Длины $\pi\pi$-рассеяния оказались малыми. Это согласуется с результатами для $\pi\pi$-рассеяния, полученными в рамках алгебры токов [11]. Длины πK-рассеяния согласуются с результатами, полученными на основе алгебры токов в [14], и находятся в рамках теоретических результатов, приведенных в работе [15]. Длины KK-рассеяния согласуются с результатами [2].

Существенно подчеркнуть, что нарушение внесло в рассматриваемые процессы PP-рассеяния вклад, сравнимый с вкладом от инвариантного лагранжиана.

Вообще говоря, длины PP-рассеяния зависят от вида нарушения (см. [16]). Обобщая же результаты [17] на группу $SU(3)\times SU(3)$, легко показать, что нарушающий симметрию член вида $u_0 + cu_8$ с u_i, определенными в (3) и (4), не зависит от переопределения псевдоскалярных полей $P_i = \overset{*}{P}_i\varphi(\overset{*}{P}{}^2)$, в отличие от нарушения, которое приводит к PCAC.

Нарушение существенно улучшило $a_1(KN)$-предсказание, которое близко к экспериментальному значению, в отличие от [3, 4].

Укажем, что в работе [18] в рамках кварковой модели были получены отношения длин PB- и BB-рассеяния, но $a_1(KN)$- предсказания не согласуются с экспериментом.

Полученные нами длины $\pi\Sigma$, $\pi\Xi$, $\pi\Lambda$ близки к результатам, полученным в алгебре токов [3, 4].

Авторы искренне благодарны В. Н. Гулию и В. В. Кухтину за плодотворные обсуждения.

Литература

[1] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, B. Rener. Phys. Rev., 175, 2195, 1968.
[2] J. Gronin. Phys. Rev., 161, 1483, 1967.
[3] L. Turner. Nucl. Phys., B11, 355, 1969.
[4] K. R. Tomazava. Nuovo Cim., 44, 707, 1966.
[5] V. I. Sabo, Yu. M. Lomsadze. Preprint ITP-69-82, K., 1969.
[6] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino. Phys. Rev., 177, 2239, 1969; 177, 2247, 1969.
[7] Д. В. Волков. Письма ЖЭТФ, 7, 385, 1968.
[8] В. И. Сабо. УФЖ, 14, 1084, 1969.
[9] Y. M. Lam, Y. Y. Lee. Phys. Rev. Lett., 23, 734, 1969; Phys. Rev., D2, 2976, 1970.
[10] H. Koyama. Progr. Theor. Phys., 35, 1057, 1966.
[11] S. Weinberg. Phys. Rev. Lett., 17, 616, 1966.
[12] J. Hamilton, W. S. Woolcock. Rev. Mod. Phys., 35, 737, 1963.
[13] V. J. Stenger et al. Phys. Rev., 134, B1111, 1964.
[14] L. Micu. Preprint JINR E2-3793, 1968.
[15] П. С. Исаев. Препринт Р2-4375, ОИЯИ, 1969.
[16] S. Weinberg. Phys. Rev., 166, 1568, 1968.
[17] C. G. Liu, Y. Chow. Nuovo. Cim., 1A, 369, 1971.
[18] М. П. Рекало. ЯФ, 8, 575, 1969.

BARYONS AND PSEUDO-SCALAR MESONS IN BROKEN NON-LINEAR CHIRAL $SU(3)\times SU(3)$-DYNAMICS

M. I. GAYSAK, V. Ya. SABO

A Lagrangian, invariant with respect to non-linear chiral transformation of $SU(3)\times SU(3)$ group is violated by the term, which is a combination of zero- and eighth components of $(3,3^*)\oplus(3^*,3)$-representation. On the basis of the violated Lagrangian s- and p-wave lengths of PP- and PB-scatterings have been calculated. They are in a good accordance with available experimental data. These results are compared with the results, obtained in the framework of another approaches.

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 16, вып. 1, 1972

ХРОНОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ОДНОВРЕМЕННЫЕ КОММУТАТОРЫ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. И. ВАЙНШТЕЙН, В. В. СОКОЛОВ

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

(Поступила в редакцию 20 января 1972 г.)

