

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ФЕРМИ-СИСТЕМ

Б. А. РУМЯНЦЕВ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

(Поступила в редакцию 14 июня 1971 г.)

В рамках сверхтекучей модели ядра выведены гидродинамические уравнения для фазы параметра спаривания $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta| e^{i\varphi}$. Уравнения справедливы в области $|\Delta| \gg \varepsilon_F A^{-1/2}$, $\partial\varphi/\partial r \ll 1/\xi$ (ξ — корреляционная длина). Вычислен вклад спаривательного взаимодействия в поверхностную энергию ядра в гидродинамическом пределе.

1. Введение

Коллективные возбуждения в обобщенной модели ядра описываются безвихревым течением идеальной жидкости в объеме, ограниченном поверхностью

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{h\mu} \alpha_{h\mu}(t) Y_{h\mu}(\theta, \varphi) \right) \quad (1)$$

(R_0 — радиус сферического ядра, $\alpha_{h\mu}$ — параметры формы ядра). Гидродинамические уравнения для потенциала поля скоростей имеют вид

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{dR}{dt}. \quad (2a)$$

Микроскопический вывод этих уравнений и является целью настоящей работы. Покажем, что (2) имеет место в случае экстремально сильного спаривания

$$\varepsilon_F > \Delta \gg \omega \quad (3)$$

(Δ — параметр куперовского спаривания, ε_F — энергия Ферми, а $\omega \approx \varepsilon_F A^{-1/2}$ — расстояние между ядерными оболочками) и малости градиентов $\Delta(\mathbf{r})$ на корреляционной длине $\xi \sim \sqrt{\varepsilon_F} / |\Delta|$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial r} \ll \frac{\Delta}{\xi}. \quad (3a)$$

При этом фаза $\Delta(\mathbf{r})$ ($\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta| e^{i\varphi(\mathbf{r})}$) имеет смысл потенциала поля скоростей. Условие (3) имеет простой физический смысл — радиус парной корреляции $\xi \sim \sqrt{\varepsilon_F} / \Delta$ должен быть много меньше размеров системы, т. е.

$$\xi \sim \frac{\sqrt{\varepsilon_F}}{\Delta} \ll R, \quad \Delta \gg \frac{\sqrt{\varepsilon_F}}{R} = \frac{\varepsilon_F}{\sqrt{\varepsilon_F} R^2} \sim \varepsilon_F A^{-1/2}.$$

Зависимость параметра спаривания Δ от координат является следствием градиентной инвариантности спаривательного взаимодействия, которая имеет принципиальное значение для перехода к гидродинамике [1].

Следует подчеркнуть, что для реальных ядер ($\Delta \sim \varepsilon_F A^{-2/3}$, $\xi \sim R A^{1/3} \gg R$, а параметр спаривания Δ меняется в общем случае на порядки) приближения (3) непригодны. Тем не менее, нахождение только методический интерес. Известно, что некоторые величины (например, жесткость ядра по отношению к деформации) определяются суммарными, существенный вклад в которые вносят далекие от границы Ферми одночастичные состояния. Поэтому вычисление таких сумм в приближении скалярного предела, можно перенормировать эти суммы, выделив тем самым так называемую оболочечную поправку, сильно меняющуюся от ядра к ядру. К сожалению, решить эту задачу в полном объеме, т. е. с учетом взаимодействия в обоих каналах, не удается. В настоящей работе мы рассмотрим простейший случай — гидродинамический предел при учете только спаривательного взаимодействия.

Гидродинамические уравнения для сверхтекучего ферми-газа были получены в работе [2]. В отличие от [2] для конечной ферми-системы необходимо получить граничное условие (2a). Кроме того, метод вычислений, использованный в работе [2], в нашем случае непригоден ввиду отсутствия в ядре трансляционной симметрии.

