

# ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛИЗАЦИИ HEAD-TAIL НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ АМПЛИТУДАХ КОГЕРЕНТНЫХ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Н.А.Винокуров, Г.Н.Кулпанов, Е.А.Переведенцев  
Институт ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск

На накопителе ВЭПП-3 наблюдалась следующая зависимость поведения электронного пучка от тока. При выборе соответствующего знака хроматизма и не слишком больших токах когерентные бетатронные колебания, возбужденные ударом инфлектора, быстро затухали вследствие head-tail-эффекта. При токах, превосходящих некоторое пороговое значение, происходила быстрая расфазировка колебаний отдельных частиц. При еще больших токах возникала неустойчивость с инкрементом, зависящим от величины хроматизма.

В данной работе рассмотрены бетатронные колебания пучка как целого, с амплитудой, много большей его поперечного размера, при наличии хроматизма и кубической нелинейности ведущего магнитного поля. Показано, что при одном и том же знаке хроматизма амплитуда колебаний может как нарастать, так и убывать в зависимости от тока пучка и амплитуды колебаний. Параметром, определяющим поведение пучка, является в этом случае отношение частоты фазовых колебаний в самосогласованной области бетатронной автофазировки  $\omega_{\varphi}$  к синхротронной частоте  $\Omega$ . Приведены результаты экспериментального изучения фазово-синхротронного резонанса  $\omega_{\varphi} = \Omega$ . Предложен новый способ подавления поперечных неустойчивостей посредством периодического изменения  $\omega_{\varphi}$  с частотой  $2n \omega_{\varphi}$  ( $n$  - целое), приводящего к расфазировке колебаний отдельных частиц пучка.

1. Рассмотрим бетатронные колебания частиц в накопителе при наличии хроматизма  $\partial\omega/\partial E$ , кубической нелинейности  $\partial\omega/\partial\alpha^2$  и взаимодействия между частицами. Пренебрежем для простоты зависимостью жесткости магнитной системы и других параметров от азимута машины. Такое пренебрежение не ограничивает общности, так как полученные результаты будут отличаться от точных на множители порядка единицы. Тогда уравнения бетатронных колебаний запишутся в виде:

$$\ddot{x}_i + \left(\omega + \frac{\partial\omega}{\partial E} \varepsilon_i\right)^2 x_i + \frac{\delta}{3} \omega \frac{\partial\omega}{\partial\alpha^2} x_i^3 = \sum_j f(x_i, x_j, s_i - s_j), \quad (1)$$

где  $x_i$  - поперечная координата,  $\varepsilon_i$  - отклонение от равновесной энергии,  $s_i$  - продольное отклонение от равновесного положения,  $i$  - номер частицы,  $f(x_i, x_j, s_i - s_j)$  - сила, действующая на  $i$ -тую частицу со стороны  $j$ -той частицы.

Сила зависит только от разности  $s_i - s_j$  вследствие того, что фактически мы произвели усреднение по периоду обращения.

Предположим, что  $f$  может быть аппроксимирована линейной, то есть положим

$$f(x_i, x_j, s_i - s_j) = A(s_i - s_j)x_i + \vartheta(s_i - s_j)x_j. \quad (2)$$

Такая аппроксимация заведомо правильна, если  $f$  описывает взаимодействие частиц с какой либо внешней системой (стенками вакуумной камеры, пластинами, полостями и т.д.), так как характерный размер внешних систем, определяющий нелинейность  $f$ , существенно больше амплитуд колебаний частиц  $a_i$ . В случае, когда  $f$  описывает "короткодействующие" силы, связанные с пространственным зарядом пучка, с наличием ионов и замороженных в ведущее магнитное поле электронов, образовавшихся при ионизации остаточного газа, и т.д., предположение (2), по-видимому, тоже дает качественно правильные результаты. Перейдя к переменным Ван дер Поля  $z_i = a_i \cos(\omega t + \varphi_i)$ ,  $\dot{z}_i = -\omega a_i \sin(\omega t + \varphi_i)$  и проводя усреднение по быстрой переменной  $\omega t$  при естественном предположении  $\Omega \ll \omega$ , получим:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= -\frac{1}{2\omega} \sum_j \vartheta(s_i - s_j) a_j \sin(\varphi_i - \varphi_j), \\ \dot{\varphi}_i &= \frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2} a_i^2 + \frac{\partial \omega}{\partial E} \varepsilon_i - \frac{1}{2\omega} \sum_j A(s_i - s_j) - \frac{1}{2\omega a_i} \sum_j \vartheta(s_i - s_j) a_j \cos(\varphi_i - \varphi_j). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как случай малых когерентных бетатронных колебаний рассмотрен в работах /1/ и /2/, мы сосредоточим внимание на случае колебаний пучка как целого, с амплитудой, существенно превышающей поперечный размер пучка. Последнее имеет место в двух практически интересных ситуациях: при возбуждении колебаний ударом инфлектора и на завершающей стадии неустойчивости.