В рамках теории возмущений на простых примерах рассматривается указанная Бьёркеном, Джонсоном и Лоу теорема, связывающая T-произведения и одновременные коммутаторы. В случаях, когда матричные элементы T-произведения и одновременного коммутатора конечны, эта теорема всегда справедлива. Однако одновременные коммутаторы не совпадают, вообще говоря, с «наивными» и зависят от вида взаимодействия. Показано, что одновременные перестановочные соотношения полевых операторов остаются каноническими. Другие одновременные коммутаторы могут быть в принципе вычислены с помощью канонических перестановочных соотношений при учете сингулярного характера произведений полевых операторов в совпадающих точках. Показано также, что использование фейнмановских правил при вычислении T-произведений приводит в некоторых случаях к неправильному результату, что связано с неприменимостью теоремы Вика для формально расходящихся диаграмм.

1. Введение

Бьёркен [1] и Джонсон и Лоу [2] указали, что асимптотика матричного элемента от хронологического произведения двух операторов

$$T = -i\int dx\, e^{ipx}\langle b|TA(x)B(0)|a\rangle = -i\int dx\, e^{ipx}\langle b|\theta(x_0)A(x)B(0)+\theta(-x_0)B(0)A(x)|a\rangle \qquad (1)$$

при $p_0\to\infty$ и фиксированном $\mathbf{p}$ определяется одновременным коммутатором этих операторов. Действительно, интегрируя в (1) по частям, получаем

$$T = \frac{1}{p_0}\int dx\, e^{ipx}\delta(x_0)\langle b|[A(x),B(0)]|a\rangle + \frac{1}{p_0}\int dx\, e^{ipx}\langle b|T\dot{A}(x)B(0)|a\rangle, \qquad (2)$$

откуда следует, во-первых, что величина T в рассматриваемом пределе падает, и, во-вторых, что

$$\lim_{\substack{p_0\to\infty\\ \mathbf{p}-\text{fixed}}} p_0 T = \int dx\, e^{ipx}\delta(x_0)\langle b|[A(x),B(0)]|a\rangle. \qquad (3)$$

Теорема Бьёркена, Джонсона и Лоу (БДЛ) дает на первый взгляд удобный способ отыскания асимптотик амплитуд, поскольку априори можно ожидать, что одновременные коммутаторы не зависят от вида сильных взаимодействий.

В ряде работ [3–5] соотношение (3) проверялось в рамках теории возмущений в различных полевых моделях сильного взаимодействия. Было, в частности, показано [3], что для выполнения теоремы БДЛ необходимо, чтобы матричные элементы как T-произведения, так и коммутатора были конечными. Легко понять, что этот критерий является также и достаточным.

Однако и в случае конечности всех величин оказалось, что одновременный коммутатор в (3) не совпадает, вообще говоря, с «наивным», т. е. вычисленным с помощью формального применения канонических перестановочных соотношений. Несовпадение асимптотики T-произведения с матричным элементом «наивного» коммутатора рассматривалось в работах [4, 5] как нарушение теоремы БДЛ, хотя, строго говоря, соотношение (3) не нарушается и проблема состоит в отличии коммутатора от «наивного». Причина этого отличия заключается в сингулярном характере операторов A и B, являющихся произведениями полевых операторов в совпадающих точках. Классическим примером такого рода может служить коммутатор компонент плотности векторного тока фермионов, на несовпадение которого с «наивным» указал Швингер [6].

В работе Джакива и Препараты [4] рассматривалась асимптотика фермионного пропагатора, которая определяется по теореме БДЛ вакуумным матричным элементом антикоммутатора $\delta(x_0)\langle 0|\{\psi(x), \bar\psi(0)\}|0\rangle$. В модели сильных взаимодействий, переносимых нейтральным векторным мезоном, этот пропагатор во втором порядке по константе связи в калибровке Ландау конечен. Тем не менее его асимптотика оказалась отличной от предсказываемой соотношением (3) и каноническими перестановочными соотношениями. В обсуждаемом случае нельзя объяснить возникающее противоречие сингулярным характером коммутируемых операторов. Более того, нарушение канонических перестановочных соотношений, допускаемое авторами [4], поставило бы под сомнение логическую непротиворечивость теории поля. К тому же оно лишило бы нас возможности непосредственного вычисления и других одновременных коммутаторов.

В следующем разделе будет показано, что причина отмеченного противоречия заключается, в действительности, в неправильном вычислении T-произведения. Использование правил Фейнмана для нахождения функции Грина приводит к неправильному результату, что связано с неприменимостью теоремы Вика в случае формально расходящихся диаграмм (даже если результат конечен).

