БЫСТРЫЕ ОДНООБОРОТНЫЕ НЕУСТОЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ СГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА

Д.В. Пестриков
Институт ядерной физики СО АН СССР
Новосибирск, 630090

1. Широкий класс когерентных неустойчивостей пучка в накопителе обусловлен взаимодействием частиц с низкодобротными элементами вакуумной камеры, наведенные поля в которых исчезают за время, меньшее периода обращения. Такие неустойчивости принято называть однооборотными. В отсутствие специальных мер однооборотные неустойчивости могут быть одной из причин, ограничивающих величину накопленного тока. Сейчас хорошо известны как основные методы расчетов такого рода ограничений, так и классификация возможных типов неустойчивостей пучков в накопителях[1,2]. Вместе с тем ряд вопросов в теории остался недостаточно исследованным.

Обычный путь изучения когерентной устойчивости пучка состоит в вычислении спектра собственных частот линеаризованной системы уравнений Власова и установлении условий неотрицательности декрементов когерентных колебаний. Сама возможность существования такого спектра налагает определенные условия на характер взаимодействия частиц. Оно должно замыкать обратную связь частиц по пучку и тем обеспечивать самосогласованность наведенных полей. Нарушение условия самосогласованности приводит к отсутствию у пучка нормальных когерентных колебаний и соответственно к отсутствию корней у формально выписанных дисперсионных уравнений.

В настоящем докладе мы рассмотрим один из примеров такого нарушения — задачу об однооборотных быстрых неустойчивостях поперечных когерентных колебаний сгруппированного пучка. В отличие от синхробетатронных неустойчивостей сгруппированного пучка, время развития которых τ_k должно заметно превышать периоды синхротронных колебаний частиц $(2\pi/\omega_c)$, мы будем считать неустойчивость быстрой, если выполнено обратное условие:

$$\tau_k\omega_c \ll 1 . \tag{1}$$

Такой случай широко известен в теории когерентной неустойчивости как модель «жесткого сгустка» и часто применяется для оценки декрементов когерентных колебаний сгруппированных пучков[1,3].

Специфической чертой однооборотных неустойчивостей является то, что они вызываются действием на частицы запаздывающих наведенных полей, исчезающих за время оборота в машине $(2\pi/\omega_s)$. В этих условиях выполнение неравенства (1) приводит к тому, что развитие колебаний в хвостовой части пучка никак не сказывается на движении головных частиц. Поэтому действующие на пучок поля не являются самосогласованными. Развитие колебаний в таком пучке обусловлено резонансной раскачкой задних частиц передними и обладает рядом особенностей, отличных от развития в пучке самосогласованных когерентных колебаний.

Следует отметить, что круг задач, в которых выполнено условие (1), достаточно широк. Например, сюда относятся задачи о когерентной устойчивости пучка в синхротронах (особенно вблизи критической энергии); релятивистского пучка в линейных ускорителях[4], о когерентной устойчивости компенсированного пучка[5].

2. Основные особенности развития в пучке быстрых однооборотных неустойчивостей можно продемонстрировать на простой задаче о взаимодействии пучка с согласованной пластиной. Как известно[1,6], участок вакуумной камеры, содержащий такую пластину, представляет собой отрезок двусвязного волновода, в котором возможно распространение ТЕМ-волн с частотами $0<\omega<c/l_\perp$ ($l_\perp$ —поперечный размер камеры).

Мы ограничимся исследованием устойчивости аксиальных колебаний пучка. Тогда можно считать, что колебания частиц относительно равновесной траектории описываются формулами:

$$\begin{gathered} z=a\cos\psi,\quad p_z=\gamma m\omega_s\, dz/d\theta,\quad \Delta p=p-p_s, \\ \dot\psi=\omega_z=\omega_0(\Delta p)\nu_z(\Delta p),\quad \theta=\theta_s+\varphi,\quad \theta_s=\omega_s t, \\ I_z=\frac{p_s\nu_z a^2}{2R_0}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь использованы обозначения работы[1]. Формулы (2) осуществляют кононическое преобразование от переменных (p_z, z) к переменным действие-фаза бетатронных колебаний (I, ψ). Интегралами продольного движения при выполнении (1) являются φ и Δp.

