mn} = \delta_{mn} - \partial_m \partial_n \Delta^{-1}. \quad (12)$$

Необходимо подчеркнуть следующее чрезвычайно важное обстоятельство. Нам удалось записать плотность гамильтониана в квантовой электродинамике в замкнутой форме как функцию независимых динамических переменных A_m и p_m только благодаря тому, что j_0 не зависит от φ или A_0 , так что уравнение (9) разрешимо в явном виде. Нетрудно убедиться в том, что независимость j_0 от A_0 , очевидная в случае заряженного спинорного поля, имеет место также и в электродинамике скалярных частиц, если j_0 выражать через канонические координаты и импульсы заряженного поля, как это полагается при гамильтоновом описании системы.

Следует сделать еще одно замечание, относящееся к использованию нормальных произведений в теории поля, в частности в квантовой электродинамике. В спинорном случае запись плотности тока в виде N -произведения приводит лишь к исключению диаграммы рис. 1, описывающей переход γ -кванта в вакуум. Ясно, однако, что этот переход запрещен сохранением зарядовой четности, и его матричный элемент, вычисленный по обычным фейнмановским правилам, автоматически обращается в нуль. Таким образом, в спинорной электродинамике запись плотности тока в виде N -произведения — операция излишняя, хотя и безвредная. Что же касается скалярной электродинамики, то здесь запись в виде N -произведения той

части гамильтониана взаимодействия, которая ответственна за контактные диаграммы, приводит к исключению диаграмм рис. 2, а и б. Нетрудно видеть, однако, что без учета диаграммы 2, а электромагнитная поправка к массе заряженного мезона зависит от продольной части функции Грина фотона [10]. Если же, как предлагается в [10], помещать под знак N -произведения в контактном слагаемом только мезонные операторы, т. е. исключить лишь диаграмму 2, б, то это приведет к появлению продольной части у поляризационного оператора фотона. Запись же однофотонной вершины в скалярной электродинамике в виде N -произведения не нужна по той же самой причине, что и в спинорном случае.

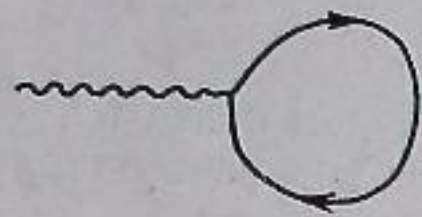


Рис. 1

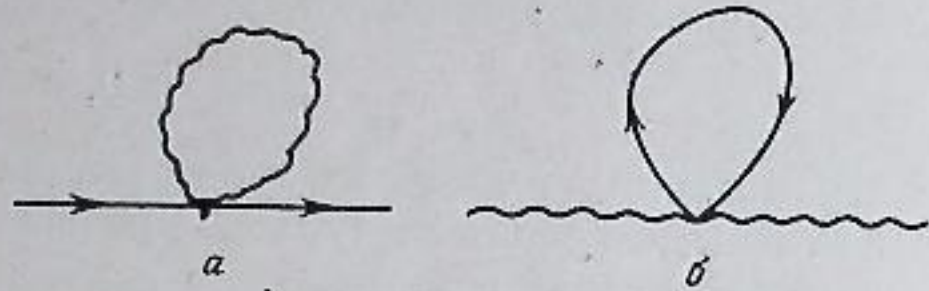


Рис. 2

В теории Янга — Миллса применение N -произведения к тройной вершине, т. е. исключение диаграммы типа 1, также оказывается излишним, так как переход янг-миллсовского кванта в вакуум запрещен законом сохранения изотопического спина, соответствующий матричный элемент автоматически обращается в нуль. Применение же N -произведения к четырехчастичным вершинам приведет к тем же противоречиям, что и в скалярной электродинамике.

Поэтому запись гамильтониана взаимодействия в виде N -произведений не нужна в спинорной электродинамике и некорректна в скалярной электродинамике и в теории Янга — Миллса. Достаточно симметризовать используемые выражения по некоммутирующим бозе-операторам и анти-

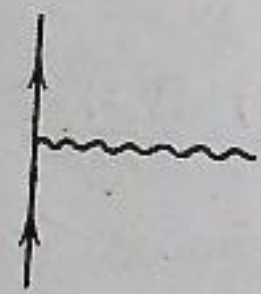


Рис. 3

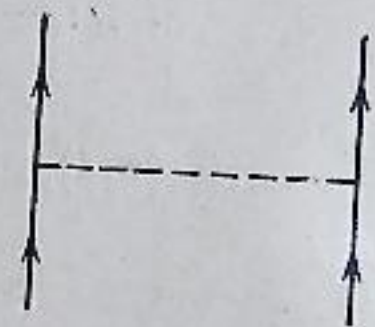


Рис. 4

симметризовать по неантикоммутирующим ферми-операторам. Как известно, в квантовой электродинамике такая запись плотности тока спинорных и скалярных частиц j_μ приводит к тому, что частицы и античастицы входят в j_μ симметрично, а вакуумное среднее от j_μ обращается в нуль. Именно этим рецептом мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Вернемся к H_{int} , заданному формулой (11). Такой гамильтониан взаимодействия порождает два типа первичных диаграмм, приведенных на рис. 3 и 4. Здесь волнистая линия соответствует пространственному фотону, свободная функция Грина которого равна в импульсном представлении

$$D_{mn}^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = \frac{d_{mn}(\mathbf{p})}{p^2 - \omega^2}, \quad d_{mn}(\mathbf{p}) = \delta_{mn} - \frac{p_m p_n}{p^2}. \quad (13)$$

Пунктиром обозначен фурье-образ обратного оператора Лапласа

$$D_{00}^{(0)} = -\frac{1}{p^2}. \quad (14)$$

Собирая (13) и (14) в единую нековариантную функцию Грина

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(p, n) = \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{(np)(n_\mu p_\nu + n_\nu p_\mu)}{(np)^2 - p^2} + \frac{p_\mu p_\nu}{(np)^2 - p^2} \right] p^{-2}, \quad (15)$$

$$p_\mu = (\omega, \mathbf{p}), \quad n_\mu = (1, 0, 0, 0), \quad p^2 = \omega^2 - \mathbf{p}^2,$$

мы приходим к диаграммной технике, которая отличается от ковариантной фейнмановской только видом пропагатора γ -кванта; возникающие же здесь диаграммы топологически тождественны обычным фейнмановским. Что касается отличия $D_{\mu\nu}^{(0)}(p, n)$ от ковариантных функций Грина, то его можно устранить калибровочным преобразованием. Например, с помощью преобразования

$$A_\mu^r = A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \square^{-1} A_\nu \quad (16)$$

можно перейти от радиационной калибровки к обычной диаграммной технике в калибровке Ландау.