В третьем разделе рассмотрены примеры коммутаторов, которые не совпадают с «наивными». Показано, что после учета сингулярного характера произведений полевых операторов использование канонических перестановочных соотношений приводит к согласующемуся с теоремой (3) результату.

2. Асимптотика массового оператора фермиона и канонические перестановочные соотношения

Рассмотрим асимптотику фермионной функции Грина

$$G(p) = -i\int dx\, e^{ipx}\langle 0|T\psi(x)\bar\psi(0)|0\rangle \tag{4}$$

во втором порядке теории возмущений в модели сильных взаимодействий, переносимых нейтральным векторным мезоном массы μ. Массу фермионного поля всюду в этой статье будем полагать для простоты равной нулю.

Так как во втором порядке теории возмущений в калибровке Ландау функция Грина $G(p)$ конечна, то в соответствии со сказанным выше можно ожидать, что в силу теоремы БДЛ

$$\lim_{p_0\to\infty} \hat{p}G(p) = \gamma_0\int dx\, e^{ipx}\delta(x_0)\langle 0|\{\psi(x), \bar\psi(0)\}|0\rangle = 1. \tag{5}$$

В последнем равенстве использовано каноническое перестановочное соотношение

$$\delta(x_0)\ \{\psi(x),\ \bar\psi(0)\} = \gamma_0\delta^4(x). \tag{6}$$

С другой стороны,

$$G(p) = 1/(\hat{p} - \Sigma(p)), \tag{7}$$

где во втором порядке по константе связи

$$\Sigma(p) = -ig^2\int dx\, e^{ipx}\langle 0|TJ(x)J(0)|0\rangle, \tag{8}$$

причем фермионный ток $J(x) = \hat{A}(x)\psi(x)$, а полевые операторы $A(x)$, $\psi(x)$ являются операторами свободных полей. С помощью теоремы Вика выражение (8) приводится к виду

$$\Sigma(p) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int dk\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2-\mu^2}\gamma_\mu\frac{1}{\hat{p}-\hat{k}}\gamma_\nu, \tag{9}$$

что отвечает обычной диаграмме Фейнмана для массового оператора фермиона.

Вычисляя после фейнмановской параметризации интеграл по k и производя замену переменной в интеграле по фейнмановскому параметру, получаем после некоторых преобразований

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{\pi}\hat{p}\left\{\int_0^\infty d\varkappa^2\frac{\varkappa^2\sigma(\varkappa^2)}{p^2-\varkappa^2+i\varepsilon} + \int_0^\infty d\varkappa^2\sigma(\varkappa^2)\right\} =$$

$$= \frac{g^2}{\pi}\hat{p}\left\{\int_0^\infty d\varkappa^2\frac{\varkappa^2\sigma(\varkappa^2)}{p^2+\varkappa^2+i\varepsilon} - \frac{3}{32\pi}\right\}, \tag{10}$$

$$\sigma(\varkappa^2) = -\frac{3}{32\pi}\frac{\mu^2}{\varkappa^2}\frac{1}{\varkappa^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\varkappa^2}\right)\theta(\varkappa^2-\mu^2) -$$

$$-\frac{1}{32\pi\mu^2}[\theta(\varkappa^2)-\theta(\varkappa^2-\mu^2)].$$

При $p_0\to\infty$ первое слагаемое в правой части равенства (10) падает, так что

$$\lim_{p_0\to\infty}\Sigma(p) = -(3g^2/32\pi^2)\hat{p}. \tag{11}$$

Поэтому для функции Грина получаем [4]

$$\lim_{p_0\to\infty}\hat{p}G(p) = (1-3g^2/32\pi^2) \tag{12}$$

в противоречии с соотношением (5). Поскольку в соответствии со сказанным во Введении считаем, что асимптотика T-произведения определяется одновременным антикоммутатором операторов ферми-полей, мы должны были бы допустить, что [4]

$$\delta(x_0)\langle 0|\{\psi(x),\ \bar\psi(0)\}|0\rangle = \gamma_0(1-3g^2/32\pi^2)\delta^4(x) \tag{13}$$

находится в противоречии с каноническим перестановочным соотношением (6).

