

# ИЗУЧЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВСТРЕЧНЫХ ПУЧКОВ

И.Б.Вассерман, Ф.М.Израйлев, С.И.Мишнев, Г.М.Тумайкин  
Институт ядерной физики СО АН СССР, Новосибирск

Электромагнитное взаимодействие встречных пучков в накопителе приводит к увеличению поперечных размеров пучков и потерям частиц. Нелинейное электромагнитное поле ступка вызывает сдвиг бетатронной частоты встречной частицы, который зависит от амплитуды колебаний, а периодическая азимутальная зависимость силы этого поля ведет к возбуждению нелинейных резонансов /1/. С увеличением тока встречного пучка число резонансов в области фазовой плоскости, занятой частицами, возрастает, области автофазировки соседних резонансов увеличиваются, и происходит их перекрытие. Общие закономерности движения частиц в этих условиях рассмотрены в работе /2/, где показано, что при перекрытии резонансов движение на части фазовой плоскости носит стохастический характер.

В случае модуляции частоты бетатронных колебаний (например, радиально-фазовыми колебаниями) картина становится более сложной. Периодическое пересечение резонанса в зависимости от соотношений между девиацией частоты, частотой модуляции и частотой колебаний в области автофазировки может приводить к новым эффектам /3,4/, в частности быть причиной понижения порога перекрытия резонансов.

Численное и аналитическое изучение эффектов встречи проводилось и ранее (см., например, /5-8/, тем не менее основным вопросом остается определение наиболее существенных факторов, которые приводят к уменьшению критических значений токов встречных пучков. С этой целью нами было проведено численное и экспериментальное исследование эффектов встречи в широкой области условий и определение зависимости критерия стохастичности от различных параметров.

Выбранная модель взаимодействия удовлетворяет следующим условиям: а) рассматривается взаимодействие отдельной частицы с полем цилиндрического или ленточного пучка, имеющего гауссовское распределение в плоскости, перпендикулярной движению равновесной частицы; б) ступок короткий, что соответствует приближению тонкой линзы; в) изучается одномерное движение без учета бетатронных колебаний по другой степени свободы; г) предполагается, что места встречи располагаются через период магнитной системы накопителя.

В безразмерных переменных для цилиндрического пучка преобразование будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \chi_{n+1} &= \chi_n \cos \mu + \mathcal{P}_n \sin \mu - \frac{\delta \mathcal{P}_n^2}{\chi_n} (1 - e^{-\chi_n^2/2}) \sin \mu; \\ \mathcal{P}_{n+1} &= -\chi_n \sin \mu + \mathcal{P}_n \cos \mu - \frac{\delta \mathcal{P}_n^2}{\chi_n} (1 - e^{-\chi_n^2/2}) \cos \mu \end{aligned} \quad (1)$$

и для ленточного пучка:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \cos \mu + P_n \sin \mu - 4\pi \xi \int_0^{X_n} e^{-\bar{X}_n^2/2} d\bar{X}_n \cdot \sin \mu; \\ P_{n+1} &= -X_n \sin \mu + P_n \cos \mu - 4\pi \xi \int_0^{X_n} e^{-\bar{X}_n^2/2} d\bar{X}_n \cdot \cos \mu. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $X=x/\sigma$ ,  $P=p\beta/\sigma$ ,  $x$  - координата,  $\dot{x}=p$  - импульс,  $\beta$  - значение  $\beta$ -функции в месте встречи,  $\mu$  - изменение бетатронной фазы за один период магнитной системы. Параметр  $\mu$  связан с бетатронной частотой  $\nu$  через соотношение  $\mu=2\pi\nu/m$ , где  $m$  - число мест встречи. Параметр  $\xi$  приближенно равен линейному сдвигу бетатронной частоты за один период и имеет обычный вид:

$$\xi_{z,z} = \frac{N r_e \beta \sigma_{z,z}}{2\pi \gamma \sigma_z \sigma_z (\sigma_x + \sigma_z)}, \quad (3)$$

где  $\sigma$  - среднеквадратичный размер пучка,  $N$  - число частиц в сгустке,  $r_e$  - классический радиус электрона,  $\gamma$  - релятивистский фактор. Знак минус перед  $\xi$  в (1), (2) соответствует электрон-позитронному взаимодействию.