Введем новые переменные:  $\alpha_i^2 = P_i + Q$ , где  $Q = \langle a_i^2 \rangle$ ,  $\langle P_j \rangle = 0$ ,  $\psi_i = \varphi_i - \langle \varphi_i \rangle$  (символ  $\langle \rangle$  означает усреднение по ансамблю:  $\langle X_j \rangle = N^{-1} \sum_j X_j$ , где  $N$  - число частиц в пучке). Учитывая, что в случае колебаний большой амплитуды  $|P_i| \ll Q$ ,  $|\psi_i| \ll 1$ , получаем из (3):

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -Q \delta \omega(s_i) \psi_i, \\ \dot{\psi}_i &= \frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2} P_i + \frac{\partial \omega}{\partial E} \varepsilon_i + \delta \omega_\kappa(s_i) - \langle \delta \omega_\kappa(s_i) \rangle + \delta \omega(s_i) \frac{P_i}{2Q}, \\ \dot{Q} &= 2\gamma Q, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } \delta \omega_\kappa(s_i) = -\frac{1}{2\omega} \sum_j [A(s_i - s_j) + \vartheta(s_i - s_j)] \quad (5)$$

- локальный когерентный сдвиг бетатронной частоты,

$$\delta \omega(s_i) = \frac{1}{2\omega} \sum_j \vartheta(s_i - s_j) \quad (6)$$

- локальная разность некогерентного и когерентного сдвигов бетатронной частоты,

$$\gamma = -\frac{N}{2\omega} \langle \langle \vartheta(s_i - s_j)(\psi_i - \psi_j) \rangle \rangle \quad (7)$$

- инкремент нарастания амплитуды когерентных колебаний.

Первые два уравнения (4) являются системой канонических уравнений с гамильтонианом

$$\mathcal{H}_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\delta \omega(s_i)}{2Q} \right] P_i^2 + Q \delta \omega(s_i) \frac{\psi_i^2}{2} + P_i [\delta \omega_\kappa(s_i) - \langle \delta \omega_\kappa(s_i) \rangle] + \frac{\partial \omega}{\partial E} \varepsilon_i. \quad (8)$$

Для анализа движения частиц, описываемого гамильтонианом (8), положим сначала  $\dot{Q} = 0$ .

Тогда легко видеть, что (8) описывает колебания частицы под действием "внешней силы" (последний член), изменяющейся с периодом синхротронных колебаний. Как видно из (8), частота свободных колебаний (малых фазовых колебаний в самосогласованной области бетатронной автофазировки)  $\omega_\Phi$  и условие их устойчивости даются формулой:

$$\omega_\Phi^2 = \overline{\delta \omega(s_i)} \left[ \overline{\delta \omega(s_i)} + 2Q \frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2} \right] > 0, \quad (9)$$

где  $\overline{\delta \omega(s_i)}$  - усредненное по периоду синхротронных колебаний  $\delta \omega(s_i)$ .