Причина возникающего расхождения заключается в неправильном вычислении величины $\Sigma(p)$. В самом деле, массовый оператор $\Sigma(p)$, который выражается через T-произведение операторов J и является в нашем случае конечным, должен падать[1] при $p_0 \to \infty$. Между тем из (11) видно, что это не так.

Таким образом, нарушение теоремы БДЛ возникло уже при вычислении $\Sigma(p)$. Более того, результат (10) не является даже однозначным. В самом деле, хотя $\Sigma(p)$ и является в калибровке Ландау конечной величиной, интеграл по импульсу в (9) формально линейно расходится. Поэтому, сделав, например, сдвиг переменной интегрирования $p \to p + k$, мы получим выражение

$$\Sigma(p) = \frac{g^2}{\pi}\hat{p}\int d\varkappa^2 \frac{\varkappa^2\sigma(\varkappa^2)}{p^2 - \varkappa^2 + i\varepsilon}, \tag{14}$$

отличающееся от (10) полиномом. Теперь $\Sigma(\infty) = 0$ и никаких противоречий с каноническими перестановочными соотношениями не возникает.

Покажем, что правильное выражение для $\Sigma(p)$ совпадает с (14). Действительно, в соответствии с использованным при доказательстве теоремы БДЛ определением T-произведения следует вычислить сначала произведения операторов и лишь затем учесть θ-функции. В нашем случае это дает

$$\Sigma(p) = -ig^2\int dx\, e^{ipx}\{\theta(x_0)\gamma_\mu iS^{(+)}(x)\gamma_\nu i\Delta_{\mu\nu}^{(+)}(x) +$$

$$+ \theta(-x_0)\gamma_\nu iS^{(-)}(x)\gamma_\mu i\Delta_{\mu\nu}^{(-)}(x)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon}\tilde{\Sigma}(p,\tau), \tag{15}$$

где

$$\tilde{\Sigma}(p,\tau) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int dk\{\gamma_\mu iS^{(+)}(p + n\tau - k)\gamma_\nu i\Delta_{\mu\nu}^{(+)}(k) +$$

$$+ \gamma_\nu iS^{(-)}(p - n\tau - k)\gamma_\mu i\Delta_{\mu\nu}^{(-)}(k)\}, \tag{16}$$

и мы воспользовались фурье-представлением ступенчатой функции

$$\theta(x_0) = \theta(nx) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\frac{\exp i\tau nx}{\tau - i\varepsilon} \tag{17}$$

(n — единичный времениподобный вектор $n_\mu = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$, $S^{(\pm)}(x)$, $\Delta_{\mu\nu}^{(\pm)}(x)$ — положительно- и отрицательно-частотные части перестановочных функций фермионного и бозонного полей).

Интеграл (16) сходится и определен однозначно. По существу, он совпадает с мнимой частью массового оператора, так что (15) сразу дает спектральное представление для $\Sigma(p)$. Сделав после вычисления $\tilde{\Sigma}(p,\tau)$ замену переменной в интеграле по параметру τ, однозначным образом приходим к результату, совпадающему с (14).

Проведенное рассмотрение показывает, что использование теоремы Вика в случаях, когда диаграмма хотя бы формально расходится, приводит к неправильному результату. Дело в том, что применяемые при ее выводе равенства типа $\theta(x_0)\theta(-x_0) = 0$, $\theta(x_0) + \theta(-x_0) = 1$ оказываются несправедливыми, если они интегрируются с достаточно сингулярной при $x_0 = 0$ функцией.

3. «Ненаивные» коммутаторы и канонические перестановочные соотношения

В этом разделе рассматриваются примеры «ненаивных» коммутаторов: $\delta(x_0)[\psi(x),\ j_\mu(0)]$ и $\delta(x_0)[J(x),\ j_\mu(0)]$ в использованной выше модели сильных взаимодействий. Показано, что при аккуратном обращении

[1] Хотя антикоммутатор $\delta(x_0)\langle 0|\{J(x),\ J(0)\}|0\rangle$ содержит в рассматриваемом случае логарифмическую расходимость, указанное свойство T-произведения сохраняется [2].

с сингулярными произведениями полевых операторов коммутаторы могут быть, в принципе, вычислены с помощью канонических перестановочных соотношений.