Из преобразования (1) легко получить условие устойчивости малых колебаний вблизи равновесной орбиты ( $X=P=0$ ). Граница устойчивости в зависимости от набега фазы  $\mu$  для  $\xi > 0$  представлена на рис. 1 (кривая I). Видно, что для встречных электрон-позитронных пучков область линейной устойчивости лежит справа от целого резонанса, удовлетворяющего условию  $\mu/\pi=k$ , где  $k=1,2,3\dots$  Можно показать, что и для нелинейного преобразования (1) или (2) условия устойчивости также периодичны с периодом  $\Delta\mu=\pi$ . Этот факт связан с нечетностью силы относительно  $X=0$ . В общем же случае периодичность равна  $\Delta\mu=2\pi$ . Выше кривой I движение равновесной частицы становится неустойчивым и ограничение амплитуды колебаний происходит лишь за счет нелинейности силы.

Определение критерия перекрытия проводилось для (1), (2) на БЭСМ-6 с использованием диалогового дисплея. Меняя  $\xi$  для выбранного  $\mu$ , можно найти  $\xi_{кр}$ , меньше которого области нелинейных резонансов на фазовой плоскости разделены устойчивыми траекториями, а больше - наблюдается частичное перекрытие резонансов, приводящее к сильной диффузии частиц. Область перекрытия наиболее мощных резонансов оказывается расположенной в основном в диапазоне  $X \approx 2-6$ . При этом неустойчивость проявляется при  $N \sim 10^3 \pm 10^4$  числа соударений. Для проверки устойчивости траекторий при  $\xi < \xi_{кр}$  счет проводился вплоть до  $N=10^6$ .

Анализируя полученную зависимость для  $\xi_{кр}$  (рис. 1), можно сделать следующие выводы:  
а. В большой области  $\mu$  критическое значение  $\xi_{кр}$  слабо зависит от частоты бетатронных колебаний.

б. Имеется существенное увеличение  $\xi_{кр}$  при значениях  $\mu$  справа от целого резонанса. Это связано с тем, что вблизи целого резонанса возрастает порядок работающих нелинейных резонансов, а следовательно, и уменьшается их мощность.

в. Для цилиндрической модели пучка стохастичность наступает при меньших значениях  $\xi$  ( $\xi \approx 0,16$ ), чем для ленточной модели пучка ( $\xi \approx 0,24$ ). Однако необходимо помнить, что при одинаковых значениях  $\xi$  плотность заряда в центре для цилиндрического пучка вдвое больше, чем для ленточного.

Экспериментальные значения  $\xi_{кр}/\theta$ , достигнутые на установках со встречными пучками, намного меньше расчетных. Одной из возможных причин этого уменьшения является модуляция бетатронной частоты из-за синхротронных колебаний. Такая модуляция имеет место, если, например,  $\psi_z$  или  $\psi_x$ -функция (дисперсионная энергетическая функция) в области взаимодействий не равна нулю.

Для случая, когда плоскость синхротронных колебаний совпадает с плоскостью бетатронных колебаний, выражение для силы при взаимодействии с цилиндрическим пучком имеет вид:

$$f(x, u) = - \frac{8\pi\sigma^2\xi}{\beta} \cdot \frac{1 - \exp[-(x+u)^2/2\sigma^2]}{x+u}, \quad (4)$$

где  $u = a_s \sin(2\pi\nu_s n/m)$ ;  $a_s$  - амплитуда синхротронных колебаний (максимальное отклонение частицы по  $z$  или  $x$  в месте взаимодействия);  $\nu_s$  - частота синхротронных колеба-