Условие устойчивости когерентных колебаний пучка как целого (9) было получено нами в /3/ и /4/, его физический смысл подробно разобран в /5/, результаты экспериментального исследования свободных фазовых колебаний кратко описаны в /6/. С учетом (9) ясно, что вышесказанное справедливо и при  $\dot{Q} \neq 0$ , но  $|\dot{Q}| \ll \omega_\Phi, \Omega$ . Итак, пусть для всех частиц пучка выполнено условие (9). Тогда когерентное движение устойчиво, т.е. пучок колеблется как целое, и его частоты не разбегаются. Выясним теперь, как изменяется амплитуда этих колебаний  $\sqrt{Q}$ . Для этого вычислим величину  $\gamma$  по формуле (7), найдя  $\psi_i(t)$  в предположении  $\dot{Q} = 0$ . Как известно, колебания линейного осциллятора являются суперпозицией свободных колебаний с частотой  $\omega_\Phi$  и вынужденных колебаний с частотой  $\Omega$  внеш-

ней силы. Ясно, что в нерезонансном случае свободные колебания не дают вклада в  $\gamma$ . Пренебрежем величиной  $\delta\omega_k(s_i) - \langle \delta\omega_k(s_j) \rangle$  по сравнению с  $\frac{\partial\omega}{\partial E} \epsilon_i$  в выражении для "вынуждающей силы". Тогда вынужденные колебания можно представить в виде:

$$\psi_i = \frac{\partial\omega}{\partial\omega_0} \cdot \frac{s_i}{R} \cdot \left(1 - \frac{\omega_{\varphi i}^2}{\Omega^2}\right)^{-1}, \quad (10)$$

где  $\frac{\partial\omega}{\partial\omega_0} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial E} / \frac{\partial\omega_0}{\partial E}$ ,  $R$  - средний радиус машины.

Подставив (10) в (7), получим:

$$\gamma = -\frac{N}{2\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\omega_0} \frac{1}{R} \ll \nu(s_i - s_j) \left( \frac{s_i}{1 - \frac{\omega_{\varphi i}^2}{\Omega^2}} - \frac{s_j}{1 - \frac{\omega_{\varphi j}^2}{\Omega^2}} \right) \gg. \quad (11)$$

В случае, когда разброс по частотам фазовых колебаний  $\omega_{\varphi i}$  существенно меньше расстройки от резонанса  $\omega_{\varphi i} = \Omega$ , т.е.  $\Delta\omega_{\varphi} \ll |\omega_{\varphi} - \Omega|$ , выражение (11) упрощается:

$$\gamma \approx -\frac{N}{2\omega} \frac{\partial\omega}{\partial\omega_0} \left(1 - \frac{\omega_{\varphi}^2}{\Omega^2}\right)^{-1} \ll \nu(s_i - s_j) \frac{s_i - s_j}{R} \gg. \quad (12)$$

Вследствие зависимости  $\omega_{\varphi}$  от числа частиц  $N$  инкремент  $\gamma$  зависит от  $N$  нелинейно. Кроме того, ясно, что при  $\omega_{\varphi} \rightarrow 0$  инкремент (12) должен совпадать с инкрементом неустойчивости бесконечно малых дипольных колебаний  $\gamma_0$ , вычисление которого проведено для случаев взаимодействия с различными внешними системами в /1/, /2/. Поэтому (12) можно переписать в виде:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 - \frac{\omega_{\varphi}^2}{\Omega^2}}, \quad (13)$$

$$\text{где } \gamma_0 = -\langle \delta\omega(s_j) \rangle \frac{\partial\omega}{\partial\omega_0} \frac{\ll \nu(s_i - s_j) \frac{s_i - s_j}{R} \gg}{\ll \nu(s_i - s_j) \gg}. \quad (14)$$

Отметим, что из (13) следует, что с ростом числа частиц изменяется не только величина, но и знак инкремента. Это, например, значит, что наличие быстрого затухания вследствие head-tail-эффекта на малых токах приводит к неустойчивости на больших токах, когда  $\omega_{\varphi} > \Omega$ . Напомним, что мы отбросили величину  $\delta\omega_k(s_i) - \langle \delta\omega_k(s_j) \rangle$  в выражении для "вынуждающей силы". Из (12) видно, что этот член не может давать вклада в инкремент, т.к. фаза колебаний  $s_i$  сдвинута на  $\frac{\pi}{2}$  относительно фазы колебаний учтенного нами члена  $\frac{\partial\omega}{\partial E} \epsilon_i$ .