Коммутатор $\delta(x_0)[\psi(x),\ j_\mu(0)]$ определяет асимптотику амплитуды

$$F_\mu(p) = -i\int dx\, e^{ipx}\langle 0|T\psi(x)j_\mu(0)|p' = 0\rangle \tag{18}$$

при $p_0 \to \infty$. Для упрощения выкладок мы считаем 4-импульс начального фермиона равным нулю.

Найдем интересующие нас коммутаторы, вычислив величину $F_\mu(p)$. Как уже было отмечено, применение при вычислении T-произведений фейнмановских правил приводит, вообще говоря, к неправильному результату. Поэтому будем действовать так же, как при вычислении $\Sigma(p)$ (см. формулы (15) и (16)), т. е. представим $F_\mu(p)$ в виде

$$F_\mu(p) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon}[F_\mu^{(+)}(p + n\tau) + F_\mu^{(-)}(p - n\tau)], \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} F_\mu^{(+)}(p) &= \int dx\, e^{ipx}\langle 0|\psi(x)j_\mu(0)|p' = 0\rangle, \\ F_\mu^{(-)}(p) &= \int dx\, e^{ipx}\langle 0|j_\mu(0)\psi(x)|p' = 0\rangle. \end{aligned} \tag{20}$$

Величины $F_\mu^{(\pm)}(p)$, определяющие мнимую часть $F_\mu(p)$, вычислим, вставляя между операторами ψ и j_μ полный набор промежуточных состояний. Например, при вычислении с точностью до второго порядка величины $F_\mu^{(+)}$ существенны состояния с одним фермионом и с фермионом и бозоном[2]. Вклад двухчастичного промежуточного состояния вычисляется однозначно. Одночастичное же состояние дает

$$2\pi\delta(p^2)\theta(p_0)\sum_{\text{spin}}\langle 0|\psi(0)|p\rangle\langle p|j_\mu(0)|p' = 0\rangle, \tag{21}$$

причем входящие в (21) матричные элементы описываются диаграммами с петлями и требуют поэтому доопределения. В частности, величина $\langle 0|\psi(0)|p\rangle$ определяется массовым оператором фермиона и, как следует из результатов предыдущего раздела, равна

$$\langle 0|\psi(0)|p\rangle = Z^{1/2}u = (1 + 3g^2/32\pi^2)^{1/2}u. \tag{22}$$

Матричный элемент $\langle p|j_\mu(0)|p' = 0\rangle$ можно найти из требования сохранения векторного тока, приводящего к тому, что при $(p - p')^2 = 0$ этот матричный элемент не перенормируется:

$$\langle p|j_\mu(0)|p' = 0\rangle = \bar{u}(p)\gamma_\mu u(p' = 0). \tag{23}$$

В результате приходим к следующему выражению для $F_\mu(p)$:

$$\hat{p}F_\mu(p) = Z^{1/2}\gamma_\mu u + \frac{4g^2}{3\pi}(p^2\gamma_\mu - \hat{p}p_\mu)\int_0^\infty d\varkappa^2\frac{\sigma(\varkappa^2)}{p^2 - \varkappa^2 + i\varepsilon}u, \tag{24}$$

где $\sigma(\varkappa^2)$ — та же спектральная функция, что и в формуле (10).

[2] Мы не учитываем вклад диаграммы поляризации вакуума. Его можно исключить, считая ток j_μ изовекторным и рассматривая теорию, в которой фермионы с изоспином $^1/_2$ взаимодействуют с изоскалярным векторным мезоном.

Отметим, что прямое вычисление $F_\mu(p)$ по фейнмановским правилам приводит к формуле, отличающейся от (24) заменой Z на единицу.

Коммутатор $\delta(x_0)\langle 0|[\psi(x),\ j_\mu(0)]|p'=0\rangle$ можно теперь найти с помощью соотношения

$$\hat{p}F_\mu(p) = \gamma_0 \int dx e^{ipx}\delta(x_0)\langle 0|[\psi(x), j_\mu(0)]|p'=0\rangle -$$

$$- ig\int dx e^{ipx}\langle 0|TJ(x)j_\mu(0)|p'=0\rangle, \qquad (25)$$

где в силу теоремы БДЛ второе слагаемое в правой части при $p_0 \to \infty$ падает. Сравнивая в этом пределе (25) с (24), приходим к выводу, что

$$\int dx e^{ipx}\delta(x_0)\langle 0|[\psi(x), j_\mu(0)]|p'=0\rangle =$$

$$= \gamma_0\left[Z^{1/2}\gamma_\mu + (\gamma_\mu - n_\mu\hat{n})\frac{4g^2}{3\pi}\int_0^\infty d\varkappa^2\sigma(\varkappa^2)\right]u. \qquad (26)$$