2. Основные уравнения

Будем исходить из уравнений Горькова [3] для функций Грина G и F^+ ($\hbar = m = 1$):

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; t|t') - i\Delta(\mathbf{r}, t) F^+(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; t|t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (4)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + H - 2\mu \right) F^+(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; t|t') + i\Delta^*(\mathbf{r}, t) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; t|t') = 0;$$

$$\Delta^*(\mathbf{r}, t) = g F^+(\mathbf{r}|\mathbf{r}; t|t').$$

Здесь $H = (\mathbf{p}^2/2) + U(\mathbf{r})$ — оболочечный гамильтониан ядра, μ — химический потенциал системы, $g < 0$ — константа δ -функционального спаривательного взаимодействия.

Исключая G из системы (4), находим уравнение для F^+ :

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - H^2 - |\Delta|^2 \right) F^+ &= -i\Delta^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') - \\ &- \left\{ \left[i \frac{\partial}{\partial t}; H \right] + \Delta^* \left[\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right); \frac{1}{\Delta^*} \right] \left(i \frac{\partial}{\partial t} + H \right) \right\} F^+ \equiv \\ &\equiv -i\Delta^* \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') + N(\mathbf{r}, t) F^+. \end{aligned} \quad (5)$$

Член в фигурных скобках в правой части (5) пропорционален производным $\Delta(\mathbf{r}, t)$, и мы будем рассматривать его по теории возмущений¹⁾.

В первом, исчезающем приближении поправки от производных модуля Δ и ее фазы ($\Delta = |\Delta| e^{i\varphi}$) аддитивны, поэтому рассмотрим их отдельно.

3. Уравнение для фазы $\Delta(\mathbf{r})$ ($|\Delta| = \text{const}$)

Введем вспомогательную функцию Грина $f(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; t|t')$ согласно

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; t|t') = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - H^2 - |\Delta|^2 \right)^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (6)$$

¹⁾ Учет адиабатической зависимости H от времени необходим для вывода граничного условия (2a).

Разлагая f в интеграл Фурье по $\tau = t - t'$ и используя представление собственных функций $H(H\varphi_\lambda = \varepsilon_\lambda \varphi_\lambda)$, имеем²⁾

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} \sum_{\lambda} \frac{\varphi_{\lambda}(\mathbf{r}) \varphi_{\lambda}^*(\mathbf{r}')}{\omega^2 - E_{\lambda}^2}, \quad (7)$$

$$E_{\lambda} = \sqrt{\varepsilon_{\lambda}^2 + |\Delta|^2}.$$

В первом порядке по (7) поправка к F^+ равна

$$F^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \int d\mathbf{r}'' f(\mathbf{r}|\mathbf{r}''; t|t'') N(\mathbf{r}'', t'') F^{(0)}(\mathbf{r}''|\mathbf{r}'; t''|t'), \quad (8)$$

где

$$F^{(0)} = -i\Delta^*(\mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; t-t'). \quad (9)$$

Опуская простые вычисления, выпишем уравнение для $\Delta(\mathbf{r})$:

$$\rho_F \ln \frac{|\Delta|}{\Delta_0} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2 i} \sum_{\lambda\lambda'} \frac{\varphi_{\lambda}(\mathbf{r}) \varphi_{\lambda'}^*(\mathbf{r})}{(\omega^2 - E_{\lambda}^2)(\omega'^2 - E_{\lambda'}^2)} e^{-i(\omega-\omega')t} \times$$

$$\times \left(\lambda\omega \left| -i \frac{\partial H}{\partial t} + \Delta^* \left[H; \frac{1}{\Delta^*} \right] (\omega' + H) \right| \lambda'\omega' \right). \quad (10)$$

Здесь символом $(\lambda\omega | \dots | \lambda'\omega')$ обозначена величина

$$(\lambda\omega | \dots | \lambda'\omega') = \int d\mathbf{r} \varphi_{\lambda}^*(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \dots e^{-i\omega' t} \varphi_{\lambda'}(\mathbf{r});$$

ρ_F — плотность одночастичных уровней в ядре, а величина Δ_0 удовлетворяет уравнению

$$1 = \frac{|g|}{\Omega} \sum_{\lambda} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_{\lambda}^2 + \Delta_0^2}}$$

(Ω — объем ядра). Чтобы получить уравнение для фазы $\Delta(\mathbf{r})$, вычтем из уравнения (10) ему комплексно сопряженное; тогда