В соответствии с общими методами линейной теории когерентных колебаний[1,6] полагаем, что состояние пучка в отсутствие когерентных колебаний описывается функцией распределения

$$f_0=F(I)\,f(\Delta p)\,\varrho(\varphi),\quad \int d\Gamma f_0=1, \tag{3}$$

а когерентным колебаниям отвечает добавление к f_0 малой нестационарной части

$$f=f_0+\sum_m \tilde f_m(I,\Delta p,\varphi,t)\,e^{im\psi}. \tag{4}$$

Целые числа m определяют мультипольность колебания.

Линеаризация и применение метода усреднения к уравнениям Власова приводят[1] к интегральному уравнению для фурье-амплитуд

$$\tilde f_{m\omega}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_s}{2\pi}\int_0^\infty d\tau\,\tilde f_m(\dots,t)\,e^{i\omega t}. \tag{5}$$

Для аксиальных колебаний ($\omega\cong m_z\omega_z$) это уравнение может быть записано в виде[1]

$$f_{m\omega}=\frac{if_{m0}}{\omega-\omega_m}+N\bar L_{m,\omega}\frac{m\,\partial f_0/\partial I}{\omega-\omega_m}, \tag{6}$$

где $\omega_m=m\omega_z$, а $\bar L$—среднее по периоду обращения значение лагранжиана взаимодействия частиц с наведенными полями, f_{m0}—описывает начальные условия.

Учитывая в (6) только ту часть поля, которая отвечает излучению частиц в двусвязный волновод с ультрарелятивистской точностью ($\gamma\gg1$) для $\bar{L}$ имеем:

$$L_{m\omega}=\frac{i\,e^2U_m(I)}{2\Pi}\int d\Gamma_\perp\;d\Delta p\,U_m\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\theta_0}d\varphi'\;f_{m\omega}\times$$

$$\times\left[m\nu\left(\theta_0-\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)-i\right]\exp\left[\frac{im\nu}{2}(\varphi'-\varphi\right], \tag{7}$$

где $\Pi=2\pi R_0$—периметр орбиты, $U_m(i)$—гармоника потенциала ТЕМ-волны, θ_0—азимутальная длина пластины. Переходя в уравнении (6) к моментам

$$\chi_{m\omega}(\varphi)=\int d\Gamma_\perp\,d\Delta p U_m(I)\;\exp\left(\frac{im\nu\varphi}{2}\right)f_{m\omega}, \tag{8}$$

перепишем его в виде

$$\chi_{m\omega}=C_{m\omega}(\varphi)+i\Lambda\varrho(\varphi)\int\limits_{\varphi}^{\varphi+2\theta_0}d\varphi'\,\chi_{m\omega}(\varphi')\left[m\nu\left(\theta_0-\frac{\varphi'-\varphi}{2}\right)-i\right]. \tag{9}$$

Здесь

$$C_{m\omega}=i\,e^{im\nu\varphi/2}\int\frac{d\Gamma_\perp\;d\,\Delta p\;U_mf_m}{\omega-\omega_m}, \tag{10}$$

$$\Lambda=\frac{Ne^2}{\Pi}\int d\Gamma_\perp\;d\Delta p\,|\,U_m|^2\;\frac{m\,\partial F_0/\partial I\cdot f_0(\Delta p)}{\omega-\omega_m}. \tag{11}$$

3. Уравнение (9) описывает раскачку частиц, находящихся в точке φ, впередиидущими частицами интервала

$$\varphi\leqslant\varphi'\leqslant\varphi+2\theta_0\,.$$

Такое уравнение имеет собственные значения лишь в том случае, когда длина пучка φ_b удовлетворяет условию

$$\varphi_b>2\pi-2\theta_0.$$

Физический смысл такого условия очевиден. Частицы головы пучка должны успеть провзаимодействовать с полем, наведенным частицами хвоста. В частности, этому условию удовлетворяет $\varrho(\varphi)=\mathrm{const}$, когда спектр уравнения (9) дает спектр когерентных колебаний однородного пучка.