Вакуумное среднее от произведения двух фотонных операторов в радиационной калибровке может быть представлено в виде [3, 11]

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = -i \int d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \times \{ \delta_{\mu\nu} - \Delta^{-1} [(n\partial)(n_\mu \partial_\nu + n_\nu \partial_\mu) - \partial_\mu \partial_\nu] \} \Delta^+(x-y, \kappa^2). \quad (17)$$

Слагаемое, пропорциональное $n_\mu n_\nu$, отсутствует, иначе никакое градиентное преобразование над A_μ не позволило бы привести вакуумное среднее к ковариантному виду. По той же причине спектральная функция $\rho(\kappa^2)$ не может зависеть от $(n\partial)^2$ [11]. Заметим, что, используя канонические перестановочные соотношения (12), для положительно определенной величины $\rho(\kappa^2)$ можно получить следующее правило сумм [3, 11]:

$$\int d\kappa^2 \rho(\kappa^2) = 1. \quad (18)$$

Полная функция Грина в импульсном представлении для пространственных компонент вектор-потенциала может быть представлена с помощью (17) в таком виде:

$$D_{mn}(p) = d_{mn}(p) D(p^2), \quad D(p^2) = \int \frac{d\kappa^2 \rho(\kappa^2)}{\kappa^2 - p^2}. \quad (19)$$

Для временной части функции Грина из (17) следует выражение

$$\frac{1}{p^2} \int \frac{d\kappa^2 \kappa^2 \rho(\kappa^2)}{\kappa^2 - p^2}. \quad (20)$$

Эта величина при выключенном взаимодействии обращается в нуль. Функцию Грина кулоновского кванта удобно определить так, чтобы в отсутствие взаимодействия она переходила в (14). Исходя из этого соображения, к выражению (20), учитывающему вакуумные петли, следует добавить величину $-1/p^2$, которую можно интерпретировать как пропагатор необросшего кулоновского кванта, содержащийся непосредственно в H_{int} . Таким образом, полной функцией Грина кулоновского кванта мы будем считать выражение

$$D_{00}(p) = -\frac{1}{p^2} \left[1 - \int \frac{d\kappa^2 \kappa^2 \rho(\kappa^2)}{\kappa^2 - p^2} \right] = \frac{p^2}{p^2} \int \frac{d\kappa^2 \rho(\kappa^2)}{\kappa^2 - p^2}. \quad (21)$$

При переходе к последней форме записи D_{00} используется правило сумм (18).

Компоненты $D_{0n}(p)$ функции Грина в радиационной калибровке равны нулю. Это видно уже из того, что в силу требования трехмерной инвариант-

ности $D_{0n}(p) = p_n \bar{D}(p^2, p^2)$, а в силу условия (7) $p_n D_{0n}(p) = p^2 \bar{D}(p^2, p^2) = 0$ при любых p^2 и p^2 .

Швингером [3] было показано, что при достаточно большом значении заряда e у фотона могла бы в принципе возникнуть масса. Если спектральную функцию представить в виде

$$\rho(\kappa^2) = Z\delta(\kappa^2) + \sigma(\kappa^2), \quad (22)$$

то при $e = 0$ $\sigma(\kappa^2) = 0$ и $Z = 1$. С ростом заряда e вклад непрерывного спектра $\sigma(\kappa^2)$ может так возрасти, что Z в силу условия (18) обратится в нуль, так что безмассовый фотон исчезнет. Если одновременно с этим $\sigma(\kappa^2)$ разовьется достаточно острый максимум, то его можно будет интерпретировать как массивный фотон. Вопрос об изменении числа степеней свободы поля при появлении массы Швингером не обсуждался.

Покажем, каким образом количество степеней свободы поля, описываемого в радиационной калибровке, возрастает при возникновении массы с двух до трех. Для простоты рассмотрим сначала модель, в которой $\sigma(\kappa^2) = \delta(\kappa^2 - \mu^2)$, $Z = 0$. В ней

$$D(p^2) = \frac{1}{\mu^2 - p^2}, \quad D_{00}(p) = \frac{p^2}{p^2(\mu^2 - p^2)}. \quad (23)$$

Нетрудно видеть, что в D_{00} возник теперь полюс по ω , отсутствовавший в $D_{00}^{(0)}$ (см. (14)). Таким образом, временная компонента вектор-потенциала стала, по существу, самостоятельной динамической переменной. Полное число степеней свободы поля (с учетом двух пространственных) стало равным трем. С другой стороны, в статическом пределе D_{00} становится равным

$$D_{00}|_{\omega \rightarrow 0} = -\frac{1}{\mu^2 + p^2}. \quad (24)$$

Это, как и следовало ожидать, есть фурье-образ потенциала Юкава.

В общем случае, при произвольной структуре спектральной функции $\rho(\kappa^2)$, компоненты функции Грина могут быть представлены в виде

$$D_{mn}(p) = \frac{d_{mn}(p)}{\Pi(p^2) - p^2}, \quad D_{00}(p) = \frac{p^2}{p^2[\Pi(p^2) - p^2]}. \quad (25)$$

Отсутствие в спектре состояния с нулевой массой соответствует условию $\Pi(0) \neq 0$. Нетрудно видеть, что при этом условии, даже если $\sigma(\kappa^2) \neq \delta(\kappa^2 - \mu^2)$, возникающий в статическом пределе потенциал является короткодействующим. Если же при каком-то значении $p^2 > 0$ $D(p^2)$ имеет резкий максимум, то его можно интерпретировать как нестабильную частицу с ненулевой массой [3] и тремя независимыми поляризациями.

Наконец, последнее замечание, относящееся к квантовой электродинамике в радиационной калибровке. Вакуумное среднее от произведения ферми-операторов, калибровочное преобразование которых однородно, мультипликативно, также зависит от вектора n_μ , и притом далеко не столь тривиальным образом, как вакуумное среднее (17) от произведения фотонных операторов, для которых градиентное преобразование является аддитивным, сводится к сдвигу. Для произведения ферми-операторов $\psi(x)$, $\bar{\psi}(y)$ вакуумное среднее имеет следующий вид [12, 13]:

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = i \int d\kappa^2 \{ w_1(\kappa^2, (n\partial)^2) + w_2(\kappa^2, (n\partial)^2) i\hat{\partial} + w_3(\kappa^2, (n\partial)^2) i\hat{n}(n\partial) \} \Delta^+(x-y, \kappa^2). \quad (26)$$

Наличие при использовании радиационной калибровки трех спектральных функций вместо обычных двух в этом вакуумном среднем, а также зависимость этих функций от $(n\partial)^2$ подтверждается прямым расчетом во втором порядке теории возмущений [13].