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda\lambda'} \frac{\varphi_{\lambda}(\mathbf{r}) \varphi_{\lambda'}^*(\mathbf{r})}{(\omega^2 - E_{\lambda}^2)(\omega'^2 - E_{\lambda'}^2)} e^{-i(\omega-\omega')t} \times$$

$$\times \left(\lambda\omega \left| \frac{\partial H}{\partial t} + [H; [H; \varphi(\mathbf{r})]] \right| \lambda'\omega' \right) = 0. \quad (11)$$

Легко видеть, что (11) при выполнении условий (3) представляет собой фурье-разложение по \mathbf{r} и t величины

$$\frac{\partial U}{\partial t} - (\nabla U)(\nabla \varphi) + \frac{p_F^2}{3} \nabla^2 \varphi. \quad (11a)$$

Действительно, переходя в (11) к интегрированию по ω и $\varepsilon = \omega - \omega'$ и считая, что параметры $\alpha_{\lambda\lambda'}(t)$ оболочечного потенциала $U(\mathbf{r}; \alpha(t))$ мало меняются за время $\sim 1/|\Delta|$, находим, пренебрегая членами типа $(\nabla \varphi)^2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{2\pi} e^{-i\varepsilon t} \sum_{\lambda\lambda'} \frac{\varphi_{\lambda} \varphi_{\lambda'}^*}{E_{\lambda} E_{\lambda'} (E_{\lambda} + E_{\lambda'})} \left(\lambda\omega \left| \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} p_i p_i \right| \lambda'\omega' \right) = 0. \quad (12)$$

²⁾ Здесь и ниже энергия одночастичных уровней ε_{λ} отсчитана от химического потенциала μ .

Для решения этого уравнения воспользуемся квазиклассическим методом Митгала [4]. Недиagonalные матричные элементы в (12) отличны от нуля для переходов между состояниями с разностью энергий $|\varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda'}| \sim \varepsilon_F A^{-1/2}$ и при фиксированной разности $\lambda - \lambda'$ слабо зависят от энергии. Величина $1/E_{\lambda} E_{\lambda'} (E_{\lambda} + E_{\lambda'})$, определяющая ширину области суммирования, при этом условии имеет максимум шириной $\sim |\Delta| \gg |\varepsilon_{\lambda} - \varepsilon_{\lambda'}|$. Поэтому, используя квазиклассические оценки [4, 5]

$$\varphi_{\lambda}(\mathbf{r}) \sim \exp\left(i \int^{\mathbf{r}} p_{\lambda}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'\right), \quad \frac{p_{\lambda}^2}{2} + U(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\lambda},$$

$$\sum_{\lambda+\lambda'} \frac{p_{\lambda} p_{\lambda'}}{E_{\lambda} E_{\lambda'} (E_{\lambda} + E_{\lambda'})} \approx \frac{\delta_{\lambda\lambda'}}{3} \frac{1}{p_F^2 |\Delta|^2}, \quad (13)$$

$$\sum_{\lambda+\lambda'} \frac{1}{E_{\lambda} E_{\lambda'} (E_{\lambda} + E_{\lambda'})} = \frac{1}{|\Delta|^2} + o\left(\left(\frac{\varepsilon_{\lambda} + \varepsilon_{\lambda'}}{|\Delta|}\right)^2\right),$$

окончательно находим

$$\sum_{\lambda\lambda'} \varphi_{\lambda}(\mathbf{r}) \left\langle \lambda \left| \frac{\partial H}{\partial t} - (\nabla U)(\nabla \varphi) + \frac{p_F^2}{3} \nabla^2 \varphi \right| \lambda' \right\rangle \varphi_{\lambda'}^*(\mathbf{r}) \approx 0. \quad (14)$$

Первые два члена в (14a) отличны от нуля только на границе ядра R (для оболочечного потенциала с резким краем):

$$\frac{\partial U}{\partial r} \sim \delta(r-R), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial(r-R)} \frac{dR}{dt},$$

поэтому (14a) эквивалентно системе гидродинамических уравнений (2).