В выражениях (12) и (14) используется усреднение по ансамблю частиц " $\langle \rangle$ ". Однако очевидно, что это усреднение сводится просто к интегрированию по продольному распределению частиц в пучке. Например, для гауссова распределения  $\rho(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{s^2}{2\sigma^2})$  получаем

$$\ll \nu(s_i - s_j) \gg = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \nu(x) dx, \quad (15)$$

$$\ll (s_i - s_j) \nu(s_i - s_j) \gg = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \nu(x) dx. \quad (16)$$

Измерив ток пучка,  $\partial\omega/\partial\omega_0$  и  $\gamma_0$ , можно из (12) найти  $\ll (s_i - s_j) \nu(s_i - s_j) \gg$ . Измерив  $\omega_{\varphi}$  методом, предложенным в /5/, и  $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha^2}$ , /7/, можно, как это было сделано в /6/, найти  $\langle \delta\omega(s_j) \rangle = \frac{N}{2\omega} \ll \nu(s_i - s_j) \gg$ . Зная зависимости  $\gamma_0$  и  $\langle \delta\omega(s_j) \rangle$  от длины сгустка  $\epsilon$ , можно, используя (15) и (16), найти  $\nu(s)$ . Измерения, проведенные нами на накопителе ВЭПП-3, показывают, что  $\gamma_0$  не зависит от  $\epsilon$ , а  $\langle \delta\omega(s_j) \rangle \propto \epsilon^{-1}$ . Из этих зависимостей и численных значений  $\gamma_0$  и  $\langle \delta\omega(s_j) \rangle$  следует, что

$$\nu(s) = \begin{cases} \frac{c}{s} & \text{при } s < -a, \\ 0 & \text{при } s > -a, \end{cases} \quad (17)$$

где  $c$  - константа,  $a$  - некоторый характерный размер ( $a \ll \sigma$ ).

2. Обсудим более подробно резонанс  $\omega_{\varphi} = \Omega$ , который, по-видимому, следует называть фазово-синхронным. Из (4) и (8) ясно, что на этом резонансе когерентное движение неустойчиво даже при выполнении условия (9). Этот резонанс был экспериментально изучен на-

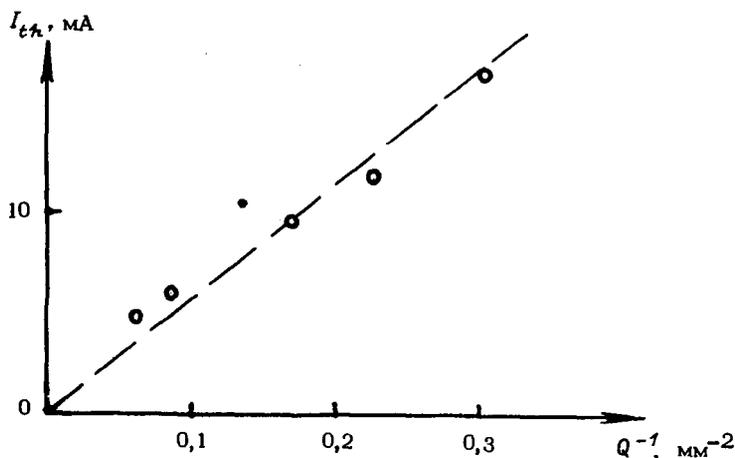


Рисунок.

ми на накопителе ВЭПП-3. Колебания пучка как целого возбуждались ударом инфлектора и наблюдались при помощи диафрагмированного ФЭУ и резонансного усилителя, как описано в /7/ и /6/.