Из формул (24) — (26) получаем также

$$T_\mu(p) = -i\int dx e^{ipx}\langle 0|TJ(x)j_\mu(0)|p'=0\rangle =$$

$$= \frac{4g}{3\pi}\left[(p^2\gamma_\mu - \hat{p}p_\mu)\int_0^\infty d\varkappa^2\frac{\sigma(\varkappa^2)}{p^2-\varkappa^2+i\varepsilon} - (\gamma_\mu - n_\mu\hat{n})\int_0^\infty d\varkappa^2\sigma(\varkappa^2)\right]u. \qquad (27)$$

Вычисление $T_\mu(p)$ по фейнмановским правилам не дает нековариантного второго слагаемого, в результате чего оказывается неправильным поведение $T_\mu(p)$ при $p_0 \to \infty$.

С помощью теоремы БДЛ находим из (27)

$$\int dx e^{ipx}\delta(x_0)\langle 0|[J(x), j_0(0)]|p'=0\rangle = -\frac{g}{8\pi^2}\mathbf{p}\gamma u, \qquad (28)$$

$$\int dx e^{ipx}\delta(x_0)\langle 0|[J(x), \mathbf{j}(0)]|p'=0\rangle = \frac{g}{8\pi^2}\mathbf{p}\gamma_0 u. \qquad (29)$$

Покажем теперь, как можно получить коммутаторы (26), (28), (29) с помощью канонических перестановочных соотношений. Формальное применение последних приводит к величине $Z^{1/2}\gamma_0\gamma_\mu u$ для коммутатора (26) и к нулевому результату в случае коммутаторов (28), (29). Таким образом, только коммутатор $\delta(x_0)[\psi(x),\ j_0(0)]$ совпадает с «наивным».

Такое вычисление не является, однако, корректным, поскольку мы имеем дело с сингулярными произведениями полевых операторов в совпадающих точках. Выясним на примере коммутатора (28), каким образом проявляется это обстоятельство. С помощью канонических перестановочных соотношений (6) находим

$$\delta(x_0)\langle 0|[J(x),\ j_0(0)]|p'=0\rangle =$$

$$= \delta^4(x)\langle 0|\hat{A}(x)\psi(0)|p'=0\rangle = \delta^4(x)I(x)u. \qquad (30)$$

Если в матричном элементе $\langle 0|\hat{A}(0,\ \mathbf{x})\psi(0)|p'=0\rangle$, учитывая множитель $\delta^3(\mathbf{x})$, положить $\mathbf{x}=0$, то получится матричный элемент фермионного источника $\hat{A}(0)\psi(0) = J(0)$ между вакуумом и одночастичным состоянием, который равен нулю. Однако произведение операторов $\hat{A}(x)\psi(0)$ носит при $\mathbf{x}\to 0$ сингулярный характер, и матричный элемент от него не интегрируется с δ-функцией. Действительно, в первом порядке теории возмущений при $x_0 = 0$, но $\mathbf{x} \neq 0$

$$I(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk e^{-ikx}I(k) = \frac{g}{(2\pi)^4}\int dk e^{i\mathbf{kx}}\gamma_\mu\frac{1}{\hat{k}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2-\mu^2}. \qquad (31)$$

В пределе $\mathbf{x}\to 0$ $I(x) \sim \gamma\mathbf{x}/\mathbf{x}^2$. Для получения явного вида сингулярности коммутатора удобно перейти в (31) к импульсному представлению. Оставляя интегрирование по импульсу, отвечающему функции $\delta^3(\mathbf{x})$ на самый конец вычислений, получаем в соответствии с (28)

$$\int dx e^{ipx}\delta(x_0)\langle 0|[J(x), j_0(0)]|p'=0\rangle =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int dq I(-q_0, \mathbf{p}-\mathbf{q})u = -\frac{g}{8\pi^2}\mathbf{p}\gamma u. \qquad (32)$$

Интеграл по q вычислялся в следующем порядке: сначала производилось интегрирование по q_0, а затем — по пространственным импульсам. Такая последовательность вычислений соответствует тому, что сначала мы полагаем $x_0 = 0$.