4. Вклад спаривательного взаимодействия в поверхностную энергию ядра в гидродинамическом пределе

Интересующая нас добавка в полную энергию ядра от спаривательного взаимодействия определяется средним значением $|\Delta(\mathbf{r})|^2$ по объему ядра Ω :

$$\delta E = - \frac{1}{|g|} \int_{(\Omega)} d\mathbf{r} |\Delta(\mathbf{r})|^2 = - \frac{1}{|g|} \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{r}}{\Omega} n(\mathbf{r}) |\Delta(\mathbf{r})|^2, \quad (15)$$

где $n(\mathbf{r})$ — безразмерная плотность ядра

$$\int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \Omega.$$

В нулевом приближении по $[|\Delta|; H]$ имеем обычное уравнение [6]

$$1 = |g| \sum_{\lambda} \frac{|\varphi_{\lambda}(\mathbf{r})|^2}{2\sqrt{\varepsilon_{\lambda}^2 + |\Delta|^2}}. \quad (16)$$

Интегрируя по энергии ε_{λ} и суммируя по остальным квантовым числам, находим³⁾ ($\eta = \Omega/|g| \rho_F \equiv 1/G\rho_F$)

$$|\Delta(\mathbf{r})| = \Delta_0 \exp\left(\eta \frac{n(\mathbf{r}) - 1}{n(\mathbf{r})}\right). \quad (17)$$

Чтобы отделить в $\delta E = \delta E_{\sigma} + \delta E_{\Omega}$ поверхностный вклад, запишем (15) в виде

$$\delta E \equiv - \frac{\Delta_0^2}{G} + \frac{\Delta_0^2}{G} \int \frac{d\mathbf{r} n(\mathbf{r})}{\Omega} \left(1 - \exp\left(2\eta \frac{n(\mathbf{r}) - 1}{n(\mathbf{r})}\right) \right). \quad (18)$$

³⁾ Формула (17) справедлива только в случае $|\Delta| \gg \varepsilon_F A^{-1/2}$, когда $\sum |\varphi_{\lambda}(\mathbf{r})|^2$ по интервалу шириной $\sim |\Delta|$ практически совпадает с плотностью ядра.

Последний член в (18) и представляет собой поверхностную энергию δE_s . Интеграл в (18) вычисляется методом перевала ($n(r)$ полагается сферически-симметричной функцией), и окончательно имеем

$$\delta E_s = 4\pi\beta x^2; \quad (19)$$

$x \leq R$ — точка перевала, определяемая из уравнения

$$2\eta = n(x) \left[\exp \left(2\eta \frac{1-n(x)}{n(x)} \right) - 1 \right],$$

а коэффициент поверхностного натяжения $\beta > 0$ равен

$$\beta = \frac{\Delta_0^2}{4G} \frac{1}{R^3} \frac{n(x)}{|dn(x)/dx|} \sqrt{\frac{n(x)}{\pi\eta}}. \quad (20)$$

Заключение

Решенная в настоящей работе задача до некоторой степени тривиальна, так как в ней не учтены взаимодействие по каналу частица — дырка и столкновения. Известно, однако, что гидродинамический режим реализуется и в нормальной ферми-системе, в том случае, когда частые столкновения разрушают когерентную реакцию системы на внешнее поле [7]. Поэтому коэффициент поверхностного натяжения в гидродинамическом пределе определяется не только формулой (20), но и частично-дырочным взаимодействием [8]. Решение этой задачи для конечных ядер представляет большой интерес, поскольку такой макроскопический предел можно использовать для перенормировки сумм по одночастичным состояниям в микроскопической теории, т. е. для выделения так называемой оболочечной поправки.

Я благодарен С. Т. Беляеву за полезные обсуждения.

Литература

- [1] S. T. Belyaev. Selected Topics in Nucl. Theory, IAEA, Vienna, 1963, p. 291.
- [2] М. П. Кемоклидзе, Л. П. Пятаевский. ЖЭТФ, 50, 243, 1966.
- [3] Л. П. Горьков. ЖЭТФ, 34, 735, 1958.
- [4] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 37, 249, 1959.
- [5] Ю. Т. Гринь, А. И. Ларкин. ЯФ, 2, 40, 1965.
- [6] А. Б. Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер, «Наука», 1965.
- [7] Д. Пайнс, Ф. Нозьер. Теория квантовых жидкостей, «Мир», 1967, стр. 157.
- [8] P. J. Feibelman. Ann. of Phys., 48, 369, 1968.