Если выполнено противоположное условие

$$\varphi_b<2\pi-2\theta_0, \tag{12}$$

уравнение (9) является уравнением Вольтерра. Относительно интегральных уравнений этого класса известно[7], что они вовсе не имеют ни собственных решений, ни собственных чисел Λ. В соответствии с этим отсутствует и спектр коллективных колебаний. Это подтверждается формальным построением дисперсионного уравнения, которое для уравнения (9) имеет вид

$$\exp\left(i\,\Lambda(\omega)\right)=0.$$

Аналитическое решение уравнения (9) может быть найдено лишь при определенных предположениях о функции $\varrho(\varphi)$. Рассмотрим наиболее простой случай, когда $\varphi_b\ll2\theta_0$, а $\varrho(\varphi)$ определяется формулой

$$\varrho(\varphi)=\begin{cases}1/\varphi_b, & 0<\varphi<\varphi_b,\\ 0, & \varphi>\varphi_b.\end{cases} \tag{13}$$

Полагая, что $f_{m0}\sim\varrho(\varphi)$, после подстановок

$$w(\varphi)\,\varrho(\varphi)=\chi_{m\omega}(\varphi),\quad \bar{C}_m(\varphi)\,\varrho(\varphi)=C_m(\varphi)$$

решение (9) может быть записано в виде

$$w(\varphi)=\bar{C}_m(\varphi)+\frac{i\bar{\Lambda}}{\varphi_b}\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b}d\varphi'\,\bar{C}_m(\varphi')\exp\left[i\bar{\Lambda}(\varphi'-\varphi)\right]. \tag{14}$$

Как и должно быть, ядро этого решения $\exp\left[i\bar{\Lambda}(\varphi-\varphi')\right]$ является целой функцией Λ. Обратим внимание на еще одно свойство решения (14). Отличие w от начального значения $\bar{C}_{m\omega}(\varphi)$ нарастает при удалении от головной части пучка $\varphi=\varphi_b$. Это отражает то обстоятельство, что формула (14) описывает раскачку задних частиц головными.

Зависимость решений от времени определяется выражением

$$w_m(\varphi,t)\;e^{i\omega_mt}=\bar{C}_m(\varphi)-\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b}d\varphi'\,\bar{C}_m(\varphi')\sqrt{-\frac{i\Omega_mt}{\varphi_b(\varphi'-\varphi)}}\times$$

$$\times J_1\left(\sqrt{\frac{i\Omega_mt(\varphi'-\varphi)}{\varphi_b}}\right) \tag{15}$$

и в общем случае не является экспоненциальной. Здесь $J_1(x)$—функция Бесселя[8], а

$$\Omega_m=-\frac{Ne^2}{2\Pi}\;\left\langle\frac{\partial|\,U_m|^2}{\partial I}\right\rangle\,(1+i\,m\nu\theta_0)\,m \tag{16}$$

- комплексный когерентный сдвиг частоты точечного пучка.

Неэкспоненциальное нарастание решений является следствием отсутствия спектров нормальных колебаний[9]. На малых временах $|\Omega_m|t\ll1$ оно линейное. На больших $|\Omega_m|t\gg1$ из-за комплексности величины Ω_m, $w\sim\exp\left(\sqrt{t/\tau_k}\right)$ с «инкрементами», зависящими от расстояния до точки наблюдения

$$\tau_k^{-1}(\varphi)\simeq|\,\Omega_m|\,\frac{\varphi_b-\varphi}{\varphi_b}. \tag{17}$$

Указанные асимптотические свойства решений вообще характерны для быстрых однооборотных неустойчивостей и обусловлены резонансностью взаимодействия частиц. При демпфировании таких неустойчивостей необходимо заботиться не только о знаке вносимого декремента, но и о компенсации величины когерентного сдвига частоты. Отметим еще, что найденное асимптотическое поведение решений w_m сравнительно слабо зависит от формы начального возмущения $\bar{C}_m(\varphi)$.