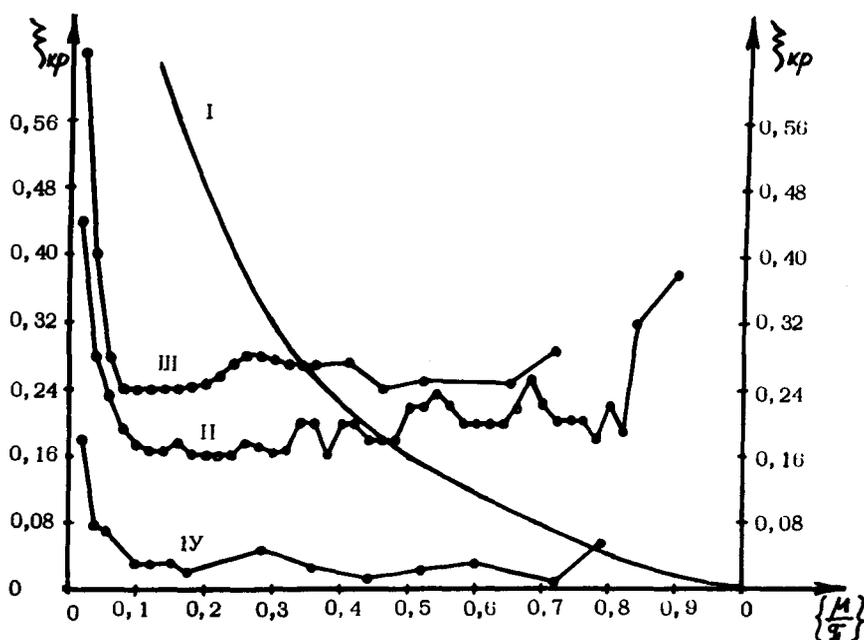


Рис. 1. Граница устойчивости в зависимости от  $\mu$ . Для удобства по горизонтальной оси отложена дробная часть от  $\mu/\omega$ . Кривая I дает условие устойчивости малых колебаний. Кривая II – граница стохастичности для цилиндрического пучка, кривая III – для ленточного. Кривая IV соответствует границе стохастичности для цилиндрического пучка при модуляции типа (4)  $\nu = 1,5$ ,  $\nu_3 = 0,01$ .  $\nu = a_3/\epsilon$ .

ний;  $m$  – число мест встречи. Если плоскости синхротронных и бетатронных колебаний перпендикулярны, то

$$f(x, u) = - \frac{8\beta\epsilon^2\xi}{\beta} x \frac{1 - \exp[-(x^2 + u^2)/2\epsilon^2]}{x^2 + u^2}. \quad (5)$$

Для ленточной модели будет иметь смысл только случай, когда плоскости бетатронных и синхротронных колебаний совпадают.

Результаты показывают, что особенно значительное уменьшение для цилиндрической модели наблюдается если плоскости бетатронных и синхротронных колебаний совпадают (рис. 2, кривая II). Для ленточной модели влияние синхротронных колебаний сказывается еще сильнее, и  $\xi_{кр}$  уменьшается не менее чем на порядок (кривая III). Приведенные результаты получены для  $\nu_3 = 0,01$ , что примерно соответствует частоте радиально-фазовых колебаний накопителя ВЭПП-2М /10/. Оказывается, что критерий стохастичности для  $\nu_3 \gg 10^{-3}$  практически не зависит от  $\nu_3$ . Интересно отметить, что и для более низких значений  $\xi < \xi_{кр}$  (для ленточной модели, рис. 2, кривая IV) есть слабая диффузия в области  $x \approx 1-2$ , однако область перекрытия резонансов значительно меньше ( $\Delta x \approx 0,5-1,0$ ).

Из уравнений (1), (2) следует, что при заданном виде взаимодействия критерий зависит лишь от двух параметров –  $\xi$  и  $\mu$ . При увеличении числа мест встречи  $m$  меняется только набег фазы  $\mu = 2\beta\nu/m$ . Поэтому критерий стохастичности зависит только от  $\xi$ , независимо от числа мест встречи. Конечно, этот вывод верен только для выбранной модели, где пренебрегается возмущениями магнитного поля, которое имеет свою периодичность. Третий параметр, от которого зависит стохастический предел – вид нелинейной силы встречного пучка. Для двух выбранных моделей сравнение результатов дает определенный ответ – ленточный пучок менее устойчив, чем цилиндрический. Особенно это заметно при введении модуляции.

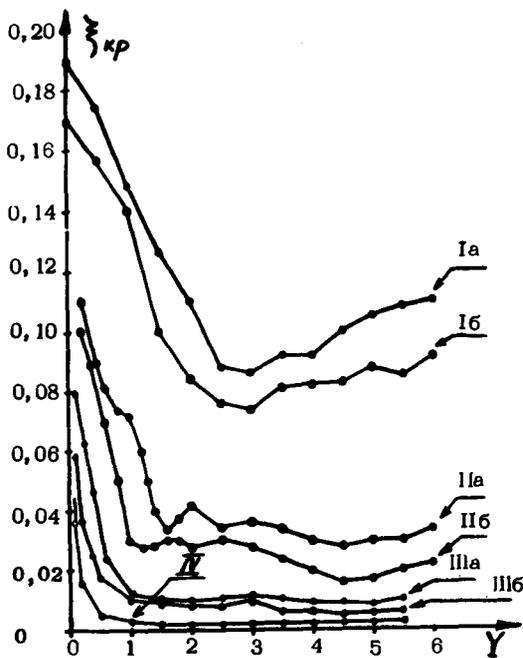


Рис. 2. Зависимость  $\xi_{кр}$  от относительной амплитуды модуляции  $Y = a_3/\epsilon$ . I - цилиндрический пучок, плоскости бетатронных и синхротронных колебаний перпендикулярны; II - цилиндрический пучок, плоскости колебаний параллельны; III - ленточный пучок с модуляцией. Для а -  $\{\mu/\eta\} = 0,08$ , для б -  $\{\mu/\eta\} = 0,12$ . IV - критерий слабого перекрытия резонансов для ленточного пучка ( $\{\mu/\eta\} = 0,12$ ). Для всех кривых  $\nu_3 = 0,01$