3. Квантование поля Янга — Миллса в радиационной калибровке

Для простоты ограничимся рассмотрением самодействующего янг-миллсовского поля. Учет взаимодействия с другими полями не меняет качественно полученные ниже результаты. Плотность лагранжиана запишем в виде

$$L = -\frac{1}{4} (D_\mu b_\nu^\alpha - D_\nu b_\mu^\alpha) (D_\mu b_\nu^\alpha - D_\nu b_\mu^\alpha), \quad (27)$$

$$D_\mu b_\nu^\alpha = \partial_\mu b_\nu^\alpha + g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} b_\mu^\beta b_\nu^\gamma.$$

Верхние индексы здесь являются изотопическими и пробегают значения 1, 2, 3.

Канонические импульсы поля равны

$$\pi_0^\alpha = \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 b_0^\alpha)} = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \pi_m^\alpha &= -\frac{\delta L}{\delta(\partial_0 b_m^\alpha)} = -(D_0 b_m^\alpha - D_m b_0^\alpha) = \\ &= -(\partial_0 b_m^\alpha - \partial_m b_0^\alpha + 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} b_0^\beta b_m^\gamma). \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение первичной связи $\pi_0^\alpha = 0$ здесь имеет место по той же причине, что и в электродинамике. Плотность гамильтониана с точностью до трехмерной дивергенции записывается в виде

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \pi_m^\alpha \pi_m^\alpha + \frac{1}{2} \partial_m b_n^\alpha \partial_m b_n^\alpha - \frac{1}{2} \partial_m b_m^\alpha \partial_n b_n^\alpha + \\ &+ 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_m b_n^\alpha b_m^\beta b_n^\gamma + g^2 (b_m^\alpha b_m^\alpha b_n^\beta b_n^\beta - b_m^\alpha b_m^\beta b_n^\alpha b_n^\beta) + \\ &+ b_0^\alpha (\partial_m \pi_m^\alpha - 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \pi_m^\beta b_m^\gamma). \end{aligned} \quad (30)$$

В силу (28) мы приходим к уравнению вторичной связи

$$\partial_0 \pi_0^\alpha = -\frac{\delta H}{\delta b_0^\alpha} = -(\partial_m \pi_m^\alpha - 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \pi_m^\beta b_m^\gamma) = 0, \quad (31)$$

позволяющему опустить в выражении для H последнее слагаемое.

Наложим теперь условие, фиксирующее радиационную калибровку:

$$\partial_m b_m^\alpha = 0. \quad (32)$$

Канонический импульс π_m^α разбиваем на трехмерно-поперечную и продольную части

$$\pi_m^\alpha = p_m^\alpha + \partial_m \varphi^\alpha, \quad \partial_m p_m^\alpha = 0. \quad (33)$$

При этом уравнение вторичной связи (31) сводится к виду

$$\Delta \varphi^\alpha = 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}(p_m^\beta + \partial_m \varphi^\beta) b_m^\gamma \quad (34)$$

Сравнивая уравнение (34) с нулевой компонентой уравнения, полученного варьированием плотности лагранжиана (27), нетрудно видеть, что φ^α совпадает с $b_n^\alpha + 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Delta^{-1} b_m^\beta \partial_m b_n^\gamma$. Плотность гамильтониана, выраженная через b_n^α , p_n^α и φ^α , с учетом условия (32) равна с точностью до трехмерной дивергенции

$$H = \frac{1}{2} p_m^\alpha p_m^\alpha + \frac{1}{2} \partial_m b_n^\alpha \partial_m b_n^\alpha + 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_m b_n^\alpha b_m^\beta b_n^\gamma + g^2 (b_m^\alpha b_m^\alpha b_n^\beta b_n^\beta - b_m^\alpha b_m^\beta b_n^\alpha b_n^\beta) - \frac{1}{2} \varphi^\alpha \Delta \varphi^\alpha \quad (35)$$

Однако в отличие от уравнения (9) в квантовой электродинамике уравнение (34) не позволяет выразить φ^α в замкнутой форме через канонически сопряженные величины p_m^β и b_m^γ , соответствующие независимым степеням свободы поля. Решая уравнение (34) итерациями по g , а затем исключая φ^α из (35), мы получим гамильтониан янг-миллсовского поля, выраженный через p_m^α и b_n^β , только в виде ряда по степеням константы связи g . В отличие от гамильтониана квантовой электродинамики гамильтониан янг-миллсовского поля не выражается в замкнутой форме через независимые динамические переменные в радиационной калибровке.

Итерации уравнения (34) по константе связи g дают

$$\varphi_1^\alpha = 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Delta^{-1} (p_m^\beta b_m^\gamma),$$

$$\varphi_2^\alpha = 4g^2 \Delta^{-1} [b_m^\beta \partial_m \Delta^{-1} (p_n^\beta b_n^\alpha - p_n^\alpha b_n^\beta)],$$

$$\varphi_3^\alpha = -8g^3 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Delta^{-1} \{ b_m^\beta \partial_m \Delta^{-1} [b_n^\delta \partial_n \Delta^{-1} (p_h^\delta b_h^\gamma - p_h^\gamma b_h^\delta)] \}. \quad (36)$$

Эти выражения следует еще симметризовать по некоммутирующим операторам. Нетрудно показать, однако, что симметризация не влияет на полученный результат. Поэтому мы будем использовать для φ^α выражение (36). Плотность гамильтониана янг-миллсовского поля после некоторых преобразований запишется в виде:

$$H = \frac{1}{2} p_m^\alpha p_m^\alpha + \frac{1}{2} \partial_m b_n^\alpha \partial_m b_n^\alpha + 2g\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_m b_n^\alpha b_m^\beta b_n^\gamma + g^2 (b_m^\alpha b_m^\alpha b_n^\beta b_n^\beta - b_m^\alpha b_m^\beta b_n^\alpha b_n^\beta) - g^2 (p_m^\alpha b_m^\beta - p_m^\beta b_m^\alpha) \Delta^{-1} (p_n^\alpha b_n^\beta - p_n^\beta b_n^\alpha) - 4g^3 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \{ p_m^\beta b_m^\gamma \Delta^{-1} [b_n^\delta \partial_n \Delta^{-1} (p_h^\delta b_h^\alpha - p_h^\alpha b_h^\delta)] + \Delta^{-1} [b_n^\delta \partial_n \Delta^{-1} (p_h^\delta b_h^\alpha - p_h^\alpha b_h^\delta)] p_m^\beta b_m^\gamma \} - 24g^4 [b_m^\beta \partial_m \Delta^{-1} (p_n^\beta b_n^\alpha - p_n^\alpha b_n^\beta)] \Delta^{-1} [p_l^\gamma b_l^\alpha - p_l^\alpha b_l^\gamma] + \dots \quad (37)$$

В этом выражении опущены члены пятого и более высоких порядков по константе связи. Канонические перестановочные соотношения для поля Янга — Миллса таковы:

$$[p_m^\alpha(x, t), b_n^\beta(y, t)] = i\delta^{\alpha\beta} d_{mn} \delta(x - y). \quad (38)$$

Чтобы перейти в полученной плотности гамильтониана к представлению взаимодействия, практически достаточно отождествить p_m^α с каноническим трехмерно-поперечным импульсом свободного поля, т. е. с величиной $-\partial_0 b_m^\alpha$.