Использованный нами прием близок по духу к предложенной Швингером процедуре доопределения произведения операторов, но не требует введения дополнительного пространственноподобного вектора ε. Ясно, что такой прием дает возможность вычислить [7] без введения ε и швингеровский коммутатор компонент плотности векторного тока.

Что касается коммутатора $\delta(x_0)\langle 0|[\psi(x),\ j_0(0)]|p'=0\rangle$, то при его вычислении, в отличие от рассмотренного случая, никаких дополнительных сингулярностей не возникает и коммутатор остается «наивным».

При вычислении коммутаторов $\psi(x)$ и $J(x)$ с пространственными компонентами тока $j_m(0)$ необходимо учесть явную зависимость j_m от оператора векторного поля [6, 8]. Как показано в работе [9], соответствующие добавки к плотности тока и гамильтониану выражаются в представлении взаимодействия через повторные коммутаторы компонент плотности тока невзаимодействующих полей. Все возникающие одновременные коммутаторы можно вычислить обычным образом, но использование δ-функции от пространственных переменных следует, как это уже было ранее сделано, оставлять на самый конец вычислений. Довольно кропотливые преобразования, связанные с необходимостью раскрывать возникающие неопределенности, приводят к совпадающему с (26) и (29) результату.

Подчеркнем, что в случае временной компоненты плотности тока, являющейся генератором калибровочной группы, зависимость от векторного поля отсутствует.

Обратим внимание на аналогию между рассмотренным здесь коммутатором $\delta(x_0)\langle 0|[J(x),\ j_0(0)]|p'=0\rangle$ и коммутатором компонент плотности векторного тока $\delta(x_0)\langle 0|[j_m(x),\ j_0(0)]|0\rangle$. Отличие их от нуля обусловлено швингеровскими членами, исчезающими после интегрирования по пространственным переменным. Наличие последних и приводит в конечном счете к появлению «ненаивных» добавок в коммутаторах

$$\delta(x_0)\langle 0|[\psi(x),\ j_m(0)]|p'=0\rangle \quad \text{и} \quad \delta(x_0)\langle 0|[A_m(x),\ j_n(0)]|0\rangle.$$

4. Заключение

Результаты проделанных в этой статье вычислений показывают, что теорема БДЛ в теории возмущений, действительно, не нарушается, если ни T-произведение, ни соответствующий коммутатор не содержат расходимостей.

Разобранные примеры показывают также, что правила Фейнмана, даже при однозначно определенной, т. е. не содержащей петель, мнимой части, дают для T-произведения результат, справедливый лишь с точностью до полинома по импульсам, что связано с неприменимостью теоремы Вика в случае формально расходящихся диаграмм. В этих случаях правильный, падающий в пределе $p_0 \to \infty$ результат автоматически получается, если действовать в соответствии с определением хронологического произведения.

Когда же мнимая часть содержит петли, возникает вопрос об определении отвечающих этим петлям амплитуд. В рассмотренном во втором разделе примере такой амплитудой является величина $\Sigma(p)$, совпадающая с матричным элементом T-произведения фермионных источников и поэтому однозначно определенная условием падения при $p_0 \to \infty$.

Однако такая ситуация не является общей. Например, при рассмотрении функции Грина векторного поля во втором порядке возникает необходимость определения поляризационного оператора, который как известно, уже не совпадает с вакуумным матричным элементом T-произведения токов. Аналогичным образом, необходимый при вычислении F_μ матричный элемент $\langle p|j_\mu(0)|p'\rangle$ также не представляется в виде хронологического произведения

$$-ig \int dxe^{ipx}\langle 0|TJ(x)j_\mu(0)|p'\rangle.$$

Проведенное рассмотрение позволяет, в частности, устранить указанное в работе [4] противоречие между теоремой БДЛ и каноническими перестановочными соотношениями. Одновременные коммутаторы более сложных операторов можно, в принципе, вычислить с помощью этих соотношений. При этом необходимо учитывать сингулярный характер произведений полевых операторов и обусловленную этим обстоятельством явную зависимость тока от векторного поля. Такие одновременные коммутаторы оказываются существенно зависящими от взаимодействия и их вычисление является, вообще говоря, не менее сложной задачей, чем нахождение асимптотик соответствующих T-произведений.

Авторы приносят благодарность И. Б. Хрипловичу за полезные обсуждения.