Более сильное влияние модуляции в случае, когда плоскости синхротронных и бетатронных колебаний совпадают, частично объясняется тем, что симметрия силы (4) при  $\mu \neq 0$  нарушается. В этом случае возможно появление новых резонансов ( $q$  - нечетное), приводящих к уменьшению критерия стохастичности. Действительно, оказывается, что для смещения  $Y=1,5$  и  $\{\mu/\eta\} = 0,08$  критерий понижается от  $\xi_{кр} = 0,20$  до  $\xi_{кр} = 0,12-0,14$ .

Другой причиной нарушения симметрии является разная амплитуда модуляции в местах встречи. Для параметров, близких к параметрам установки ВЭПП-2М, получены результаты, показанные в табл. 1, где  $\xi_{max}$  соответствует увеличению размера пучка до  $X=10$ , что близко к величине вертикальной апертуры ВЭПП-2М.

Таблица 1

Ленточный пучок				Цилиндрический пучок			
$\nu$	$Y$		$\xi_{max}$	$\nu$	$Y$		$\xi_{max}$
	1-е место встречи	2-е место встречи			1-е место встречи	2-е место встречи	
3,11	1,5	1,5	0,16	3,11	1,5	1,5	0,13
	1,5	-1,5	0,16		1,5	-1,5	0,10
	1,5	0	0,08		1,5	0	0,08
	0	0	0,24		0	0	0,17

Таким образом, несимметрия в абсолютной величине модуляции двух промежутков встречи приводит к существенному понижению  $\xi_{max}$ .

Необходимо отметить, что для вертикальных колебаний модуляция типа (4) может быть связана не только с вертикальной  $\psi_z$ -функцией, но и с пересечением встречных сгустков под углом, как это имеет место на установке DORIS [11].

Для изучения влияния  $\psi_z$  на эффекты встречи на накопителе ВЭПП-2М был проведен эксперимент по изучению взаимодействия встречных электрон-позитронных пучков при наличии и отсутствии  $\psi_z$ . В одном из промежутков встречи были установлены две повернутые на  $45^\circ$  квадрупольные линзы, так что набег бетатронной фазы между ними  $\mu_z \propto \eta$ . В этом случае совместное изменение этих квадрупольных линз изменяет  $\psi_z$  только в этом промежутке.

Предварительно с помощью имеющихся повернутых квадруполей  $\psi_x$  уменьшалось до величины модуляции  $Y \leq 0,07$ , и затем в одном из промежутков встречи  $\psi_x$  увеличивалось до величины  $Y \approx 0,3$ . Измерялась величина  $\xi_{max}$ , при которой время жизни встречного пучка резко уменьшалось. Получены следующие результаты при различных значениях  $\psi_x$  в местах встречи:

1.  $Y_1 \approx Y_2 \leq 0,07$ ,  $\xi_{max} \approx 0,045$
2.  $Y_1 \approx 0,3$ ;  $Y_2 \leq 0,07$ ;  $\xi_{max} \approx 0,02$
3.  $Y_1 \approx Y_2 \leq 0,07$ ; связь подавлена;  $\xi_{max} \approx 0,14$ .

Здесь  $Y_{1,2}$  — есть отношение среднеквадратичных размеров синхротронных и бетатронных колебаний по  $x$  для 1-го и 2-го места встречи. Таким образом, результаты эксперимента показывают более сильную зависимость величины  $\xi_{max}$  от  $\psi_x$ , чем следует из табл. 1. Это, видимо, можно объяснить влиянием двумерности колебаний и наличием связи.

Следует отметить, что максимальная светимость на установке ВЭПП-2М была получена в режиме с малой  $\psi_x$  и подавленной связью /10/.

Примеры фазовых плоскостей для различных случаев приведены на рис. 3 /12/.