Характерной чертой полученного гамильтониана взаимодействия янг-миллсовского поля является то, что наряду с обычными диаграммами (см. рис. 5 и 6), а также простой кулоновской диаграммой (рис. 7) он порождает бесконечный ряд первичных диаграмм. Первыми представителями этого ряда являются диаграммы 8 и 9, изображающие соответственно

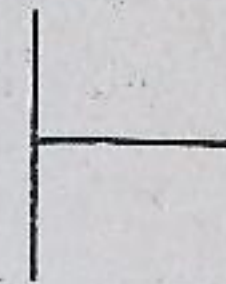


Рис. 5



Рис. 6



Рис. 7

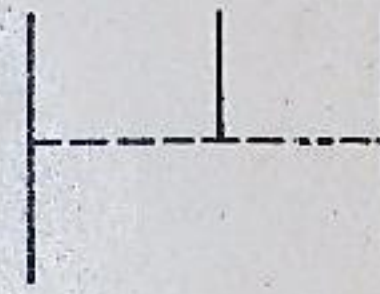


Рис. 8

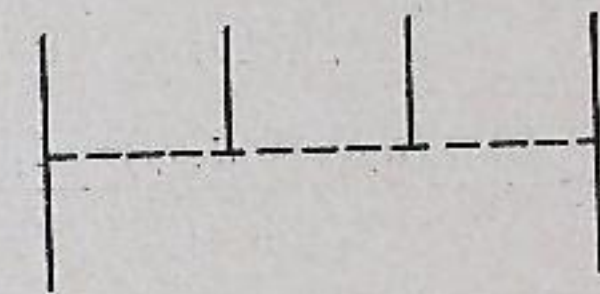


Рис. 9

слагаемые третьего и четвертого порядков по константе связи в гамильтониане. Каждая последующая диаграмма в этом ряду получается из предыдущей добавлением еще одного непунктирного отростка к пунктирной перекладине. На приведенных диаграммах сплошная линия соответствует трехмерно-поперечному пространственному кванту, функция Грина которого в импульсном пространстве равна

$$D_{mn}^{\alpha\beta(0)} = \delta^{\alpha\beta} \frac{d_{mn}(p)}{p^2 - \omega^2}. \quad (39)$$

Пунктиром обозначен аналог функции Грина свободного кулоновского кванта

$$D_{00}^{\alpha\beta(0)} = -\delta^{\alpha\beta} \frac{1}{p^2}. \quad (40)$$

Наличие в радиационной калибровке бесконечного ряда первичных диаграмм существенно отличает теорию Янга — Миллса от квантовой электродинамики. По-видимому, присутствие этих графиков тесно связано с необходимостью введения диаграмм с фиктивными частицами при использовании ковариантных калибровок [4-7]. Характерной чертой диаграммной техники в радиационной калибровке является, как нетрудно убедиться из рассмотрения первичных диаграмм, отсутствие графиков с замкнутыми петлями, образованными только пунктирными линиями. Это утверждение не противоречит результатам, содержащимся в препринте Попова и Фаддеева [6], в котором диаграммная техника для поля Янга — Миллса в радиационной калибровке получена с помощью метода континуального интеграла. В отличие от настоящей работы, в упомянутом препринте сплошная линия на диаграмме описывает распространение не только физических, но и временных квантов.

В квантовой теории гравитации число первичных диаграмм также бесконечно. Первая, очевидная, причина этого состоит в том, что уже лагранжиан гравитационного поля (в отличие, например, от янг-миллсов-

ского лагранжиана) представляется в виде бесконечного ряда по константе связи, т. е. по эйнштейновской гравитационной постоянной. Вторая же причина совершенно аналогична той, которая приводит к бесконечному числу первичных диаграмм для теории Янга — Миллса в радиационной калибровке. Самодействие гравитационного поля приводит к тому, что исключение лишних степеней свободы поля здесь также возможно лишь путем итераций. Поэтому, даже если ограничиться конечным числом членов в лагранжиане, гамильтониан гравитационного поля выразится в виде бесконечного ряда по степеням эйнштейновской постоянной. Именно этот ряд первичных графиков тесно связан, по-видимому, с наличием диаграмм с фиктивными частицами, которые необходимо вводить при использовании ковариантных калибровок в квантовой теории гравитации [4-7].

4. Функция Грина поля Янга — Миллса

Вакуумное среднее от произведения двух янг-миллсовских операторов в радиационной калибровке записывается в следующем виде:

$$\langle b_\mu^\alpha(x) b_\nu^\beta(y) \rangle = -i\delta^{\alpha\beta} \int d\kappa^2 \left\{ \rho(\kappa^2, \Delta) \times \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{(n\partial)(n_\mu\partial_\nu + n_\nu\partial_\mu) - \partial_\mu\partial_\nu}{\Delta} \right] + \rho_1(\kappa^2, \Delta) n_\mu n_\nu \right\} \Delta^+(x-y, \kappa^2). \quad (41)$$

Такая форма вакуумного среднего, очевидно, обеспечивает выполнение условия (32), фиксирующего радиационную калибровку. Новое по сравнению с соответствующей величиной (17) в квантовой электродинамике здесь — возникновение второй тензорной структуры, содержащей $n_\mu n_\nu$, и зависимость спектральных функций не только от κ^2 , но и от $(n\partial)^2$, или что то же, от оператора Лапласа Δ . Это отличие связано с тем, что калибровочное преобразование для поля Янга — Миллса не сводится только к сдвигу, как в случае электромагнитного вектор-потенциала, но содержит и мультипликативную часть, подобно преобразованию заряженного поля в электродинамике. Поэтому спектральное представление (41) содержит характерные черты не только соотношения (17), но и спектрального представления (26) для заряженных полей, разумеется, с учетом различия трансформационных свойств b_μ^α и ψ .