HYDRODYNAMICAL LIMIT FOR FINITE FERMI-SYSTEMS

V. A. RUMYANTSEV

Hydrodynamical equations for the phase of the pairing parameter $\Delta(r) = |\Delta|e^{i\varphi}$ are deduced in framework of superfluid nuclear model. The equations are valid in the region $|\Delta| \gg \varepsilon_F A^{-1/2}$, $\partial\varphi/\partial r \ll 1/\xi$ (ξ — is correlation length). The contribution of the pairing interaction into the surface energy of nucleus is calculated within hydrodynamical limit.

О ЗАВИСИМОСТИ СЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОВЗБУЖДЕНИЯ ЛЕГКИХ ЯДЕР ОТ ВЫБОРА СХЕМЫ СВЯЗИ

В. К. ТАРТАКОВСКИЙ, А. В. ФУРСАЕВ

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

(Поступила в редакцию 23 июля 1971 г.)

Рассматривается влияние схемы связи в легких ядрах с заполняющейся $1p$ -оболочкой на поведение сечения электровозбуждения некоторых низколежащих уровней ядер. При переходе от ls -связи к промежуточной связи зависимости дифференциальных сечений от угла рассеяния электрона в переходах $C2$, $E2$ и $M3$ меняются только по величине и сильно изменяются также и по форме в переходах $M1$. Показано, что в некоторых случаях угловая зависимость сечения рассеяния электронов весьма чувствительна к малым изменениям в схеме ядерной связи.

Изучение электровозбуждения атомных ядер дает возможность предсказывать природу квантовых переходов в ядрах, характеристики их основных и возбужденных состояний, некоторые особенности структуры ядер в этих состояниях [1-5]. Определенный интерес представляет вопрос о влиянии выбора схемы связи при описании легких ядер на поведение дифференциального сечения неупругого рассеяния электронов высоких энергий ядрами, сопровождающегося возбуждением дискретных уровней энергии ядер. Мы рассмотрим здесь электровозбуждение некоторых низколежащих уровней ряда ядер $1p$ -оболочки, которые будем описывать многочастичной оболочечной моделью [5, 6]. Дифференциальные сечения рассчитываются в борновском приближении с использованием промежуточной связи и ls -связи и проводится сравнение результатов в этих двух случаях.

Используя мультипольные разложения, дифференциальное сечение электровозбуждения ядра $d\sigma/d\Omega$, усредненное по начальным и просуммированное по конечным спиновым состояниям электрона и ядра, выразим через приведенные вероятности переходов $B(\lambda, q, I \rightarrow I')$, содержащие в себе всю информацию о структуре ядра ($\hbar = c = 1$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{d\sigma_{C\lambda}}{d\Omega} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{d\sigma_{E\lambda}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{M\lambda}}{d\Omega} \right), \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_{C\lambda}}{d\Omega} = \sigma_M \frac{4\pi q^{2\lambda}}{[(2\lambda+1)!!]^2} B(C\lambda, q, I \rightarrow I'), \quad \sigma_M = \frac{e^4}{4k^2} \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (2)$$

$$\frac{d\sigma_{Q\lambda}}{d\Omega} = \sigma_M \left(\operatorname{tg}^2(\theta/2) + \frac{1}{2} \right) \frac{4\pi q^{2\lambda} (\lambda+1)}{[(2\lambda+1)!!]^2} B(Q\lambda, q, I \rightarrow I'), \quad Q = E, M. \quad (3)$$

Здесь мы использовали также тот факт, что энергия возбуждения ядра значительно меньше энергии падающего электрона k , которую мы в численных расчетах будем полагать равной 200 Мэв. Считая, что рассматриваемые низколежащие состояния легких ядер связаны с переходами