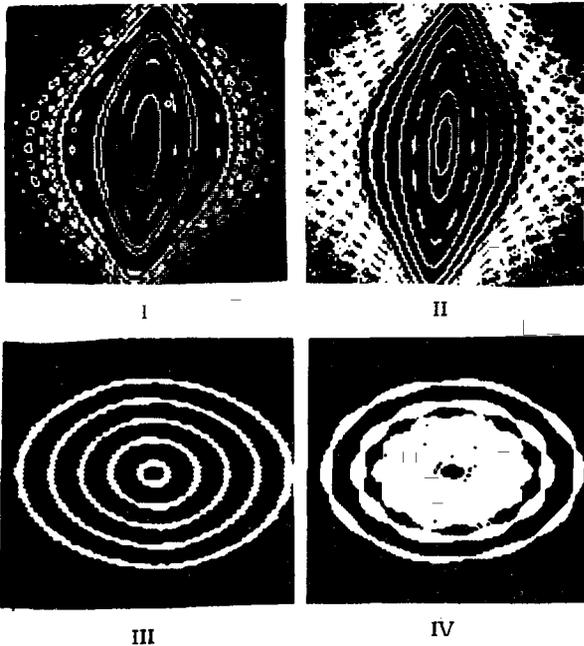


Рис. 3. I. Вид фазовой плоскости при взаимодействии с цилиндрическим пучком  $\{\mu/\eta\} = 0,04$ . Центр фазовой картины соответствует  $X = P = 0$ ;  $X_{max} = 10$ ,  $P_{max} = 15$ ,  $\xi = 0,24$ ; ниже границы стохастичности. II. То же при  $\xi = 0,32$ ; выше границы стохастичности. III. То же при наличии модуляции типа (4),  $\{\mu/\eta\} = 0,08$ ,  $Y = 1,5$ ,  $\psi_x = 0,01$ ,  $\xi = 0,02$ ; ниже границы стохастичности. IV. То же,  $\xi = 0,04$ ; выше границы стохастичности.

#### Л и т е р а т у р а

1. Я.С.Дербенев, С.И.Мишнев, А.Н.Скринский. Атомная энергия. 20, (1966), 217.
  2. Б.В.Чириков. "Исследование по теории нелинейного резонанса и стохастичности", ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1969.
  3. Г.Н.Кулипанов, С.И.Мишнев, А.Н.Скринский. Труды VII Международной конференции по ускорителям. Ереван (1969), т. 2, 353.
  4. M.Month, "Proc. IXth Int. Conf. on High Energy Acc.", Stanford (1974), 402; IEEE Trans. Nucl. Sci. NS-22 (1975), 1376.
  5. E.D.Courant, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-12 (1965) 550.
  6. A.Renieri "Proc. IXth Int. Conf. on High Energy Acc.", Stanford (1974), 414a.
  7. E.Kéil, CERN/ISR-TH/72-7; CERN/ISR-TH/72-25.
  8. A.G.Ruggiero, "Proc. IXth Int. Conf. on High Energy Acc.", Stanford, (1974), 419.
  9. F.Amman, IEEE Trans. Nucl. Sci., NS-20, (1963) 858;
- И.Б.Вассерман, И.А.Кооп, С.И.Мишнев и др. Изучение эффектов электромагнитного вза-

взаимодействия встречных пучков в накопителе ВЭПП-2М. Новосибирск, ИЯФ СО АН СССР, 1976. Препринт ИЯФ 76-79.

10. И.Б.Вассерман, И.А.Кооп, В.П.Кутовой и др. Получение высокой светимости на электрон-позитронном накопителе ВЭПП-2М. Труды V Всесоюзного совещания по ускорителям. Москва (1976).
11. DESY STORAGE RING GROUP, DORIS Present Status and Future Plan Proc. IXth Intern. Conf. on High Energy Acc. Stanford, 1974, 43.
12. Ф.М.Израйлев, С.И.Мишнев, Г.М.Тумайкин. Численные эксперименты по определению критерия стохастичности при взаимодействии встречных пучков (одномерная модель). Новосибирск. Препринт ИЯФ 77-43 (1977).

## ДИСКУССИЯ

Н.С.Диканский: Почему ожидалась зависимость мощности синхротронных резонансов от частоты модуляции? Казалось бы, скорее необходимо было рассматривать эту зависимость от величины девиации.

Г.М.Тумайкин: Мы, действительно, убедились, что зависимость от частоты синхротронных колебаний слабая. Зависимость от величины девиации очень сильная, как это было показано.

E. Courant: Have you considered coupling between the two transverse degrees of freedom?

Г.М.Тумайкин: Связь рассматривалась только для цилиндрической модели пучка. Заметной разницы обнаружено не было.

E. Courant: I would like to remark that I have carried out similar numerical experiments, and I found that the critical is much smaller for a beam with sharp boundaries than for a Gaussian beam. Do you obtain similar results?

Г.М.Тумайкин: Мы рассматривали только пучки с гауссовым распределением плотности, как это обычно имеет место в электрон-позитронных накопителях.