Ковариантные уравнения движения, полученные варьированием лагранжиана (27), могут быть записаны в виде

$$-\partial_\mu(\partial_\mu b_\nu^\alpha - \partial_\nu b_\mu^\alpha) = j_\nu^\alpha. \quad (42)$$

Используя сохранение тока $\partial_\nu j_\nu^\alpha = 0$, следующее непосредственно из (42), и условие $\partial_m b_m^\alpha = 0$, эти уравнения можно представить в форме

$$\Delta b_0^\alpha = j_0^\alpha, \quad (43)$$

$$\square b_m^\alpha = d_{mn} j_n^\alpha. \quad (44)$$

Вакуумное среднее от компонент плотности тока с учетом закона сохранения $\partial_\nu j_\nu^\alpha = 0$ запишется следующим образом:

$$\langle j_\mu^\alpha(x) j_\nu^\beta(y) \rangle = -i\delta^{\alpha\beta} \int d\kappa^2 \left\{ r(\kappa^2, \Delta) (\kappa^2 \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) + r_1(\kappa^2, \Delta) [(n\partial)^2 \partial_\mu \partial_\nu + \kappa^2 (n\partial)(n_\mu \partial_\nu + n_\nu \partial_\mu) + \kappa^4 n_\mu n_\nu] \right\} \Delta^+(x-y, \kappa^2). \quad (45)$$

Используя уравнения движения (43), (44), нетрудно связать функции r и r_1 со спектральными функциями вакуумного среднего $\langle b_\mu^\alpha(x) b_\nu^\beta(y) \rangle$ (см. (41)):

$$r(\kappa^2, p^2) = \kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2), \quad r_1(\kappa^2, p^2) = \rho_1(\kappa^2, p^2). \quad (46)$$

В электродинамике уравнения для вектор-потенциала в радиационной калибровке могут быть записаны в форме, совпадающей с (43), (44), только, разумеется, без изотопических индексов. Поэтому, используя (17), нетрудно получить в электродинамике для величины $\langle j_\mu(x) j_\nu(y) \rangle$ выражение, полностью ковариантное даже в радиационной калибровке и вообще градиентно-инвариантное:

$$\langle j_\mu(x) j_\nu(y) \rangle = -i \int d\kappa^2 \kappa^2 \rho(\kappa^2) (\kappa^2 \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) \Delta^+(x-y, \kappa^2). \quad (47)$$

Так, конечно, и должно быть, потому что в квантовой электродинамике фурье-образ вакуумного среднего $\langle j_\mu(x) j_\nu(y) \rangle$ однозначно связан с сече-

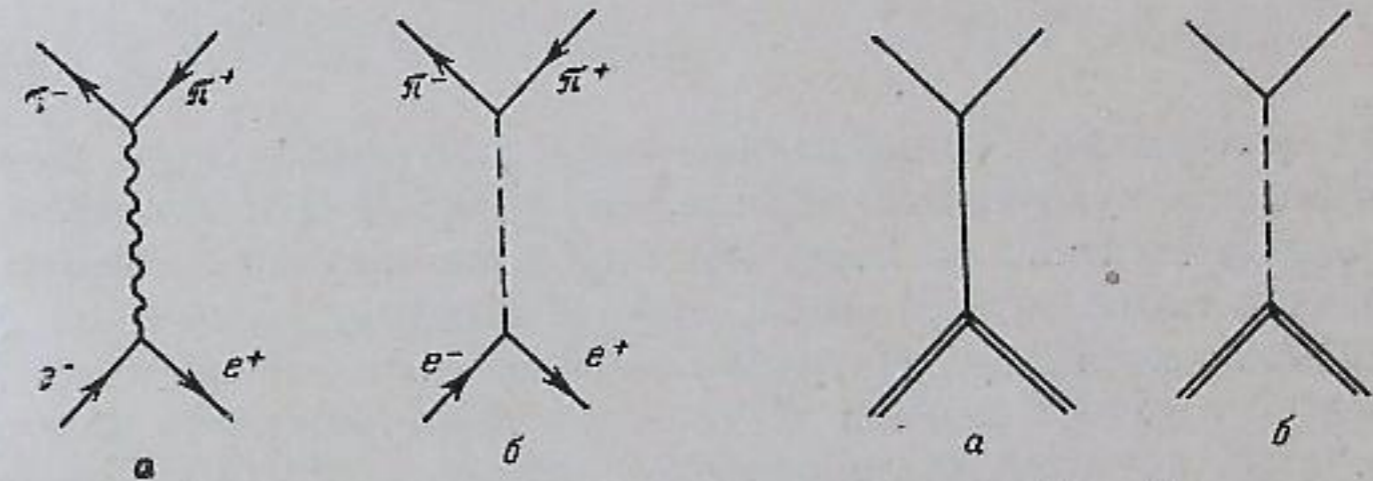


Рис. 10

Рис. 11

ниями физических процессов [14], так что эта величина не может зависеть ни от калибровки, ни от произвольного вектора n_μ . Например вычисленная с учетом вклада только двухмезонного промежуточного состояния, эта величина определяет однозначно полное сечение рождения мезонной пары в низшем порядке по α при аннигиляции пары e^+e^- . Этот процесс описывается диаграммами на рис. 10, а и б. (Отметим, что в с.д.м. диаграмма 10, б с виртуальным кулоновским квантом обращается в нуль.)

Иная ситуация в теории Янга — Миллса. Например, процесс аннигиляции фермионов в пару янг-миллсовских квантов описывается здесь во втором порядке по g диаграммами 11, а, б и 12, где двойные линии соответ-



Рис. 12

ствуют фермионам. (В с.д.м. диаграмма 11, б обращается в нуль и в этом случае.) Требованию градиентной и релятивистской инвариантности должен удовлетворять, вообще говоря, только суммарный вклад в сечение всех трех графиков. Между тем вакуумное среднее (45) в двухчастичном приближении определяется квадратом модуля суммы только диаграмм на рис. 11, а и б, так что нет физических оснований требовать градиентной и релятивистской инвариантности этой величины.

Используя (41), нетрудно найти функцию Грина пространственных компонент поля Янга — Миллса. Ее удобно представить в следующей

форме:

$$D_{mn}^{\alpha\beta}(p) = \delta^{\alpha\beta} d_{mn}(p) D(p),$$

$$D(p) = \int \frac{d\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2)}{\kappa^2 - p^2} = -\frac{1}{p^2} \left\{ \int d\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) - \int \frac{d\kappa^2 \kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2)}{\kappa^2 - p^2} \right\}. \quad (48)$$

Последняя форма записи $D(p)$ в (48) оказывается удобной для расчетов в теории возмущений.