Неэкспоненциальный характер решений в целом облегчает стабилизацию быстрых однооборотных неустойчивостей трением или затуханием Ландау. В последнем случае, для «гладких» распределений по частотам, колебания начинают затухать при

$$t>t_0=\frac{1}{(m\Delta\omega)^2\,\tau_k}, \tag{18}$$

$\Delta\omega$—разброс частот в пучке. Возможны и другие способы подавления быстрых однооборотных неустойчивостей[4].

4. Описание быстрых неустойчивостей из-за взаимодействия пучка с другими низкодобротными элементами отличается от рассмотренных лишь связью когерентного сдвига Ω_m с функцией Грина тех полей, которые возбуждаются в этом элементе. При этом, из-за резонансности взаимодействия частиц, времена нарастания колебаний определяются числом впередиидущих частиц

$$\tau_k^{-1}\sim\Omega_m\int\limits_{\varphi}^{\varphi_b}d\varphi'\varrho(\varphi'),$$

а устойчивость колебаний определяется свойствами когерентного сдвига, вычисленного для пучка нулевой длины Ω_m.

Перечислим некоторые следствия полученных здесь результатов. Видно, что при демпфировании когерентных колебаний сгруппированного пучка (пассивными, либо активными низкодобротными системами) величины вносимых декрементов в общем не должны превышать частоту синхротронных колебаний. В противном случае колебания могут оказаться неустойчивыми из-за больших вносимых системой величин когерентного сдвига частоты. Поэтому при столь быстром демпфировании необходимо заботиться не только о величине вносимого декремента, но и о компенсации когерентного сдвига.

В последнее время все более интенсивно обсуждаются неустойчивости поперечных когерентных колебаний из-за связи синхротронных мод[10]. Проведенный анализ показывает, что вычисление спектра когерентных колебаний в таких задачах имеет смысл лишь тогда, когда взаимодействие связывает сравнительно небольшое число мод (скажем две, три). Поскольку число мод определяется отношением $|\Omega_m|/\omega_c$, при большем числе связанных мод оказывается выполненным условие (1). В этом случае характер развития колебаний будет близок к рассмотренному выше.

Автор благодарен Н.С. Диканскому за многочисленные советы и интерес к работе, а также Б.Н. Брейзману, А.В. Бурову, А.В. Новохатскому и В.В. Пархомчуку за обсуждение затронутых в работе вопросов.

Литература

1. Дербенев Я.С., Диканский Н.С. Препринт ИЯФ №315.-Новосибирск, 1969.
2. Диканский Н.С. Кандидатская диссертация. ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1969.
3. Ruth R.D., Wang J.M. IEEE Trans. on Nucl. Science, N S-28, N3, 2405, 1981.
4. Балакин В.Е., Будкер Г.И., Скринский А.Н. Труды VI Всесоюз. совещания по ускорителям заряженных частиц (Дубна, 1978).-Дубна, 1979, т.I; Балакин В.Е., Кооп И.А. и др. Там же с.142. Balakin V.E., Novokhatsky A.V., Smirnov V.P. Proc. of the XII Intern. Conf. on High Energy Accelerators (Fermilab August 11—16, 1983), FNAL, Batavia (Ill.) 1983, p.119—120.
5. Куделайнен В.И., Пархомчук В.В., Пестриков Д.В. ЖТФ, 1983, т.53, с.870.
6. Дербенев Я.С., Диканский Н.С., Пестриков Д.В. Препринт ИЯФ 7-72. Новосибирск, 1972; CERN Transl. N 72-16.-Geneva, 1972.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики.-М.: Физматгиз, 1958, с.812.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.-М.: Физматгиз, 1962, с.1100.
9. Пестриков Д.В. Препринт ИЯФ 85-105.-Новосибирск, 1985. 18 с.
10. Kohaupt R.D. Desy Report 80/22, 1980.