Литература

[1] J. D. Bjorken. Phys. Rev., 148, 1467, 1966.
[2] K. Johnson, F. E. Low. Progr. Theor. Phys. Supll., 37—38, 74, 1966.
[3] А. И. Вайнштейн, Б. Л. Иоффе. Письма ЖЭТФ, 6, 917, 1967.
[4] R. Jackiw, G. Preparata. Phys. Rev. Lett., 22, 975, 1969; 22, 1162 (E), 1969; Phys. Rev., 185, 1748, 1969; 185, 1929, 1969.
[5] S. L. Adler, W.-K. Tung. Phys. Rev. Lett., 22, 978, 1969; Phys. Rev., 1D, 2846, 1970.
[6] J. Schwinger. Phys. Rev. Lett., 3, 296, 1959.
[7] Б. Л. Иоффе, В. А. Хозе. ЯФ, 13, 381, 1971.
[8] K. Johnson. Nucl. Phys., 25, 435, 1961.
[9] В. В. Соколов. ЯФ, 8, 559, 1968.

CHRONOLOGICAL PRODUCTS AND EQUAL-TIME COMMUTATORS IN PERTURBATION THEORY

A. I. VEINSTEIN, V. V. SOKOLOV

The Bjorken, Johnson and Low theorem that connects T-products and equal-time commutators is treated using simple examples in the framework of perturbation theory. In the cases, when matrix elements of T-product and of equal-time commutator are finite, this theorem is always valid. However, equal-time commutators do not coincide, generally speaking, with «naive» ones and depend on the king of interaction. It is shown, that equal-time commutation relations of field operators remain canonical. The other equal-time commutators may in principle be calculated with the help of canonical commutation relations, taking into account a singular character of the field operators product at the coinciding points. It is shown, that application of Feynman rules to calculations of T-products leads to wrong result in some cases. It is connected with inapplicability of the Wick theorem for formally diverging diagrams.

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
JOURNAL OF NUCLEAR PHYSICS
т. 16, вып. 1, 1972

ЗАДАЧА n ТЕЛ. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПЕРЕСТАНОВОК

М. С. КИЛЬДЮШОВ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

(*Поступила в редакцию 28 декабря 1971 г.*)

Для системы n тождественных частиц вычислены матричные элементы перестановок в базисе «деревьев».

Исследования системы n нуклонов в ядерной физике привели к построению k-гармоник — гармонических полиномов в $3(n-1)$-мерном пространстве. Основная трудность этой задачи состоит в том, что гиперсферические функции должны одновременно образовывать базис неприводимых представлений групп перестановок n элементов S_n и группы пространственных вращений O_3. Предложенная в [1] редукционная цепочка

$$\begin{array}{ccccccccc} O_{3(n-1)} \supset O_3 \otimes & O_{n-1} & \supset & O_{n-2} & \supset \ldots \supset & O_2 & & \\ & \cup & & \cup & & \cup & & \\ & S_n & \supset & S_{n-1} & \supset \ldots \supset & S_3 & \supset & S_2 \end{array} \qquad (1)$$

принципиально решает указанную задачу, однако математический аппарат нерегулярных вложений, встречающихся в данной редукции, развит очень слабо. В случае трех и четырех нуклонов, когда можно ограничиться гармониками с малыми значениями k, полиномы определенной симметрии, соответствующие редукции (1), были построены [1–3] и с их помощью вычислялась энергия связи Т, He^3, и He^4 [4, 5]. В работе [6] были построены гиперсферические функции для системы пяти частиц, соответствующие малым k, но уже в этом случае объем работы превзошел ожидания авторов.

Иной подход к построению k-гармоник был предложен в работе [7], где была предпринята попытка перехода от базиса трехчастичной задачи, построенного по методу «деревьев» [8], к k-гармоникам. В случае большего числа частиц это приводит к проблеме симметризации «деревьев», что осуществляется с помощью операторов Юнга. Однако для использования операторов Юнга необходимо знать, как преобразуются гиперсферические функции типа «деревьев» при перестановках частиц. В данной работе вычислены матричные элементы перестановок в базисе «деревьев».

Рассмотрим систему n тождественных частиц. Положим для простоты, что массы всех частиц равны единице. Пусть $\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — радиус-вектор i-й частицы. Выделим движение центра масс с помощью обычных координат Якоби:

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3), \qquad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$