Перейдем к временной части функции Грина. Вклад в нее из (41) равен

$$\delta^{\alpha\beta} \frac{1}{p^2} \int \frac{d\kappa^2 [\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) - p^2 \rho_1(\kappa^2, p^2)]}{\kappa^2 - p^2}. \quad (49)$$

Это выражение учитывает вакуумные петли с отличной от нуля мнимой частью и обращается в нуль при выключенном взаимодействии. Так же как в электродинамике, временную часть функции Грина удобно определить, включив в нее вклад от первичных диаграмм, содержащихся непосредственно в гамильтониане. Это бесконечный ряд, первыми членами

которого являются $-\delta^{\alpha\beta} \frac{1}{p^2}$ от диаграммы на рис. 7 и величина, полу-

ченая из диаграммы 9 замыканием двух внутренних отростков (остальные отличные от нуля замыкания на этом графике соответствуют радиационным поправкам либо к вершине перехода пространственного кванта в пространственный и временной, либо к процессу рассеяния двух пространственных квантов). Нетрудно видеть, что диаграммы, входящие в эту сумму, не имеют мнимой части. С учетом суммарного вклада первичных диаграмм, который мы обозначим через $-\delta^{\alpha\beta} R(p^2)/p^2$, временная компонента функции Грина равна

$$D_{00}^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} D_{00}(p),$$

$$D_{00}(p) = -\frac{1}{p^2} \left\{ R(p^2) - \int \frac{d\kappa^2 [\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) - p^2 \rho_1(\kappa^2, p^2)]}{\kappa^2 - p^2} \right\}. \quad (50)$$

5. Функция Грина в теории возмущений. Физическая масса янг-миллсовского кванта

Вычислим функцию Грина поля Янга — Миллса во втором порядке теории возмущений. Величину $\int d\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2)$ найдем, рассматривая следующее из (41) равенство

$$\langle [b_m^\alpha(x), \partial_0 b_n^\beta(y)] |_{x_0=y_0} \rangle = i \delta^{\alpha\beta} d_{mn}(p) \int d\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) \delta(x-y). \quad (51)$$

Для нахождения его левой части запишем сначала $\partial_0 b_n^\beta$ через канонические переменные. Учитывая соотношения (29), (33), (36) и то, что $\varphi^\alpha =$

$= b_0^\alpha + 2g\epsilon^{\alpha\beta\gamma} \Delta^{-1} b_m^\beta \partial_m b_0^\gamma$, получаем в g^2 -приближении

$$\partial_0 b_n^\beta(y) = -p_n^\beta(y) - \frac{g^2}{\pi} (\delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\gamma} - \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\alpha\beta}) d_{nk} b_k^\gamma(y) \int \frac{dz p_i^\epsilon(z) b_i^\kappa(z)}{|y-z|} \quad (52)$$

Затем, используя канонические соотношения коммутации (38), выразим вакуумное среднее в (51) через матричный элемент

$$\langle b_n^\gamma(y, t) b_k^\kappa(z, t) \rangle = \delta^{\gamma\kappa} d_{nk} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|y-z|^2}. \quad (53)$$

В конце концов, после ряда вычислений приходим к следующему правилу сумм в g^2 -приближении:

$$\int d\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) = 1 + \frac{2g^2}{3\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda_1^2}{p^2} + \frac{8}{3} \right). \quad (54)$$

Здесь Λ_1 — максимальное значение модуля трехмерного импульса интегрирования. Подчеркнем, что в отличие от квантовой электродинамики в теории Янга — Миллса интеграл от спектральной функции не равен единице.

Как видно из (45) и (46), величина $\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2)$ может быть найдена с помощью условия унитарности. Ее удобно искать как коэффициент при $\kappa^2 \delta_{mn}$ в мнимой части диаграммы поляризации вакуума пространственного янг-миллсовского кванта. Вычисления приводят к следующему результату:

$$\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) = \frac{g^2}{4\pi^2} \left\{ -\frac{43}{3} - 3x - (x+1)^{-1} - \frac{3x^3 + 20x^2 + 32x + 16}{(x+1)^{3/2}} \ln \frac{(x+1)^{1/2} - 1}{x^{1/2}} \right\}, \quad x = \frac{\kappa^2}{p^2}. \quad (55)$$

Заметим, что так как с помощью условия унитарности вычисляется непосредственно $\kappa^4 \rho(\kappa^2, p^2)$, то величина $\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2)$ в принципе могла бы содержать еще слагаемое с $\delta(\kappa^2)$. Однако это привело бы к полюсу второго порядка в функции Грина (48), что недопустимо.

Вычисляя с помощью условия унитарности мнимую часть диаграммы поляризации вакуума временного янг-миллсовского кванта, находим

$$\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) - p^2 \rho_1(\kappa^2, p^2) = \frac{g^2}{6\pi^2} \left\{ 1 + 9x + \frac{3x(3x+2)}{(x+1)^{1/2}} \ln \frac{(x+1)^{1/2} - 1}{x^{1/2}} \right\}. \quad (56)$$

Асимптотические выражения для спектральных функций в области $\kappa^2 \gg p^2$ таковы:

$$\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2) = \frac{g^2}{6\pi^2} \left(1 + \frac{32}{5} x^{-1} - \frac{16}{35} x^{-2} + \dots \right), \quad (57)$$

$$p^2 \rho_1(\kappa^2, p^2) = \frac{6g^2}{5\pi^2} x^{-1} \left(1 - \frac{4}{21} x^{-1} + \dots \right). \quad (58)$$

Вклад в величину $R(p^2)$ (см. (50)) от слагаемого четвертого порядка по константе связи в гамильтониане (37) может быть получен, как было отмечено в конце четвертого раздела, из диаграммы 9 замыканием внутренних отростков. В сумме с вкладом диаграммы 7, равным единице, это дает

$$R(p^2) = 1 + \frac{2g^2}{\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda_1^2}{p^2} + \frac{2}{3} \right). \quad (59)$$

Окончательные выражения для компонент функции Грина, полученные подстановкой величин (54) — (56), (59) в соотношения (48), (50), сле-