При не слишком больших токах когерентное движение было устойчивым. Однако, начиная с некоторого порогового тока  $I_{th}$ , происходит разрушение когерентного движения за один-два периода синхротронных колебаний. На рисунке показана зависимость  $I_{th}$  от квадрата амплитуды колебаний  $Q$ . Так как кубическая нелинейность была выбрана достаточно большой и положительной, а  $\langle \delta\omega \rangle > 0$  для ВЭПП-3 /6/, условие резонанса можно записать в виде:

$$\Omega^2 = 2Q \langle \delta\omega \rangle \frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2}. \quad (18)$$

Так как  $\langle \delta\omega \rangle \gg I$ , то из (18) следует, что  $I_{th} \propto Q^{-1}$ , что согласуется с зависимостью, показанной на рисунке. К сожалению, глубина модуляции сигнала с частотой  $2\omega_{\varphi}$  падает с ростом тока, как это и должно быть вследствие роста жесткости  $\omega_{\varphi}^2$  эффективной потенциальной ямы, поэтому мы не могли непосредственно наблюдать на осциллограмме совпадение частот  $\omega_{\varphi}$  и  $\Omega$ . Чтобы узнать, какая частота фазовых колебаний  $\omega_{\varphi}$  соответствует пороговому току, мы измеряли  $\omega_{\varphi}$  при малом токе  $I$  по осциллограмме и по зависимости  $\omega_{\varphi} \propto \sqrt{I}$ , следующей из (9) и проверенной экспериментально /6/, вычисляли  $\omega_{\varphi}$  при  $I = I_{th}$ . Полученная таким образом из рисунка частота совпадает с синхротронной с точностью 5%, что не превышает неточность измерения  $\omega_{\varphi}$  при малом токе.

Тот факт, что когерентное движение неустойчиво не только при  $I = I_{th}$ , но и при токах, в несколько раз превышающих  $I_{th}$ , можно, по-видимому, объяснить наличием зависимости жесткости  $\omega_{\varphi}^2(s_i)$  от продольной координаты  $s_i$  и нелинейностью фазовых колебаний.

3. Сказанное в пункте 2 наводит на мысль о том, что разрушение когерентного движения можно использовать для подавления поперечных неустойчивостей. Одной из причин разрушения может быть, как было показано в /5/, нарушение условия (9). Если же (9) выполняется, то, изменяя  $\omega_{\varphi}^2$  с частотой  $2 \cdot \omega_{\varphi}$ , мы можем создать параметрический резонанс, который приведет к разрушению когерентного движения, а следовательно, и к подавлению неустойчивости. Из (10) ясно, что можно изменять  $\omega_{\varphi}^2$  двумя способами. Во-первых, при помощи октуполя можно изменять  $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2}$ . Однако это целесообразно лишь при не слишком больших токах и больших амплитудах колебаний, когда  $|\delta\omega| \ll 2Q \left| \frac{\partial \omega}{\partial \alpha^2} \right|$ . Во-вторых, можно изменять  $\langle \delta\omega \rangle$ . Это можно делать, например, при помощи активной системы подавления когерентных бетатронных колебаний, коэффициент усиления которой изменяется с частотой  $2\omega_{\varphi}$  (при малых амплитудах колебаний  $\sqrt{Q} \omega_{\varphi} \approx \langle \delta\omega \rangle$ ).

#### Л и т е р а т у р а

1. С. Pellegrini. Nuovo Cimento, LXIV N2A 447 (1969).
2. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков. Препринт ИЯФ 7-72, Новосибирск, 1972.
3. Н.А.Винокуров. В сб.: "Работы молодых специалистов, выполненные в ИЯФ СО АН СССР в 1972-1973 годах", Новосибирск, 1974, стр. 55.
4. Н.А.Винокуров. О влиянии ионов остаточного газа на динамику пучка в накопителе. Дипломная работа, НГУ, 1974.
5. Н.А.Винокуров, Г.Н.Кулипанов, Е.А.Переведенцев. Препринт ИЯФ 76-88, Новосибирск, 1976.
6. Н.А.Винокуров, В.Н.Корчуганов, Г.Н.Кулипанов, Е.А.Переведенцев, Е.Л.Салдин, А.Н.Скринский. Труды V Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. М., "Наука", 1977, стр. 394.
7. Н.А.Винокуров, В.Н. Корчуганов, Г.Н.Кулипанов, Е.А.Переведенцев. Препринт ИЯФ 76-87, Новосибирск, 1976.