дующие:

$$D(p) = -\frac{1}{p^2} \left[1 + \frac{g^2}{6\pi^2} \left(4 \ln \frac{\Lambda_1^2}{p^2} - \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} + \frac{38}{3} \right) \right] - \frac{g^2}{2\pi^2} \frac{1}{p^2} \left\{ 3 \ln \frac{-p^2}{4p^2} + 6 + \frac{1}{2} \left(3 \frac{-p^2}{p^2} - 2 \right) \left(\frac{p^2}{p^2 + p^2} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[\ln \frac{-p^2}{4p^2} \ln \frac{|p| + \sqrt{p^2 + p^2}}{||p| - \sqrt{p^2 + p^2}|} + \Phi \left(\frac{2|p|}{|p| + \sqrt{p^2 + p^2}} \right) - \Phi \left(\frac{2|p|}{|p| - \sqrt{p^2 + p^2}} \right) \right] \right\}; \quad (60)$$

$$D_{00}(p) = -\frac{1}{p^2} \left\{ 1 + \frac{g^2}{\pi^2} \left[2 \ln \frac{\Lambda_1^2}{p^2} - \frac{1}{6} \ln \frac{\Lambda^2}{-p^2} - \frac{19}{3} - \frac{3}{2} \frac{p^2}{p^2} - \left(4 + \frac{p^2}{p^2} \right) \ln \frac{-p^2}{4p^2} \right] + \frac{g^2}{8\pi^2} \left(\frac{p^2}{p^2 + p^2} \right)^{1/2} \left(3 \frac{p^6}{p^6} + 20 \frac{p^4}{p^4} + 32 \frac{p^2}{p^2} + 16 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\ln \frac{-p^2}{4p^2} \ln \frac{|p| + \sqrt{p^2 + p^2}}{||p| - \sqrt{p^2 + p^2}|} + \Phi \left(\frac{2|p|}{|p| + \sqrt{p^2 + p^2}} \right) - \Phi \left(\frac{2|p|}{|p| - \sqrt{p^2 + p^2}} \right) \right] \right\} \quad (61)$$

Здесь Λ^2 — верхний предел интегрирования в дисперсионном интеграле;

$$\Phi(z) = - \int_0^z dy \frac{\ln|1-y|}{y}$$

— функция Спенса.

Логарифмический характер расходимостей в функции Грина означает, что и в поляризованном операторе Π отсутствует квадратично расходящаяся постоянная часть. Для Π_{00} она автоматически не возникает при нековариантном вычислении фейнмановского интеграла (сначала интегрирование по q_0 , затем по q), а в Π_{mn} эта расходимость сокращается швингерским членом, т. е. величиной

$$-ig \int d^4x e^{-ipx} \delta(x_0) \langle [\partial_0 b_m^\alpha(x), j_n^\beta(0)] \rangle,$$

содержащейся в поляризованном операторе. Отличие от нуля этого вакуумного среднего обусловлено не только очевидной зависимостью j_n^β от b_m^α , которая соответствует необходимости учета контактных диаграмм при вычислении Π_{mn} , но и дополнительным доопределением плотности тока самодействия янг-миллсовского поля. Конкретный способ этого доопределения будет рассмотрен в отдельной работе. Соответствующее определение фермионного изовекторного тока было указано в статьях [15, 16]. Используемая в настоящей работе схема вычислений автоматически учитывает наличие швингеровских членов.

Отметим, что в препринте [6] приводится выражение для поляризованного оператора янг-миллсовского поля в ковариантной калибровке. Однако вопрос о наличии постоянной части у поляризованного оператора в работе [6] по существу не обсуждается.

Для появления постоянной части в поляризованном операторе, для исчезновения безмассовой частицы в физическом спектре необходимо (см. (25)), чтобы обратились в нуль при $p^2 \rightarrow 0$ выражения в фигурных скобках в (48) и (50). Если спектральную функцию ρ представить в виде

$$\rho(\kappa^2, p^2) = Z(p^2) \delta(\kappa^2) + \sigma(\kappa^2, p^2), \quad (62)$$

то эти условия можно, очевидно, записать так:

$$\int d\kappa^2 \sigma(\kappa^2, p^2) = \int d\kappa^2 \rho(\kappa^2, p^2), \quad (63)$$

$$\int d\kappa^2 \sigma(\kappa^2, p^2) = R(p^2) + \int d\kappa^2 \frac{p^2}{\kappa^2} \rho_1(\kappa^2, p^2). \quad (64)$$

Первое из них, (63), означает попросту, что $Z(p^2) = 0$. Совершенно ясно, что в теории возмущений ни одно из этих условий выполняться не может. Таким образом, вопреки сомнениям, содержащимся в [1], и уверенности, выраженной в [2], в теории возмущений поле Янга — Миллса не может приобрести массу.

Аналогичное утверждение можно сделать и для гравитационного поля в теории возмущений.

Может ли возникнуть масса у поля Янга — Миллса, если оно не описывается теорией возмущения? Для этого заряд должен одновременно удовлетворять двум уравнениям — (63) и (64). Соотношение (63) является условием появления массы у тех двух состояний со спиральностями ± 1 , которыми обладает и безмассовая векторная частица; соотношение же (64) обуславливает возникновение нового, третьего состояния со спиральностью 0, необходимого для векторной частицы с массой. Эти два условия не совпадают тождественно. В этом нетрудно убедиться в теории возмущений, сравнивая предел выражения в фигурных скобках в (61) при $p^2 \rightarrow 0$ с вычетом выражения (60) в точке $p^2 = 0$:

$$Z(p^2) = 1 + \frac{g^2}{6\pi^2} \left(4 \ln \frac{\Lambda_1^2}{p^2} - \ln \frac{\Lambda^2}{\kappa_0^2} + \frac{38}{3} \right). \quad (65)$$

Здесь κ_0^2 — инфракрасный обрезывающий параметр. Кроме того, несмотря на то, что уравнения (63) и (64) зависят от p^2 , заряд, являющийся решением этих уравнений, от такого параметра зависеть не должен. Что же касается величины κ_0^2 , то все точные выражения, если масса действительно возникает, должны допускать предельный переход $\kappa_0^2 \rightarrow 0$. Поэтому условия появления массы здесь, во всяком случае, еще более жесткие, чем в квантовой электродинамике, где должно выполняться одно уравнение $Z = 0$, к тому же не зависящее от таких величин, как p^2 и κ_0^2 .

Естественно ожидать, что в квантовой теории гравитации вне рамок теории возмущений для появления массы у гравитона эйнштейновская постоянная должна удовлетворять одновременно уже трем уравнениям, которые являются условиями появления массы у состояний со спиральностями ± 2 и возникновения новых состояний с массой со спиральностями ± 1 и 0. (Очевидно, спиральностям, отличающимся только знаком, соответствует одно и то же условие.) Что же касается зависимости от p^2 и κ_0^2 то здесь могут быть сделаны те же замечания, что и в янг-миллсовском случае. Таким образом, условия появления массы здесь, по-видимому, даже жестче, чем для поля Янга — Миллса.

Наконец, последнее замечание, касающееся возможности возникновения массы у янг-миллсовского и гравитационного полей. Если сделать разумное предположение, что с ростом заряда вклад непрерывного спектра σ в спектральную плотность ρ растет, то в электродинамике, где имеет место правило сумм (18), обращение Z в нуль при достаточно большом

значении ϵ более естественно, чем в теории Янга — Миллса или в теории гравитации, где правая часть правила сумм (см. (54)) может сама оказаться растущей функцией заряда и вне рамок теории возмущений.

В заключение искренне благодарю А. М. Алтухова, А. И. Вайнштейна, Б. Л. Иоффе, В. И. Огиевского, В. В. Соколова и Л. Д. Фаддеева за интерес к работе, ценные обсуждения и критику.

Литература

- [1] C. N. Yang, R. L. Mills. Phys. Rev., 96, 191, 1954. (Перевод в сб. Элементарные частицы и компенсирующие поля, ИИЛ, 1964, стр. 28.)
- [2] J. J. Sakurai. Ann. Physics, 11, 1, 1960. (Перевод в сб. Элементарные частицы и компенсирующие поля, ИИЛ, 1964, стр. 42.)
- [3] J. Schwinger. Phys. Rev., 125, 397, 1962. (Перевод в сб. Элементарные частицы и компенсирующие поля, ИИЛ, 1964, стр. 203.)
- [4] R. P. Feynman. Acta Phys. Polon., 24, 697, 1963.
- [5] B. S. DeWitt. Phys. Rev., 162, 1195, 1967.
- [6] L. D. Faddeev, V. N. Popov. Phys. Lett., 25B, 30, 1967; препринт ИТФ АН УССР; Киев, 1967.
- [7] S. Mandelstam. Phys. Rev., 175, 1580, 1968.
- [8] J. Schwinger. Phys. Rev., 125, 1043, 1962; 127, 324, 1962. (Перевод в сб. Элементарные частицы и компенсирующие поля, ИИЛ, 1964, стр. 207, 219.)
- [9] Дж. Андерсон. В сб. Гравитация и относительность, «Мир», 1965, стр. 435.
- [10] С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИИЛ, 1963, стр. 458, 460 (примечания редакции).
- [11] L. Evans, G. Feldman, P. T. Matthews. Ann. Physics, 13, 268, 1961.
- [12] L. Evans, T. Fulton. Nucl. Phys., 21, 492, 1960.
- [13] А. И. Хисамутдинов. Дипломная работа. Новосибирский государственный университет, 1965.
- [14] В. Н. Грибов, В. Л. Иоффе, И. Я. Померанчук. ЯФ, 6, 587, 1967.
- [15] В. В. Соколов, И. Б. Хриплович. ЯФ, 5, 644, 1967.
- [16] L. Kannenberg, R. Arnowitt. Ann. Physics, 49, 93, 1968.

GREEN'S FUNCTIONS IN THEORIES WITH NON-ABELEAN GAUGE GROUP

I. V. KHRIPOVICH

The Yang — Mills field in the radiative gauge is considered. Its Hamiltonian as a function of independent canonic variables is written as the infinite series on the coupling constant. Thus when using the diagram technique, the graphs with no analogs in quantum electrodynamics appear. It is shown that the representation of the interaction Hamiltonian as N -product which is unnecessary in spinor electrodynamics, is not allowed in scalar electrodynamics and in the Yang — Mills theory. General structure of the Green function of the Yang — Mills field is considered. The Green function is then calculated in the second order of the perturbation theory. It is shown that in the perturbation theory the mass can appear neither in the Yang — Mills field nor in the gravitational one. Off the terms of the perturbation theory the appearance of the mass in these fields implies in any case the more strict conditions than the appearance of the photon mass. It is shown how the number of the degrees of freedom of the vector field in radiative gauge increases from two up to three when the mass appears in it.

О ПРИНЦИПЕ МИНИМАКСА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н. Н. БОГОЛЮБОВ (мл.)

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

(Поступила в редакцию 12 декабря 1968 г.)

Предлагается метод исследования модельных задач общего типа, содержащих сразу члены с положительным и отрицательным парным четырехфермионным взаимодействием. При некоторых достаточно общих условиях построено асимптотически точное решение для такого типа задач. Развиваемая здесь методика привела к принципу минимакса для модельных задач с четырехфермионным парным взаимодействием.

В наших предыдущих работах [1-5] были предложены подходы к изучению модельных задач как с положительным, так и с отрицательным парным четырехфермионным взаимодействием. Были изучены глубокие связи между аппроксимирующими гамильтонианами, свободными энергиями, корреляционными функциями и функциями Грина. При этом были выяснены существенные отличия методов для решения задач с положительным взаимодействием от задач с отрицательным взаимодействием.

Кратко отметим, что в первом случае задач с положительным взаимодействием константы C , входящие в аппроксимирующий гамильтониан $H_0(C)$, определялись из условия абсолютного максимума свободной энергии, построенной на основе $H_0(C)$. Во втором случае задач с отрицательным взаимодействием константы S , входящие в аппроксимирующий гамильтониан $\mathcal{H}_0(S)$, определялись из условия абсолютного минимума свободной энергии, построенной на основе $\mathcal{H}_0(S)$.

В работах [2, 4] были предложены методы для получения асимптотически точных результатов для корреляционных функций и свободных энергий как для задач первого типа, так и для задач второго типа. Но ни один из развиваемых там методов не мог быть применен к модельным задачам более общего вида, содержащим сразу члены с положительным и отрицательным парным четырехфермионным взаимодействием. Поэтому здесь мы предложим методику для исследования этой значительно более сложной задачи.

Мы покажем, что такая модельная система также принадлежит к числу точно решаемых модельных задач и найдем для нее выражение для свободной энергии.

Исследуемая модельная система с положительным и отрицательным четырехфермионным парным взаимодействием характеризуется гамильтонианом

$$\mathcal{H} = T + 2V \sum_{\alpha=1}^m \Pi_{\alpha}^{+} - 2V \sum_{\alpha=1}^r \mathcal{Y}_{\alpha}^{+}, \quad (1)$$

где $T = \sum_f T_f a_f a_f^{+}$ — оператор кинетической энергии,

$$\Pi_{\alpha} = \frac{1}{2V} \sum_f \lambda_f^{\alpha++} a_f a_{-f}^{++}, \quad \mathcal{Y}_{\alpha} = \frac{1}{2V} \sum_f \Omega_f^{\alpha++} a_f a_{-f}^{++}$$